Pro Mathematica: Vol. V, Nos. 9 - 10, 1991

MOVIMIENTO BROWNIANO Y CALCULO ESTOCASTICO

Arturo KOHATSU HIGA*

1. Movimiento Browniano.

Robert Brown, un botánico del siglo XIX , fue el primero en notar el movimiento aleatorio permanente de una partícula en otros medios. El experimento consistía en dejar una partícula de polen dentro de un vaso lleno de agua y anotar la posición de la partícula. Antes del experimento se esperaba que la partícula de polen dejara de moverse luego de un período de tiempo, lo cual no ocurrió. La partícula se movía erráticamente de un lugar a otro. Brown describió este comportamiento,pero fue incapaz de dar una explicación del porqué de este movimiento errático.

* Ex-alumno PUCP. Estudiante de doctorado en Purdue University.

Durante los años subsiguientes, diferentes teorías intentaron explicar este fenómeno, algunos empezaron a creer que las partículas tenían voluntad propia. Hasta que Einstein dió una explicación termodinámica al fenómeno que empezó a llamarse movimiento browniano.

La razón del movimiento errático,era el choque constante de partículas en contra de la partícula de polen. Años después N. Wiener demostró la existencia del modelo matemático que describe al movimiento browniano (a veces se suele usar el nombre de proceso de Wiener para referirse al movimiento browniano).

Definición.

Un movimiento browniano es un conjunto Ω , previsto de una medida probabilística P , y una familia de variables aleatorios (o funciones medibles) $B_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, para $t \in \mathbb{R}_+$; tal que :

1) $P(B_t \in A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ t} e^{-(x^2/2t)}dx$

$$(\text{i.e. } B_t \sim N(0,t))$$

2) $B_t(\omega)$ es contínuo en t, casi seguramente en ω .

3) $B_t - B_s$ es probabilísticamente independiente de B_s , (en general, para $0 \leq t_1 < t_2 < t_3$,

$B_{t_3} - B_{t_2}$ es independiente de $B_{t_2} - B_{t_1}$).

La existencia del movimiento browniano no es obvia desde el punto de vista matemático. Norbert Wiener probó la existencia del movimiento browniano. Hoy en día,existen muchas pruebas de este hecho, uno de los métodos usuales en el uso de caminos aleatorios y luego, usar un proceso límite.

Luego de la prueba de la existencia del modelo, había que explorar sus propiedades para saber si efectivamente era un modelo plausible del problema original. Hoy en día se publican muchos artículos explorando intrincadas propiedades en este proceso. Entre las más importantes tenemos :

1) B_t es de variación infinita (lo cual implica que es no diferenciable)

2) B_t es recurrente (i.e. visita todos los números reales una infinidad de veces).

3) $\overline{\lim_{t\to+\infty}} B_t = +\infty$, $\underline{\lim_{t\to+\infty}} B_t = -\infty$

4) Sea X una variable aleatoria, con varianza finita,entonces existe T un tiempo aleatorio tal que $X = B_T$, (ésta última igualdad es en distribución).

5) En $(B_t/B_u, u \leq s) = B_s$. (E(.,.) denota la es-

peranza condicional). Esta propiedad caracteriza a las martingalas (ver [1]).

6) Si X_t y $X_t^2 - t$ son martingalas contínuas, entonces X_t es un movimiento browniano.

Notas.

a) Para lograr un movimiento browniano en tres dimensiones, solo hay que usar 3 copias independientes de este proceso y formar el espacio producto.

b) El movimiento browniano también es un buen modelo para errores estadísticos, debido a su errática.

2. Cálculo Estocástico.

Desde los años 50, el interés en desarrollar un cálculo diferencial para el movimiento browniano crece, debido a la gran cantidad de aplicaciones que ésta podía mostrar. Esta fué una de las razones que motivó a K.Ito, Stratonovich, Fisk entre otros a la búsqueda de tal posibilidad.

Desde que B_t era no diferenciable, no existía la posibilidad de considerar dB_t en una ecuación diferencial. La intención era de darle sentido a una ecuación del tipo

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dB_t,$$

donde el término principal $a(X_t)dt$ es la ley dictaminada por una ecuación diferencial determinística y el término $b(X_t)dB_t$ es el error acumulado por diferentes fuentes, el cual se considera estadístico por naturaleza.

El problema se reducía a dar significado a la siguiente integral:

$$\int_o^t b(X_s)dB_s \ .$$

Esto es logrado por K. Ito, definiendo esta integral a partir de funciones simples, i.e.

Supongamos que $b(X_s) = \Sigma_{i=1}^n f_i 1_{[t_i, t_{i+1}[}(s)$, f_i es una función medible, que sólo depende del signo álgebra generado por B_s, $s \leq t_i$. En tal caso, definimos:

$$\int_o^t b(X_s)dB_s = \sum_{i=1}^n f_i \ (B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i \wedge t})$$

Entre sus propiedades, tenemos :

1) $E(\int_o^t b(X_s)dB_s) = E(\sum_{i=1}^n f_i(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t}))$

$$= \sum_{i=1}^n E(f_i E(B_{t_{i\wedge t}} - B_{t_{i+1}\wedge t}/B_s, s \leq t_i \wedge t))$$

$$= 0.$$

2) $E((\int_o^t b(X_s)dB_s)^2) = E(\sum_{i=1}^n f_i^2 (B_{t_{i+1}}\wedge t - B_{t_i}\wedge t)^2$

$$+\sum_{i\neq j} f_i f_j (B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t})(B_{t_{j+1}\wedge t}-B_{t_j\wedge t}))$$

como

$$E(f_i f_j (B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t})(B_{t_{j+1}\wedge t}-B_{t_j\wedge t})) =$$

$$= \begin{cases} E(f_i^2(t_{i+1}\wedge t - t_i\wedge - t)) \\ \quad \text{si} \quad i = j \\ \quad \text{o si} \quad i \neq j . \end{cases}$$

entonces

$$E((\int_o^t b(X_s)dB_s)^2) = E\int_o^t b^2(X_s)ds$$

lo cual implica que si $\int_o^t b_n(X_s)dB_s$ son integra- les de funciones simples b_n, que tienden a b, entonces $\int_o^t b_n(X_s)dB_s$ es una sucesión de Cauchy en $L(\Omega,P)$, por lo tanto existe un límite que llamaremos $\int_o^t b(X_s)dB_s$.

3. Fórmula de Ito.

En el párrafo anterior hemos definido la integral estocástica, sin embargo, no hemos mostrado alguna fórmula que nos permita calcular integrales al igual que el cálculo clásico. La fórmula de Ito nos permitirá calcular con esta nueva integral. La idea de esta fórmula viene dada por el teorema de Taylor.

Sea $f(x)$, suficientemente diferenciable. Intentaremos hallar una fórmula para $f(B_t)$.
Por el teorema de Taylor

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x-x_o) + f''(x_o)\frac{(x-x_o)^2}{2!} + \frac{f'''(x^*)(x-x_o)^3}{3!}$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{n} f(B_{t_{i+1}}) - f(B_{t_i}) = \sum_{i=1}^{n} f'(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + f''(B_{t_i})\frac{(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2}{2!} + f'''(B^*_{t_i})\frac{(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^3}{3!}$$

donde $t_n = t$. Entonces

$$f(B_t) - f(B_o) = \sum_{i=1}^{n} f'(B_{t_i})(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}) + \ldots$$

tomando $n \longrightarrow +\infty$ obtenemos

$$f(B_t) - f(B_o) = \int_o^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_o^t f''(B_s)ds$$

pues

$$\sum_{i=1}^{n} f''(B_{t_i})\frac{(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_o^t f''(B_s)ds$$

y $$\sum_{i=1}^{n} f'''(B_{t_i})\frac{(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^3}{3!} \longrightarrow 0 .$$

Intuitivamente, se pueden entender estos dos últimos resultados si recordamos que

$$E(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2 = t_{i+1}-t_i \qquad \text{y}$$

$$E(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^3 = 0$$

4. Aplicación a Ecuaciones en Derivadas Parciales.

Supongamos el siguiente problema de Dirichlet :

$\Delta u = 0$ en D

$u(x) = f(x)$ en δD , donde D es un dominio de $\mathbb{R}^d$.

Intentaremos mostrar la interpretación probabilística de la solución a este problema. Primero, debemos extender la fórmula de Ito a d-dimensiones

$$u(B_t^1,\ldots,B_t^d) = u(B_o^1,\ldots,B_o^d) + \sum_{i=1}^{d}\int_o^t u_i(B_s^1,\ldots,B_s^d)dB_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\int_o^t u_{ii}(B_s^1,\ldots,B_s^d)ds \qquad (*)$$

donde $u_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ y $u_{ii} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

Supongamos que $(B_o^1,\ldots,B_o^d) = x_o \in D$, sea $T = \inf \{t/(B_t^1,\ldots,B_t^d) \notin D\}$ (este es la primera vez que el movimiento browniano d-dimensional toca la frontera de D).

Tomando esperanzas en (*) obtenemos:

$$E(u(B_T^1,\ldots,B_T^d)) = u(x_o) + \sum_{i=1}^{d} E\int_o^T u_i(B_s^1,\ldots,B_s^d)dB_s^i + \frac{1}{2}E\int_o^T \Delta u(B_s^1,\ldots,B_s^d)ds$$

como $\Delta u(x) = 0$ cuando $x \in D$, y

$$E\int_o^T u_i(B_s^1,\ldots,B_s^d)dB_s^i = 0$$

(ver fórmula 1 en sección 2)

entonces

$$u(x_o) = E_{x_o} f(B_T^1,\ldots,B_T^d), \text{ pues } u(x) = f(x) \text{ para } x \in \partial D.$$

Lo cual nos provee de una manera de obtener aproximaciones del problema de Dirichlet, mediante simulaciones y promedios. Este método puede ser generalizado en diversas direcciones, para EDP más generales e inclusive para EDP en variedades.

Hoy en día existen muchos libros que exponen estos temas desde distintos puntos de vista, entre ellos se encuentran:

1) *Oksendal, Bernt.* Stochastic differential eqúations. Springer-Verlag, 1985.

2) *Karatzas I y Shreve E.* Brownian motion and stochastie calculus. Springer-Verlag, 1988.

3) *Yor M. y Revus D.* Brownian motion and continuous martingales. Springer-Verlag, 1990.

4) *Ikeda N. y Watanabe S.* Stochastic differencial equations and diffusion processes. North-Holland, 1981.

Referencias.

[1] *Kohatsu–Higa A.* Cálculo estocástico y una aplicación a la Estadística. Pro Mathematica Vol II, No. 4, 1988.