Pro Mathematica: Vol. V, Nos. 9 - 10, 1991

ACERCA DE LA CONJETURA DEL JACOBIANO

Fernando E. TORRES ORIHUELA*

Sea k un campo y sea $F:k^n \longrightarrow k^n$ una aplicación polinómica, i.e., F es tal que sus funciones coordenadas $f_1,\ldots,f_n$ son polinomios en n variables $X_1,\ldots,X_n$. Si k es infinito y si F tiene inversa polinomial G ésta con funciones coordenadas $g_1,\ldots,g_n$, entonces el determinante de la matriz jacobiana $(\frac{\partial f_i}{\partial X_j})$ es un elemento de $K^*:=k\setminus\{0\}$. Esto sigue de la regla de la cadena pues $G\circ F$ = identidad sobre k^n y k infinito implican $X_i = g_i(f_1,\ldots,f_n)$, luego

$$\delta_{ij} = \sum_{t=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial X_t}(f_1,\ldots,f_n)\,\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\ .$$

La última igualdad nos dice que el producto de matrices de orden n, $(\frac{\partial g_i}{\partial X_t}(f_1,\ldots,f_n))(\frac{\partial f_i}{\partial X_j})$ es

*Estudiante de Doctorado del Instituto de Matemática Pura y aplicada, Río de Janeiro, Brasil.

la matriz identidad. Aplicando la función determitante a ambos lados y después de comparar grados sigue lo afirmado.

La conjetura del Jacobiano afirma que si la característica de k es cero y $F = (f_1,\ldots,f_n)$ es polinómica tal que el determinante de su matriz facobiana $\in k^*$, entonces F tiene inversa polinómica.

Es posible que este problema haya aparecido por primera vez en la literatura en 1939 en un artículo de Keller [14] para $k = C$. De esta fecha se registran al menos cuatro "pruebas" erradas de tal conjetura (Ver por ejemplo [6, I.3]) y en especial significativos avances se ha logrado para $n = 2$; mas para $n \geq 2$, la cuestión continua en abierto. (Si $n = 1$ la hipótesis implica $F(x) = ax + b$ con $a \in k^*$ y $b \in k$; luego la conjetura es cierta). Este artículo tiene la finalidad de divulgar algunos resultados parciales y de problemas asociados a tal conjetura. No pretende ser exhaustivo.Así la mayoría de resultados presentados no estan acompañados de demostraciones mas si de las referencias. Aquellos en los cuales se incluye una prueba es por que o no estan "explícitamente" enunciados en la literatura o es una prueba más simple de tal (módulo una opinión).

En lo que sigue, $k^{[n]} := k[X_1,\ldots,X_n]$.

1. Caso general.

1.0 Si la característica de k es $p > 0$ entonces $x \mapsto x^p - x$ sirve como contraejemplo a la conjetura en característica prima. (Aun para n=1!). En este caso Nousiainen probó :

Teorema 1.1 **[6,Teo,. 2.2]** Sea k un campo de característica $p > 0$ y $F:k^n \longrightarrow k^n$ polinómica digamos $F(x) = (f_1(x),\ldots,f_n(x))$.

Son equivalentes:

(1) El determinante del jacobiano de $F \in k^*$.

(2) $k^{[n]} = k[X_1^p,\ldots,X_n^p,f_1,\ldots,f_n]$.

(3) Los polinomios $f_1^{q_1}\ldots f_n^{q_n}$, $0 \le q_i < p$, forman una base para $k^{[n]}$ como $k[X_1^p,\ldots,X_n^p]$ - módulo. ∎

Para $p > 0$, ver además la "vecindad" del Teo. 2.2 en [6].

En particular si k es finito, digamos con q elementos, las coordenadas de una función polinómica en general no están unívocamente definidas por tal. Es el caso de una función definida por $X^q - X - X^2$. Más aún, se prueba que toda función $f:k^n \longrightarrow k$ puede ser definida por un polinomio de n variables: [15, Ejercicio 5.6d] o

[28, pág. 152].

1.1 De ahora en adelante supondremos k infinito El siguiente lema de carácter elemental es básico en lo que sigue:

Lema 1.

(a) [15, Cor.2, pág.145]. Si $F_1,\ldots,F_n$ son subconjuntos infinitos de un campo k y $f \in k^{[n]}$ se anula en $F_1 X \ldots X F_n$, entonces $f = 0$.

(b) [11, Ejercicio 1.14] O [28, Prop. 2.7b, pág. 101]. Si k es algebraicamente cerrado y $f \in k^{[n]} \setminus k$, entonces f tiene al menos un cero. ■

Del lema 1.1a sigue que las funciones coordenadas de una función polinómica esta definidas unívocamente por ella, con lo que ya no es ambiguo escribir $F = (f_1,\ldots,f_n)$. Para tal F, $J(F) := (\frac{\partial f_i}{\partial X_j}) \in M_n(k^{[n]})$ = conjunto de matrices de orden n con entradas en $k^{[n]}$.

$J(F)(x)$ denotará a la matriz obtenida de $J(F)$ reemplazando las variables de sus componentes por $x \in k^n$ y $j(F) := \det(J(F)) \in k^{[n]}$. Con estas notaciones tenemos:

Corolario. Si k es algebraicamente cerrado, son equivalentes:

(a) $J(F) \in GL_n(k^{[n]})$.

(b) $j(F) \in K^{*^n}$.

(c) $\forall\ x \in k^n : J(F)(x) \in GL(k)$.

Prueba. (a) $\Leftrightarrow$ (b) es por álgebra lineal y (b) $\Rightarrow$ (c) es claro. Para ambas proposiciones no es necesaria la hipótesis sobre k. (c) $\Rightarrow$ (b): Sigue del lema 1.1b. ∎

Si k no es algebraicamente cerrado, el corolario es falso : e.g. $k = R$ y $F = X^2 + 1$. Así que para este caso se tiene una conjetura análoga : "Si $F = (f_1,\ldots,f_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es polinómica con $J(F)(x) \in GL_n(k)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, entonces F tiene inversa analítica". Ver la sección 3.1 de este artículo.

1.2 Para F polinómica con coordenadas f_i existe un homomorfismo de k-álgebra asociado

$F^*: k^{[n]} \longrightarrow k^{[n]}$ que aplica $x_i \mapsto f_i$ y recíprocamente para un tal k-homomorfismo φ existe una aplicación polinómica F tal que $F^* = \varphi$. Esto es un caso particular de un resultado para morfismos de variedades algebraicas afines. (Ver por ejemplo [12, Chap 1, pro. 3.5]).

Luego, analizar la existencia de la inversa polinómica para F será equivalente a la de la biyectividad de F^*. En verdad – ver la Observación que sigue al Teo.1.2 – la inyectividad de F será suficiente para la existencia de tal inversa. Así, lo remarcable del cambio para F^* podría ser el utilizar resultados sobre la estructura de los k-homomorfismos de $k^{[n]}$. En efecto, para $n = 2$ se sabe que todo k-automorfismo de $k[X,Y]$ es composición de k-automorfismos de las formas $X \mapsto X$, $Y \mapsto Y + h(X)$ ó $X \mapsto aX + bY$, $Y \mapsto cX + dY$ con $a,b,c,d \in k$ y $ad-bc \neq 0$ [33]. Para $n \geq 3$ aún no se tienen resultados de esa naturaleza, más, se puede determinar un k-automorfismo de $k^{[n]}$ mediante su "esqueleto" [32].

1.3 En esta sección usaremos la aritmética de las series de potencias formales como otra justificación de plantear el problema sobre $k^{[n]}$.

Denotemos por $Aut(k^n)$ al conjunto de aplicaciones polinómicas definidas de k^n e si misma que aceptan inversa polinómica y por $Aut(k^{[n]})$ los k-automorfismos de la k-álgebra $k^{[n]}$. Como la traslación al origen $T \in Auto(k^n)$, reemplazando si es necesario F por $F \circ T$ podemos suponer $F(0) = 0$ sin perder la hipótesis sobre $j(F)$ en el caso de que esta pertenezca a k^*. Luego s.p.g. considere $F = (f_1, \ldots, f_n) : k^n \longrightarrow k^n$ polinómica con $F(0) = 0$ y $j(F) \in k^*$. Extendamos F^* a un k-homomorfismo entre series $k[[Y_1,\ldots,Y_n]] \longrightarrow k[[X_1,\ldots,X_n]]$ mediante $Y_1 \longrightarrow f_1\ldots(*)$.

El Teorema de Preparación de Weirstrass implica el Teorema la Función Implícita Formal (T.F.I.F) :

"Para n series $g_i \in k[[Y_1,\ldots,Y_m,X_1,\ldots,X_n]]$ sin término constante ($g_i(0) = 0$) y $\det(\frac{\partial g_i}{\partial X_j}(0)) \neq 0$ existen únicos $h_1,\ldots,h_n \in k[[Y_1,\ldots,Y_m]]$ tales que $h_i(0) = 0$ y $g_i(Y_1,\ldots,Y_m,h_1,\ldots,h_n) = 0$ " [2, Teo,. 10.8, pág. 84].

Aplicando este resultado a $g_i := Y_i - f_i$ y con $n = m$ obtenemos la existencia de únicos $h_i \in k[[Y_1,\ldots,Y_n]]$ tales que :

$$h_i(0) = 0,\ Y_i = f_i(h_1,\ldots,h_n) \qquad (**)$$

Definiendo $H : k[[X_1,\ldots,X_n]] \longrightarrow k[[Y_1,\ldots,Y_n]]$ mediante $X_i \mapsto h_1$, $(**)$ implica $H \circ F^{\#} = Id|_{k[[Y_1,\ldots,Y_n]]}$ y que $\det(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(0)\det(\frac{\partial h_i}{\partial X_j}(0))=1$.

Además, cambiando en $(*)$ los f_i por los h_i y aplicando nuevamente el T.F.I.F. sigue que $H = F^{\#})^{-1}$ y queda completamente determinada por

$$h_i \in k[[Y_1,\ldots,Y_n]],\ X_i = h_i(f_1,\ldots,f_n).$$

H es llamada la "Inversa Formal de F" y es estudiada por ejemplo en [6,III] y en [10].

La discusión precedente sirve para probar parte de la :

Proposicion 1.1 Si $F = (f_1,\dots,f_n)\ k^n \longrightarrow k^n$ es polinómica, $j(F) \in K^*$ entonces:

(a) Si $F(0) = 0 \Rightarrow (F \in \mathrm{Aut}(k^n) \Leftrightarrow$ cada coordenada h_i de su inversa formal H es un polinomio).

(b) $F \in \mathrm{Aut}(k^n) \Leftrightarrow k[F] := k[f_1,\dots,f_n] = k^{[n]}$.

(c) $F^{\#}$es inyectivo. En particular los f_i son k-algebraicamente independientes y F es dominante, i.e, $\overline{F(k^n)} = k^n$ donde —— indica clausura en la topología de Zariski sobre k^n. (Al respecto de tal Topología ver [11, Cap.6 §1]).

(d) El grado de F es finito, i.e, la extensión de los campos cocientes de $k[F]$ y $k^{[n]}$ respectivamente: $k(F) \subseteq k^{(n)}$ es finita.

(e) F es una aplicación abierta respecto de la topología de Zariski.

(f) Si k es algebraicamente cerrado, $k(F) \cap k^{[n]} = k[F]$. (La hipótesis sobre k es dispensable).

Prueba. Para (a) y (c) s.p.g. asumiremos que

$F(0) = 0$.

(a) Las hipótesis sobre F permiten aplicar la discusión precedente respecto de H . Sigue de 1,2.

(b) Debido a 1.2

(c) La inyectividad sigue de la del extendido de $F^{\#}$. Luego la segunda afirmación es clara y la tercera sigue de [25, inicio de la pág. 27].

(d) De (c) el grado de trascendencia de $k(F)$ es n y como n también lo es de $k^{[n]}$ sigue.

(e) Sea $x \in k^n$, $y := F(x)$. Por la tercera afirmación de (c), el anillo local de y : $\mathfrak{D}_y$ se considera como subanillo dominado por el de x : $\mathfrak{D}_x$. ($\mathfrak{D}_y = \{p/g \in k^{(n)}\colon q(y) \neq 0\}$; análogamente para x). Como k^n es no singular, cada anillo local será regular: [12, Teo.5.1 Ch.1]. Sean $\mathfrak{M}_x$ y $\mathfrak{M}_y$ sus ideales maximales. Las complexiones $\underline{N}_x$ y $\underline{N}_y$ respecto de las topologias $\mathfrak{M}_x$ - ádica y $\mathfrak{M}_y$ - ádica respectívamente son también anillos locales con ideales maximales $\underline{n}_x$ y $\underline{n}_y$ respectivamente. Más aún, tales anillos locales serán regulares y por el Teorema de Estructura de Cohen: $\underline{N}_x \cong \underline{N}_y \cong k[[X_1,\dots,X_n]]$. (Para las últimas 5 líneas ver [5, Cap.10 y 11] y [36, Vol.II, Cor., pág.307]). Luego $\underline{n}_y \, \underline{N}_x = \underline{n}_x$.

Sea $\beta : \mathfrak{M}_x \longrightarrow \mathfrak{D}_x/\mathfrak{M}_y\mathfrak{D}_x$ y extendámosla a $\alpha : \underline{n}_x \longrightarrow \underline{N}_x \,/\, \underline{n}_y \, \underline{N}_x$. Por lo tanto $\alpha = 0$ y como $\alpha|\mathfrak{M}_x = \beta$ sigue que $\beta=0$. Así $\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_y\mathfrak{D}_x$ probando que $\mathfrak{D}_x \cong \mathfrak{D}_y$. El resultado sigue de [12, Chap. 1, Ejercicio 4.7] o [29, Cap. II, lema 2.2].

(f) Sea $q(F)/p(F) := q(f_1,...,f_n)/\, p(f_1,...,f_n) \in k(F) \cap k^{[n]}$ tal que $q(F)$ y $p(F)$ no tienen factores comunes en $k[F]$. Luego entre sus ceros se tiene : $V(p(F)) \subseteq V(q(F))$. De [11, pág.20 : Teo. de los Ceros de Hilbert] sigue que $p(F)|q(F)$ con lo que $p(F) \in k$. ■

Observación. De la prop. 1.1c , se tiene que $j(F) \in k^* \Rightarrow f_i$ algebraicamente independientes sobre k. El siguiente ejemplo debido a Gustafson $f_1 = X_1X_2$, $f_2 = X_2$, muestra que $\Leftarrow$ de 1.1c es falso. Más aún, se prueba que la extensión de anillos $k[F] \subseteq k[X_1,X_2]$ no es entera [31,Ej.58].

1.4 A continuación analizamos el problema bajo una extensión de escalares. Presentamos un resumen de [6, remark (1.1) 3 y 4].

Lema 1.2 Sea $F(x) = (f_1(x),...,f(x)_n))$ polinómica con $JF(0) \in GL_n(k)$ y $k \subseteq K$ extensión de campos. Entonces :

$$F \in Aut(k^n) \Leftrightarrow Aut(K^n).$$

Prueba. S.p.g., supongamos $F(0) = 0$. Por 1.3, $F^{\#}$ tiene inversa formal H con coordenadas $h_i \in k[[X_1,\ldots,X_n]]$. Como $h \in k^{[n]} \Leftrightarrow h_1 \in k^{[n]}$, la proposición 1.1a termina la prueba. ∎

Denotemos por $CJ(k)$ la proposición respecto de la Conjetura del Jacobiano sobre k .

Proposición 1.2 ("Principio de Lefschetz"). Sea k un dominio de característica diferente de cero, entonces : $CJ(C) \Rightarrow CJ(k)$.

Prueba. Sea F polinómica sobre k tal que $j(F) \in k^*$. Nuevamente s.p.g. podemos suponer que $F(0) = 0$. Además, supondremos $JF(0) = I$ i.e la matriz identidad de $GL_n(k)$. ($j(F) \in k^* \Rightarrow JF(0) \in GL_n(k)$. Luego, tomar $G^{-1} \circ F$ si es necesario siendo G^{-1} la polinómica obtenida de la inversa de $JF(0)$).

Sea k_o := Z[coeficiente de las coordenadas de F] - el anillo generado por - entonces k_o puede ser visto como subanillo de C. Por la definición de k_o , podemos ver a F como polinómica sobre C y $J(F) \in M_n(C^{[n]})$. Por el lema 1.1b sigue que $j(F) = 1$. Por lo tanto $F \in Aut(C^n)$. La proposición sigue el lema 1.2. ∎

Observación. La proposición 1.2 permite restringir el problema a C con todas las ventajas que

esto significa. En verdad se puede probar que la proposición es válida para un anillo conmutativo en el que sus Z - elementos de torsión sean nilpotentes [6, remark 1.1 (8)].
¿ Será que la recíproca es cierto ? e.g. ¿ CJ(R) $\Rightarrow$ CJ(C) ?. Al respecto no sabemos.

1.5 El siguiente Teorema, resume varios de los resultados parciales :

Teorema 1.2 [6, Teo. 2.1]. Sea k un campo , $F(x) = (f_1(x),\ldots,f_n(x))$ con $x \in k^n$ polinómica con $j(F)$ respecto de los $f_i \in k^*$ - ver 1.0 respecto de la notación- y considere las siguientes proposiciones :

(a) F es inversible, i.e , $k[F] = k^{[n]}$. (ver la prop. 1.1b).

(b) F es birracional, i.e , $k(F) = k^{(n)}$.

(c) F es inyectiva.

(d) La Clausura Entera de $k[F]$ en $k^{[n]}$ es no ramificada sobre $k[F]$. (Para la definición de no ramificación ver [34, §1]).

(e) F es una aplicación finita, i.e , $k^{[n]}$ es un $k[F]$ - módulo finitamente generado.

(e') F es propia. (Para la definición de propia ver [12, pág. 100]).

(f) $k^{[n]}$ es un $k[F]$ - módulo proyectivo.
(g) $k^{(n)}$ es una extensión Galosiana de $k(F)$.

Si la característica de $k = 0$, todas las condiciones son equivalentes. En general se tiene:

$$\begin{array}{ccccccc} (g) & \Leftarrow & (a) & \Leftrightarrow & (b) & \Leftrightarrow & (c) \\ & & \Downarrow & & & & \\ (d) & \Leftarrow & (e) & \Leftrightarrow & (e') & \Leftrightarrow & (f) \end{array}$$

excepto que k debe ser infinito par (c) $\Rightarrow$ (b). A seguir algunos comentarios respecto de la prueba.

Notar que (a) $\Rightarrow$ (b) es trivial. Para simplificar consideremos k algebraicamente cerrado.

(b) $\Rightarrow$ (c) : Pro la prop. 1f. $k^{[n]} = k[F]$. De [25, Teo.4, pág.48] sique que F es sobreyectiva y por [25, Teo. 6, pág. 116] $\forall\ x \in k^n\ 1 \leq \#(f^{-1}(x)) \leq [k^{(n)}:k(F)] = 1$.

(c) $\Rightarrow$ (b) : Sea k de característica cero. Consideremos $\overline{k[F]}$ la clausura entera de $k[F]$ respecto de $k^{[n]}$. Por [36, Vol. 1, Ch V, Teo. 9, pág. 267] tal clausra es una k-álgebra afín y F puede realizarse como composición de dos polinómicas, siendo una de ellas la correspondiente a la clau sura ([25, inicio de la pág. 27]) y la otra a la inclusión.Aplicando [25,Teo,.7,pág.117] sigue. ■

Observación. Sigue del Teorema que la Conjetura

es equivalente a $j(F) \in k^* \Rightarrow$ inyectiva.
Luego, ¿ F inyectiva $\Rightarrow j(F) \in k^*$?.
Si la característica de k es $p > 0$, $x \mapsto x^p$ es un contraejemplo. Si k no es algebraicamente cerrado, e.g. $k = \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ es otro contraejemplo.
Más, si k es algebraicamente cerrado de característica cero, la respuesta es afirmativa : "Por el Principio de Lefschetz es suficiente probarlo para $k = \mathbb{C}$. Por [20, Teo. 3.13] sigue que la dimensión (de Krull) de $\overline{F(k^n)} = n$. Luego de [25, Teo. 1, pág. 54] F es dominante. De [20, Prop. 3.17, pág. 46] sigue que F es birracional. Finalmente el Teorema Principal de Zariski [20, Teo. 3.20, pág. 48] termina la demostración".

Se invita al lector a procurar una prueba más elemental de lo anterior.

1.6 El siguiente Teorema debido a Wang, encierra el problema para cuadráticas :

Teorema 1.1 [31, 5.7]. Sea k un campo de característica $\neq 2$ y F satisfaciendo la hipótesis de la Conjetura. Si las funciones coordenadas de F son de grado total ≤ 2, entonces $F \in \mathrm{Aut}(k^n)$.

Prueba. Reproducimos una prueba más simple que la original debido a Oda.

Por el Teorema 1.2c es suficiente probar que F es inyectiva. Supongamos que no, i.e, $\exists\ a,b \in k^n$ diferentes tales que $F(a) = F(b)$. Si $c := a - b$ y $G(x) := F(x + a) - F(a)$ se tiene $G(0) = 0 = G(c) = 0$ y G aún es cuadrática. Escribiendo sus funciones coordenadas con parte lineal cuadrática por separado y usando la regla de las cadenas se obtiene :

$J(G)(1/2\ c).c = 0$ contradiciendo $j(F) \in k^*$. ■

Para otra prueba del Teo. 1.3 ver [16] y [3,Cor. 3.1].

1.7 En contraste a lo expuesto en 1.6, existe un Teorema de "reducción" en el sentido de que es suficiente trabajar con funciones coordenadas de grado ≤ 3 . El costo a pagar por lo anterior es tener que introducir nuevas variables. Al respecto ver [6, II].

2. Resultados para n=2

Para este caso, se sabe que la Conjetura del Jacobiano es equivalente a si $F = (f_1,f_2)$ satisface la hipótesis de la Conjetura, entonces el grado total de f_1 divide al de f_2 o viceversa [1, (19.4)]. También Moh en [19] prueba la Conjetura en dos variables, siempre que el grado

total de cada función coordenada sea menor o igual que 100.
Nakai y Baba en [23] generalizan un resultado de Magnus [17] probando la Conjetura cuando uno de los grados de las funciones coordenadas es primo o 4, o si uno de ellos es igual a 2p y mayor o igual que el otro donde p es un primo impar.
Nagata en [22, Teo. 3.1] completó un resultado debido a Appelgate y Onishi [4] el cual dice que la Conjetura es cierta si una de las funciones coordenadas tiene grado total igual al producto de dos primos o si el máximo común divisor de los grados totales de tales funciones es primo.
Otro avance para el problema - usando técnicas totalmente diferentes a los de la bibliografía anterior - fué dado por Wright en [33]. El estudia el grupo $GL_2(k[X,Y])$ y prueba la conjetura siempre que J(F) sea un producto de ciertas matrices. Ver también la referencia [21].

3. Problemas Asociados

3.1 Utilizando Ecuaciones Diferenciales.

En esta sección $k = \mathbb{R}$. Sea $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ polinómica. En [18] Meisters y Olech formulan el siguiente problema :
(PE) Supongamos que $j(F) \in \mathbb{R}^*$ y considere el siguiente problema de valor inicial :

$$\begin{cases} x' = j(F)(x)^{-1}v \\ x(0) = x_o \end{cases}$$

donde v, $x_o \in \mathbb{R}^n$. ¿Para cada $v \in \mathbb{R}^n$, la solución $\varphi(t,x_o,v)$ del problema anterior es polinómica en x_o y v ?
Se demuestra que : CJ($\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$ PE . [18, Teo.1].

El análogo para la Conjetura mencionada en 1.1.1 es el PE anterior salvo que la tesis para φ es ser completa , i.e , definida para todo $t \in \mathbb{R}$. También se demuestra que ambas conjeturas son equivalentes [18, Teo.1'] y se tienen teoremas análogos para k = c .
En este contexto consúltese [7] y las referencias en la exposición elemental [24].

3.2 Usando Operadores Lineales Diferenciales.

La proposición 1.2, reduce a investigar la veracidad de la Conjetura para C . Luego, la natural generalización de la Conjetura del Jacobiano al anillo de las funciones enteras en dos variables sería :

"Sean P y Q funciones enteras en dos variables satisfaciendo la identidad Jacobiana :

$$j(P,Q) = \frac{\partial P \partial Q}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial P \partial Q}{\partial Y \partial X} = 1$$

entonces cada función entera en X e Y es también entera en P y Q ".

Sin embargo, esta conjetura es falsa, e.g., $P = e^{x}$, $Q = e^{-x}Y$. En este ejemplo, $j(P,Q) = 1$, la fibra de (x,y) es $\{(x + 2\pi zi, y)\ z \in Z\}$ y la imagen de $F = (P,Q)$ excluye el eje $X = 0$. Existe un ejemplo de Fatou y Bieberbach [8, Cap. III , §1] de un tal F tal que sus funciones coordenadas son enteras, $j(F) = 1$, F es inyectiva y el complemento de $F(C^{2})$ en C^{2} contiene un abierto no vacío. Este hecho es un obstáculo para intentar solucionar el problema utilizando métodos analíticos.

En [26] Y. Stein formula una Conjetura la cual implica la Conjetura del Jacobiano para polinomios, no es cierta para funciones enteras y es verdad para $P = e^{x}$, $Q - Ye^{Y}$. El la llama La Conjetura del Jacobiano Analítica (CJA). A continuación la formulación. Sea E_2 el anillo de las Funciones Enteras sobre C^{2} considerado con la Topología usual que lo convierte en un Espacio de Frechet.

Para $P \in E_2$, $D_p : E_2 \longrightarrow E_2$ denotará el operador diferencial definido por :

$$D_p(f) = \frac{\partial P}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial Y} - \frac{\partial P}{\partial Y}\frac{\partial f}{\partial X} .$$

Luego, la CJA es : "Sean P y $Q \in E_2$ tales que $D_p(Q) = 1$. Entonces $D_p(E_2)$ es denso en E_2".

Se prueba que esta Conjetura implica la Conjetura del Jacobiano, siempre que P y Q sean polinomios [26, Teo. 3.3] . Más aún en [27] el mismo Stein prueba un resultado más fuerte : "Si P es un polinomio y $D_p(E_2)$ es denso en E_2 , entonces $P = \varphi(X)$ donde φ es un automorfismo de C[X,Y]".

3.3 Un Problema Combinatorio Asociado.

El estudio de la inversa formal $H = (h_1,\dots,h_n)$ asociada a una aplicación polinomial $F:k^n \longrightarrow k^n$ con $j(F) \in k^*$ (ver 1.1.3), un Teorema de Reducción [6, II] y las fórmulas de Abhyankar y Joni [6, III,2] para los h_i , permite introducir una expansión combinatoria (asociada a un grafo con d vértices) para la componente homogénea $h_i^{(d)}$ de h_i . Lo que se espera es que tales componentes sean nulas para $d >> 0$ (Prop. 1.1a).

También, usando las mismas fórmulas mencionadas - a las cuales se les aplica un método que corresponde esencialmente a lo establecido por Joyal en [13] - D. Zeilberger en [35] presenta una aproximación combinatoria diferente a la anterior.

Por otro lado, A. van den Essen en [30], utilizando resultados de la Teoría de Bases de Gröbner para ideales de polinomios (para la terminología ver [9]) obtiene un algorítmo, el cual decide si una aplicación polinómica tiene inversa y la obtiene en el caso de ésta existir.

3.4 Finalizamos este artículo resumiendo parte de un artículo de G. Angermüller [3] en el que se presenta una perspectiva de solución al problema.

Toda la terminología topológica será respecto de la topología de Zariski sobre k^n. (Al respecto de tal topología ver [11, Cap. 6, §2]).

Sean $F : k^n \longrightarrow k^n$ polinómica, $\Delta F := \{(x,y) \in k^{2n} : F(x) = F(y)\} \subseteq k^n \times k^n$ y Δk^n la diagonal de k^{2n}. Con esta terminología :

Lema 3.1 Si $j(F) \in k^* \Rightarrow \Delta k^n$ es una componente conexa de ΔF .

Prueba. Δk^n es un subconjunto cerrado de k^{2n}, pues, está definido por ecuaciones del tipo : $X_i - X_j$.

En la prueba de la prop. 1.1.e. se tiene que si $x \in k^n$, $y = F(x) \Rightarrow \mathcal{D}_x \cong \mathcal{D}_y$. Por lo tanto, sigue que existen abiertos $U \ni x$ y $V \ni y$ tal que $F : U \longrightarrow V$ es un homeomorfismo. Considerando la aplicación $T: k^n \longrightarrow k^n$, $z \rightarrowtail z + x - y$ se tiene que :

$$U \times T(V) \cap \Delta F \subseteq \Delta k^n .$$

Como T es abierta sigue el resultado. ■

Lo que Angermüller estudia es bajo que condiciones ΔF es conexo, pues de serlo, por el lema se tendrá que $\Delta F = \Delta k^n$. Luego F será inyectiva y por el Teorema 1.2c $F \in Aut(k^n)$. Entre otros resultados él demuestra un análogo al Teorema 1.3 :

Teorema. [3, Teo. 2] Si la característica de k es $\neq 2$ y si el grado de las funciones coordenadas de F es a lo más 2, entonces ΔF es conexo. ∎

Luego, este Teorema + el Lema 3.1 implican el Teorema 1.3 . Más aún, el resultado de Angermüller se cumple para polinómicas, entre espacios afines de diferente dimensión y como escolio se deduce que también es válido para $k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ en la Topología Euclidiana.

Después de presentar dos ejemplos [3,§3] que justifican la necesidad de la hipótesis, Angermüller formula la siguiente conjetura:

CA : "Sea $F : k^m \longrightarrow k^n$ una aplicación polinómica dominante, i.e $\overline{F(k^m)} = k^n$ y $n \leq m$. Entonces ΔF es conexo".

Lema 3.2 Si $n = m \Rightarrow (CA \Rightarrow CJ(k))$.

Prueba. Si $j(F) \in k^* \Rightarrow$ por la prop. 1.1c F es dominante. El resultado sigue del lema anterior. ∎

¿Vale $\Leftarrow$ en el lema 3.2 ?. Dejamos esta pregunta como ejercicio para el lector.

Al igual que el Teorema de Reducción, del cual se habló en 1.7,para esta Conjetura también se tiene un resultado análogo : [3, §4 Prop.] y al observar la prueba de tal proposición, se tiene una prueba del Teorema de Reducción para la Conjetura del Jacobiano.

REFERENCIAS.

[1] *Abhyankar S.*, **Lectures on Expansion Techniques in Algebraic Geometry , Tata Institute of Fundamental Research, Bombay,India,1977.**

[2] ------------ , **Local Analytic Geometry,Academic Press, N.Y. - London, 1964.**

[3] *Angermüller G.*, **Connectedness Properties of Polynomial Maps between Affine Spaces, Man. Math. 54, (1986), 349 - 359.**

[4] *Appelgate H. and Onishi H.*, **The Jacobian Conjeture in two variables, J. Pure Appl. Algebra 37, (1985), 215 - 227.**

[5] *Atiyah M. y Mac Donald I.*, **Introducción al Algebra Conmutativa Reverte, 1978.**

[6] *Bass H., Connell E. and Wright D.*, **The Jacobian Conjeture : Reduction of degre and formal expansion of the inverse, Bull.Amer. Math. Soc. 7, (1982), 287 - 330.**

[7] *Bass H. and Meisters G.* , **Polinomial Flows in the Plane, Adv. in Math. 55, (1985), 173 - 208.**

[8] *Bochners S. and Martin W.*, **Several Complex Variables, Princenton Univ. Press., Princeton, N.J., 1948.**

[9] *Buchberger B.* , **Gröbner - Bases : An Algo-**

rithmic Method in Polynomial Ideal Theory. Ch. 6 in : Multidimensional Systems Theory, Edited by N.K. Bose, D. Reidel Publishing Company, (1985), 185 - 323.

[10] *Druzkowski L. and Rusek K.* , The formal inverse and the Jacobian Conjeture, Ann. Polon. Math. 46, (1985), 85 - 90.

[11] *Fulton W.* , Curvas Algebraicas, Reverte, 1971.

[12] *Hartshorne R.*, Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics , Springer - Verlang, Heidelberg, 1977.

[13] *Joyal A.* , Une Théorie Combinatoire des séries formelles, Adv. in Math. 42,1,(1981) 1 - 81.

[14] *Keller O.*, Ganze Cremona-Transformationen, Monatshefte für Mathematik und Physik 47, (1939), 299 - 306.

[15] *Lang S.* , Algebra, Aguilar, 1977.

[16] *Letizia M.* , A Simple Solution of the Jacobian Problem in the Quadratic Case, J. of Algebra 81, (1983), 70 - 71.

[17] *Magnus A.* , On polynomial solutions of a Differential equation,Math. Scand. 3,(1955) 255 - 260.

[18] *Meisters G. and Olech C.* , A poly - flow

formulation of the Jacobian Conjeture,Bull. Polish Acd. Sci. Math. 35, (1987), 725-731.

[19] *Moh T.* , On the global Jacobian Conjeture and the Configuration of roots, J. Reine Angew. Math. 340, (1983), 140 - 212.

[20] *Mumford D.* , Algebraic Geometry I. Complex Projective Varieties Grundlehren 221,Springer - Verlag, Heidelberg, 1976.

[21] *Nagata M.*, On automorphism group of k[X,Y] Lectures in Mathematics, Dept. of Math., Kyoto Univ., Kinokuniya Bookstore Co., Ltd. Tokyo, 1972.

[22] -------------- , Two - dimensional Jacobian Conjeture,Proc. of KIT Mathematics Workshop 1988, 77 - 98.

[23] *Nakai Y. and Baba K.* , A generalization of Magnus' Theorem, Osaka J. Math. 14, (1977), 403 - 409.

[24] *Pereira O.* , As Conjecturas do Jacobiano de Keller e da Estabilidade Assintótica Global, Informes de Matemática,Serie E 50,IMPA,1990

[25] *Shafarevich I.R.*, Basic Algebraic Geometry, Grundlehren 213, Springer - Verlag , Heidelberg, 1974.

[26] *Stein Y.*, On Linear Differential Operators related to the Jacobian Conjeture, J. of Pure and Appl. Algebra 57, (1989), 175-186.

[27] ------------- , On the Density of Image of Differential Operators Generated by Polynomials, J. Analyse Math. 52, (1989), 291 - 300.

[28] *Torres F.*, Monografía para obtener el grado de Bachillerato en Matemática, Pont. Univ. Católica del Perú, Lima 1985.

[29] *Torres F.*, Monografía para obtener el grado de Magister en Matemática, Pont. Univ. Católica del Perú, Lima 1988.

[30] *Van den Essen A.* , A Criterion to Decide if a Polynomial Map is Invertible and to Compute the Inversa, Comm. in Algebra 18, (1990), 3183 - 3186.

[31] *Wang S.* , A Jacobian Criterion for Separability, J. of Algebra 65,(1980), 453 - 494.

[32] *Wei L.* , On a Problem about Face Polynomials, J. Of Pure Appl. Algebra 60, (1989), 269 - 272.

[33] *Wright D.* , The Amalgamated Free Product Structure of $GL_2(k[X_1,\dots,X_n])$ and the Weak Jacobian Theorem for two variables J. of Pure Appl. Algebra 12, (1978), 235-251.

[34] ----------- , On the Jacobian Conjeture, Illinois J. of Math. 25,3, (1981), 423-440.

[35] *Zeilberger D.* , Toward a Combinatorial Proof of the Jacobian Conjeture?, Combina-

toire énumérative, 370-380, Lectures Notes in Mathematics 1234, Springer-Verlag, 1986.

[36] *Zariski O. and Samuel P.* , Conmutative Algebra, Van Nostrand Princenton,Vol I: 1959, Vol II: 1960.