Pro Mathematica: Vol. V, Nos. 9 - 10, 1991

ESCALAS DE MEDICION

Luis VALDIVIESO SERRANO*

El propósito de este artículo es dar una breve presentación de la teoría de medición, y en especial de la teoría de escalas de medición. Estas escalas, como son las conocidas escalas nominales, ordinales, de intervalo y de razón, son muy comunes en la práctica; así como también su mal uso. En tal sentido, abordaremos el problema de la validez de escalas y presentaremos algunas aplicaciones al respecto.

* Profesor contratado de la P.U.C.P.

En casi todas las ciencias del saber humano se encuentra presente el concepto de número. Un número, sin embargo, se encuentra generalmente asociado a una unidad de medida (metros,kilogragramos, grados centígrados, CI, etc). Una medida se define como una función que asigna números (u otro tipo de estimaciones) a propiedades de objetos empíricos, tal que preserven las relaciones entre estas propiedades. Por tanto, si trabajamos con los números sin tomar en cuenta las unidades de medida, significaría en pocas palabras,desentendernos de lo que es válidamente admisible para las propiedades que en realidad deseamos medir. Por ejemplo, tendríamos afirmaciones sin sentido tales como "José es 20% más inteligente que Juan, pues sus CI son de 120 y 100 respectivamente", "En estos 2 días hizo 13°c + 15°c = 28°c", "Cachito Ramírez (con camiseta 11) era mejor jugador que Maradona (con camiseta 10)" o "La autoestima promedio de los estudiantes en la U. es de 12.6".

El objetivo de este artículo es hacer una breve presentación de los fundamentos metodológicos de la teoría de escalas de medición. Este estudio permitirá además- de abstenernos a hacer inferencias como las anteriores, delimitar las relaciones númericas admisibles para una propiedad empírica determinada.

La medición es un modelo matemático, basado fundamentalmente en el concepto de sistema relacional. Un sistema relacional es un par denotado por $\mathbf{A} = < A \, ; \, (R_i)_{i \in I} >$, donde A es un conjunto y $(R_i)_{i \in I}$ es una familia de relaciones definidas entre elementos de A . Si A es el conjunto de los números reales, **A** se denomina numérico (s.r.n) mientras que si A consiste de objetos empíricos (cuyas propiedades deseamos medir) y las relaciones son determinadas empíricamente, **A** se denomina empírico (s.r.e).

Medir significa estimar una propiedad dentro de un sistema relacional dado. Por ejemplo, si A es un conjunto de objetos y P, la relación binaria definida por:

$$\forall \; a,b \in A, \quad a \; P \; b \iff a \text{ es más pesado que } b.$$

Medir, es en cierta forma, asignar a cada objeto de A, un número real mediante una función (medida) m tal que:

$$\forall \; a,b \in A, \quad a \; P \; b \iff m(a) > m(b) \qquad (1)$$

También queremos exigir más de nuestra medida,pues el hecho de que el peso combinado de dos objetos sea igual a la suma de sus pesos individuales, hace necesario definir formalmente una operación binaria en A :

$$o = \{(a,b,c) \in A^3 / c = a \text{ o } b, \text{ concatenación de los objetos a y b}\}.$$

Nuestra medida por ello debe también preservar esta relación (3 - relación en A). Dicho formalmente, m debe ser aditiva : $\forall\, a,b \in A$:

$$m(a \text{ o } b) = m(a) + m(b) \qquad (2)$$

A esta función real m , que satisface (1) y (2) se le llama un homomorfismo de **A** en **B**, donde en este caso particular los s.r son $\mathbf{A} = \langle A ; P, o\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle \mathbb{R} ; >, + \rangle$.

Definición.

Sean $\mathbf{A} = \langle A; (R_i)_{i\in I} \rangle$, $\mathbf{B} = \langle B; (S_i)_{i\in I} \rangle$ dos sistemas relacionales del mismo tipo.Una función $m : A \longmapsto B$ es un homomorfismo de **A** en **B** sii $\forall\, i \in I,\ a_{(k_i)} \in A^{k_i}$:

$$R_i(a_1, a_2, \ldots, a_{k_i}) = S_i(m(a_1), m(a_2), \ldots, m(a_{k_i})).$$

Hay que subrayar que el índice k_i se refiere al orden de la relación i; en otras palabras, R_i es un subconjunto de A^{k_i} . Cabe indicar además que las relaciones tanto empíricas como numéricas se presentan aquí en forma de su función característica.

Definición.

Una escala (k-dimensional) es un homomorfismo m de un s.r.e $\mathbf{A} = <A ; (R_i)_{i\in I}>$ irreducible en un s.r.n $\mathbf{B} = < \mathbb{R}^k ; (S_i)_{i\in I}>$.

En pocas palabras, el término irreducible, significa que **A** debe garantizar la inyectividad de m . Si **A** no es irreducible, no hay inconveniente pues es posible a partir de **A** , construir un sistema relacional cociente asociado a una relación de congruencia (relación que permite sustituir internamente en A objetos equivalentes en relación a la propiedad a medir). Este nuevo sistema resulta irreducible.

Dado que un homomorfismo $m:A \longmapsto \mathbb{R}^k$ no está determinado de manera única, existen en general toda una clase de homomorfismos que definen escalas de un s.r.e irreducible **A** en un s.r.n **B**, con $B = \mathbb{R}^k$. A esta clase de homomorfismos, lo denotaremos por M(**A**,**B**).

Definición.

Sea **A** un s.r y sea $A_o \subseteq A$. Denotaremos por $\Gamma_{\mathbf{A}}(A_o)$, al conjunto de todos los monomorfismos de $<A_o; (R_i)_{i\in I}>$ en **A** . Llamaremos a los elementos de $\Gamma_{\mathbf{A}}(A_o)$, endomorfismos parciales de **A** .

Con ayuda de esta definición, podemos enunciar el siguiente teorema que será fundamental en la clasificación de escalas.

Teorema.

Sea **A** un s.r irreducible, **B** un s.r del mismo tipo y sea $m_o \in M(\mathbf{A},\mathbf{B})$ entonces :

$$M(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \{\gamma \circ m_o \;/\; \gamma \in \Gamma_{\mathbf{B}}(m_o(A))\} .$$

Además todo elemento en **M** es un monomorfismo.

Si definimos la relación $\sim$ como:

$\forall\; m_1,\; m_2 \in \mathbf{M}(\mathbf{A},\mathbf{B})$:

$$m_1 \sim m_2 \Leftrightarrow \exists\; \gamma \in \Gamma_{\mathbf{B}}(m_2(A)) \;/\; m_1 = \gamma \circ m_2 .$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{m}_O = \{m \in \mathbf{M}(\mathbf{A},\mathbf{B}) \;/\; m \sim m_o\}$$

$$= \{\gamma \circ m_o \;/\; \gamma \in \Gamma_{\mathbf{B}}(m_o(A))\} .$$

Por tanto, el teorema afirma que $M(\mathbf{A},\mathbf{B})$ es una clase de equivalencia de escalas asociada a la relación de equivalencia $\sim$.

$\Gamma_{\mathbf{B}}(m_O(A))$, se denomina el conjunto de transformaciones admisibles de la escala $m_O \in \mathbf{M}(\mathbf{A},\mathbf{B})$ y como m_o es una escala arbitraria que la elegimos como representante de la clase **M** , es $\Gamma_{\mathbf{B}}(m_O(A))$ el que define la unicidad de la escala. De aquí, que una escala será definida en base al conjunto $\Gamma_{\mathbf{B}}(m_O(A))$.

Tipos de Escala.

El s.r.e más simple es $\mathbf{A} = \langle A; \cong \rangle$, donde $\cong$ es una relación de equivalencia. El correspondiente sistema relacional (cociente) irreducible de **A**, es $\tilde{\mathbf{A}} = \langle \tilde{A}; = \rangle$.

Un homomorfismo m de A en $\mathbb{R}^k$ existe sii card(A) = c , donde c es el continuo. Si tal escala m existe,ésta nos dará tan solo información de si dos elementos $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \in \tilde{A}$ son iguales o no, si los elementos $a_1, a_2 \in A$ son equivalentes o no.

Definición.

Una escala nominal es una función inyectiva de $\langle \tilde{A}; = \rangle$ en $\langle \mathbb{R}; = \rangle$.

Otra manera de representar una escala nominal será : una escala m es nominal sii su conjunto de transformaciones admisibles $\Gamma_{\mathbf{B}}(m(A))$ es el conjunto de todas las funciones inyectivas de m(A) en $\mathbb{R}$.

Ejemplo : Escalas nominales típicas son la codificación de respuestas a una pregunta de opinión en una encuesta, o la numeración de polos deportivos.

En casi todos los casos de relevancia práctica un s.r.e **A** contiene además de la relación de equivalencia, una relación de orden tal que su correspondiente s.r irreducible es un conjunto ordenado, denotado por $\mathbf{A} = < A;=,\ll >$.

Definición.

Una escala $m:A \longmapsto \mathbb{R}$ es una escala ordinal sii $\Gamma_{\mathbf{B}}(m(A))$ es el conjunto de todas las funciones monótonas crecientes y continuas de $m(A)$ en $\mathbb{R}$.

En otras palabras, una escala ordinal es una función monótona creciente y continua del s.r.e ordenado $\mathbf{A} = <A;=,\ll >$ en el s.r.n $\mathbf{B} = < \mathbb{R};=,< >$.

Dado que el s.r.e **A** está provisto de la relación de orden $\ll$, existe una topología de orden τ_A (topología intervalar) asociada a **A**. Por esta razón, si bien pudiera parecer suficiente definir una escala ordinal como una función monótona creciente para que el orden en $\mathbb{R}$ refleje el orden en A, la topología sobre $m(A)$ inducida por la topología de $\mathbb{R}$, no describe necesariamente la topología τ_A , a menos como se puede demostrar que, m sea continua.

La condición de continuidad hace de la existencia de una escala ordinal, una cuestión no tan trivial, pues se deben garantizar ciertas hipótesis para la existencia de una función, que sea monótona y continua. Algunas hipótesis equivalentes para ello son : que A sea enumerable, que el espacio topológico (A,τ_A) sea segundo enumerable ó que (A,τ_A) sea separable.

Ejemplo : Escalas ordinales típicas son los grado de autopercepción y ansiedad de una persona o la función de utilidad (preferencia).

Los tipos más importantes de escala son las que son únicas bajo ciertas transformaciones lineales de $\mathbb{R}$.

Definición.

1. Una escala m es intervalar sii :

$$\begin{aligned}\Gamma_B(m(A)) &= \{\gamma : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \ / \ \gamma(x) = \alpha x + \beta, \\ &\qquad \forall\ x \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}^+ \wedge \beta \in \mathbb{R}\} \\ &\equiv \{\gamma_{\alpha,\beta} \ / \ \alpha \in \mathbb{R} \ , \quad \beta \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

2. Una escala m es de radio sii

$$\begin{aligned}\Gamma_B(m(A)) &= \{\gamma : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \ / \ \gamma(x) = \alpha x \ , \\ &\qquad \forall\ x \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}^+\} \\ &\equiv \{\gamma_{\alpha,o} \ / \ \alpha \in \mathbb{R}^+\}.\end{aligned}$$

3. Una escala m es de diferencias sii

$$\begin{aligned}\Gamma_B(m(A)) &= \{\gamma : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \ / \ \gamma(x) = x + \beta \ , \\ &\qquad \forall\ x \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\} \\ &\equiv \{\gamma_{1,\beta} \ / \ \beta \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

El problema de existencia de escalas intervalares, dependerá en gran medida de como se defina el s.r.e **A**. Por ejemplo,si **A** se define como $\langle A;=,\ll,o\rangle$, siendo "o" una operación binaria en A (en el caso del peso esta corresponde a la concatenación de 2 objetos), hay que garantizar la conexidad de A con al menos dos elementos y que "o" sea una operación bisimétrica , contínua en ambas variables y cancelable.

Ejemplo: Escalas intervalares típicas son la temperatura (en grados Fahrenheit y centígrados) y el tiempo del calendario; mientras que algunas escalas de radio son la masa,el tiempo en intervalos y la temperatura en grados Kelvin.

Cabe destacar que los tipos de escala que hemos definido van desde las más "débiles" a las más "fuertes" en el sentido de que las escalas nominales, ordinales, intervalares y de radio,en este orden, contienen cada vez más información. Esto pues: **M** (radio) $\subseteq$ **M** (intervalar) $\subseteq$ **M** (ordinal) $\subseteq$ **M** (nominal). Así, una escala de radio, poseerá propiedades (información) de todas las demás escalas.

VALIDEZ Y ESCALAS

Nuestro estudio, nos permitirá ahora determinar si es válido o no hacer uso de nuevas relaciones numéricas entre valores de la escala, aparte de las ya especificadas S_i $(i \in I)$ en la definición de escalas.

Definición.

Sea **A** un s.r.e irreducible y **B** un s.r.n del mismo tipo tal que $\exists\ m \in M(\mathbf{A},\mathbf{B})$. Si S es una k-relación en B entonces :

S es válida sii $\quad \forall\ m\ ,\ m' \in M(\mathbf{A},\mathbf{B}) \wedge$
$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k \in A^k$:

$$S(m_{(k)}(a_{(k)})) = S(m'_{(k)}(a_{(k)})).$$

Un teorema fundamental para garantizar la validez de una relación numérica es el siguiente

Teorema.

Sea **A** un s.r.e irreducible, S una k-relación en B y sea $m_o \in M(\mathbf{A},\mathbf{B})$ entonces S es válida $\Leftrightarrow$ S es $\Gamma_{\mathbf{B}}(m_o(A))$-invariante; es decir, $\forall\ a_{(k)} \in A^k$,

$$S(m_{o(k)}(a_{(k)})) = S((\gamma \circ m_o)_{(k)}(a_{(k)})).$$

Ejemplo : Sean $x_1, x_2, \ldots, x_k, x'_1, x'_2, \ldots, x'_k$, 2k valores pertenecientes al rango de una escala intervalar (es decir, a la imagen de una de las escalas arbitrarias m_o) y sea S una 2k-relación en $\mathbb{R}$ definida por $S : \bar{x} < \bar{x}'$, donde :

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i \ / \ k \quad \wedge \quad \bar{x}' = \sum_{i=1}^{k} x'_i \ / \ k \ .$$

S es Γ_p- invariante, pues $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \wedge \beta \in \mathbb{R}$:

$S(x_{(k)}, x'_{(k)}) = 1 \Leftrightarrow \bar{x} < \bar{x}' \Leftrightarrow \alpha \bar{x} + \beta < \alpha \bar{x}' + \beta$

$\Leftrightarrow \gamma(\bar{x}) < \gamma(\bar{x}') \Leftrightarrow S(\gamma_{(k)}(x_{(k)}), \gamma_{(k)}(x'_{(k)})) = 1.$

Por tanto, S es Γ_p- invariante $\Rightarrow$ S es válida (2.3.3). Si consideramos ahora la relación :

S' : $\bar{x} < 2\bar{x}'$,S' no es válida, pues $\exists \beta$ pequeño $/ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ : \alpha \bar{x} + \beta \geq 2(\alpha \bar{x}' + \beta)$

(basta tomar cualquier $\beta \leq \alpha \bar{x} - 2 \alpha \bar{x}'$).

Extenderemos, finalmente, el concepto de validez no solo a relaciones entre valores de la escala; sino también a funciones de los valores de la escala (estadísticos) .Este estudio reviste gran importancia en la práctica, pues es en base a estadísticos que se construyen muchos de los métodos y pruebas estadísticas.

Sea f un estadístico , dado que una escala M(**A**,**B**) es única bajo el conjunto de transformaciones admisibles , el valor de $f(m_{(n)}(a_{(n)}))$ considerada como función real en A^n , dependerá de que escala m hallamos tomado en M(**A**,**B**). Para que tenga sentido toda inferencia , el requerimiento mínimo será que las relaciones de equivalencia en A^n inducidas por :

$$f(m_{(n)}(a_{(n)})) = f(m_{(n)}(a'_{(n)}))$$

sean independientes de la escala tomada. Si esto no fuera así, podríamos tener que $f(m_{(n)}(a_{(n)})) = f(m_{(n)}(a'_{(n)}))$ para una escala $m \in M(\mathbf{A},\mathbf{B})$; mientras que $f(m'_{(n)}(a_{(n)})) \neq f(m'_{(n)}(a'_{(n)}))$ para otra escala equivalente $m' \in M(\mathbf{A},\mathbf{B})$.

Definición.

Dado $M(\mathbf{A},\mathbf{B})$, la clase de escalas equivalentes, un estadístico f es válido en B^n sii la relación de equivalencia en A^n definida por :

$$a_{(n)} \cong a'_{(n)} \Leftrightarrow f(m_{(n)}(a_{(n)})) = f(m_{(n)}(a'_{(n)}))$$

es independiente de $m \in M(\mathbf{A},\mathbf{B})$.

En forma equivalente, f es válido en B^n sii $\forall\ m, m' \in \mathbf{M}$ y $a_{(n)}, a'_{(n)} \in A^n$:

$$f(m_{(n)}(a_{(n)})) = f(m_{(n)}(a'_{(n)}))$$
$$\Leftrightarrow f(m'_{(n)}(a_{(n)})) = f(m'_{(n)}(a'_{(n)})).$$

Condición conocida como comparación de invarianza.

Ejemplo : La media no es válida para escalas ordinales, pues la relación $S : \bar{x}(x_{(n)}) = \bar{x}(x'_{(n)})$ puede ser destruida fácilmente por una transformación monótona creciente arbitraria.

Por ejemplo, si consideramos la relación $S:\bar{x}(1,2,3) = \bar{x}(3,0,3) \wedge \gamma$ en la clase de transformaciones admisibles en una escala ordinal, dada por

$$\gamma : m(A) \longmapsto \mathbb{R} \ / \ \gamma(0,1,2,3) = (0,2,4,9)$$
$$\Rightarrow \ \bar{x}(\gamma_{(3)}(1,2,3)) = \bar{x}(2,4,9) < \bar{x}(9,0,9)$$
$$= \ \bar{x}(\gamma_{(3)}(3,0,3)).$$

En este ejemplo, es claro también observar, que la desviación estandar no es válida para escalas ordinales, pues $s(0,2) = s(1,3)$; pero $s(\gamma_{(2)}(0,2)) = s(0,4) < s(3,9) = s(\gamma_{(2)}(1,3))$.

Un estadístico válido de tendencia central para escalas ordinales, es la mediana $Med: m(A)^n \longmapsto \mathbb{R} \ / \ Med(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_{(n+1)/2}$, donde los valores $x_1,x_2,\ldots,x_n$ están ordenados en forma ascendente acorde la relación $\geq$ en $\mathbb{R}$. Med es válido, desde que la posición ordinal, también llamado rango, es invariante bajo cualquier transformación monótona creciente y continua. Este hecho es muy importante, en especial para muchas pruebas no paramétricas que utilizan rangos en vez de valores de la escala. Así, por ejemplo, son válidas para una escala ordinal, la prueba de distribución de Kolmogorov - Smirnoff, el análisis de varianza de una vía de Kruskal - Wallis, pruebas de diferencia entre dos poblaciones U de Mann Whitney, coeficientes de correlación de Spearman y Kendall, etc.

La desviación estandar es un estadístico válido para escalas intervalares, pues

$$\forall\ \gamma \in \Gamma,\ x_{(n)},\ x'_{(n)} \in B^n,\quad s(x_{(n)}) = s(x'_{(n)})$$

$$\Leftrightarrow\quad \forall\ \alpha > 0,\ \alpha\ s(x_{(n)}) = \alpha\ s(x'_{(n)})$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i - \alpha\bar{x})^2/n-1\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha\ x'_i - \alpha\ \bar{x}')^2/n-1\right)^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha\ x_i + \beta - (\alpha\ \bar{x} + \beta))^2/n-1\right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha\ x'_i + \beta - (\alpha\ \bar{x}' + \beta))^2/n-1\right)^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow\quad s(\gamma_{(n)}(x_{(n)})) = s(\gamma_{(n)}(x'_{(n)})).$$

Bibliografía.

[1] *Valdivieso, L.*, Teoría de Escalas de Medición, Tesis de Bachillerato en Estadística, P.U.C.P., (1991).

[2] *Pfanzgal, J.* , Theory of Measurenment, Physica - Verlag, Würzburg - Wien, (1973).

[3] *Roberts, F.* , Discrete Mathematical Models with Applicatíons to Social and Environmental Problems, Prentice Hall, Inc., (1969).