Pro Mathematica: Vol. V, Nos. 9 - 10, 1991

INTEGRALES SINGULARES Y TEMAS AFINES

[Una motivación histórica]

Alejandro ORTIZ FERNANDEZ*

En esta exposición pretendemos motivar al lector sobre la importancia de una teoría que nace de problemas del análisis complejo real, y que con el transcurrir de los años se convirtió en una bella área del análisis armónico. Nos referimos a los operadores integrales singulares, una profunda teoría iniciada por Calderón - Zygmund en 1952, cuyas proyecciones aún no terminan en nuestros días.

El lector encontrará un conjunto de temas, escritos con el objetivo de interesarlo por un posible estudio de la teoría en contextos más completos. Por esta razón nos interesa las ideas en juego, así como algunas referencias históricas.

* Profesor Asociado de la PUCP.

CONTENIDO

§ 1. INTRODUCCION

La teoría de las integrales singulares en $\mathbb{R}^n$ fue iniciada con los pioneros trabajos de A. P. Calderón - A.Zygmund en los años 50's. Clásicamente una integral singular es una integral de la forma

$$\int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy \qquad (1)$$

donde el núcleo k(x) satisface adecuadas condiciones para la existencia de la integral;la función f pertenece a un conveniente espacio de funciones. Históricamente, tales integrales aparecieron relacionadas a ciertas ecuaciones diferenciales que expresan determinadas leyes de la física. Como sabemos,una ecuación diferencial es el resultado de aplicar un operador diferencial a una función por determinar; tales operadores tienen un carácter local, esto es, cuando aplicamos un operador diferencial a una función su resultado solo depende de los valores de ésta en una vecindad arbitrariamente pequeña del punto. Asimismo, los operadores diferenciales son inestables, lo que significa que pequeños cambios de la función puede implicar grandes cambios en la ecuación diferencial. Esto significa que debemos restringir la clase de funciones a fin que obten gamos resultados deseables.

Miremos ahora a la integral singular (1).Podemos considerarla, en general, como un operador integral: $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y)f(y)dy$.

Al igual que con los operadores diferenciales, nos interesa los operadores integrales lineales, esto es,aquellos operadores en que vale el principio de superposición, y que aparecen en ciertas situaciones de la física,como es el caso del potencial gravitatorio. Veamos algunos argumentos de este hecho.

Sea $f(s,t)$ una función integrable en $\mathbb{R}^2$ y consideremos el semi-espacio superior $z > 0$. El potencial newtoniano $U(x,y,z)$, con densidad $f(s,t)$, es definido siendo la integral

$$\int \frac{f(s,t)}{d}\, ds\, dt$$

donde $d^2 = (x-s)^2 + (y-t)^2 + z^2$. Considerando las derivadas parciales de U, obtendremos las expresiones

$$U_z(x,y,z) = -z \int \frac{f(s,t)}{d^3}\, ds\, dt \,,$$

$$U_x(x,y,z) = -\int \frac{x-s}{d^3} f(s,t)ds\, dt \quad \text{y}$$

$$U_y(x,y,z) = -\int \frac{y-t}{d^3} f(s,t)ds\, dt \,.$$

Ahora, en U_x hagamos $z \longrightarrow 0$ para obtener

$$U_x(x,y,0) = -\int \frac{x-s}{[(x-s)^2+(y-t)^2]^{3/2}} f(s,t)ds\ dt.$$

Si consideramos el núcleo $k(x,y) = \dfrac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$,
podremos escribir U_x como una integral de tipo convolución $\int k(x-s,\ y-t)\ f(s,t)\ ds\ dt$, integral que es similar a (1).

Veamos otra situación que nos lleva a una integral singular. Sea $u \in L^p(\mathbb{R}^1)$, esto es,
$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^p\ dx < \infty$, $1 < p < \infty$, y sea la función
$f(z) = \dfrac{1}{\pi i} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{t-z}\ dt$, con $z = x+iy$, definida en el semi-espacio superior $y = Im(z) \geq 0$. Usando la desigualdad de Hölder, observando que $(t-z)^{-1} \in L^{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, vemos que $f(z)$ es bien definida. También, vía un argumento familiar, se ve que $f(z)$ es una función analítica en $Im(z)>0$. Por otro lado,

$$\frac{1}{t-z} = \frac{t-x+iy}{(t-x)^2+y^2} = \frac{iy}{(t-x)^2+y^2} - \frac{x-t}{(t-x)^2+y^2};$$

luego, $$\frac{1}{\pi i(t-z)} = \frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-t)^2+y^2} + i\frac{1}{\pi}\frac{x-t}{(t-x)^2+y^2}.$$

Pongamos $P_y(x) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{y}{x^2+y^2}$, llamado núcleo de Poisson, y

$$\tilde{P}_y(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{x}{x^2+y^2}\ ,$$ llamado núcleo de Poisson conjugado.

Así obtenemos $\frac{1}{\pi i(t-z)} = P_y(x-t) + i\,\tilde{P}_y(x-t)$, y

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_y(x-t)u(t)dt + i\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}_y(x-t)u(t)dt$$

$$= U(x,y) + i\ V(x,y),$$

donde $U(x,y)$ es llamado la integral de Poisson de u, y $V(x,y)$ la integral conjugada de Poisson de u. Asumiendo que u es de valor real,vemos que U y V son funciones armónicos en $Im(z) > 0$. Desde que $u \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $1 < p < \infty$, tenemos también

$$U(x,y) = (P_y * u)(x) \longrightarrow u(x) \quad \text{a.e. si } y \longrightarrow 0^+.$$

Este hecho tiene una interesante interpretación: la integral de Poisson $U(x,y)$ es la solución del problema de Dirichlet para el semi-espacio superior, con dado de contorno $u(x)$ sobre la frontera $y = 0$. También, desde que $u \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $1<p<\infty$, obtenemos (informalmente)

$$V(x,y) = (\tilde{P}_y * u)(x) = (P_y * \tilde{u})(x) \longrightarrow \tilde{u}(x) \quad \text{a.e.}$$

si $y \to 0^+$, donde

$$\tilde{u}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{u(t)}{x-t}\,dt\ .$$

$\tilde{u}(x)$ es llamada la *transformada de Hilbert* de $u(x)$. Obsérvese que debido a la singularidad del núcleo en la diagonal $x = t$, la integral $\int \frac{u(t)}{x-t} dt$ es absolutamente divergente.

Con estas motivaciones pasemos a ver algunas propiedades de la transformada de Hilbert $Hf = \tilde{f}$ de una función f.

§ 2. LA TRANSFORMADA DE HILBERT

La teoría de las integrales singulares se inicia con la transformada de Hilbert de f,

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t}\, dt = \text{v.p. } \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t}\, dt$$

Observemos que podemos tener dificultades respecto a la convergencia de la integral en el infinito, así como debido a la naturaleza de la función f. Asímismo, nos vemos obligados a retirar una vecindad simétrica de la singularidad $x = t$, y así considerar la integral en el sentido"valor principal de Cauchy". La tarea es establecer la existencia de $\tilde{f}$, y su relación con f.

En el caso general cuando $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $1 \le p < \infty$, se tienen clásicos trabajos de Fatou, Privaloff, Besicovith, M. Riesz, ... Estos trabajos descansan fundamentalmente en el papel de las funciones analíticas (de variable compleja), lo que dificulta la generalización de la teoría a varias variables. Así,es necesario introducir nuevas ideas para la generalización a $\mathbb{R}^n$!

Sigamos con el caso $\mathbb{R}^1$. ¿Cómo garantizar la existencia de $\tilde{f}(x)$?. Hagamos el siguiente argumento.

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t}\, dt = (y = x-t)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y}\, dy = \text{(reemplazando y por -y)}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-1}{\pi} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x+y)}{y}\, dy$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x+y)-f(x-y)}{y}\, dy =$$

$$\frac{-1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{f(x+y)-f(x-y)}{y}\, dy .$$

Esto sugiere considerar f como una función de Lipschitz de orden α, $0 < \alpha \le 1$, esto es, $|f(x)- f(y)| \le C|x-y|^{\alpha}$ si $|x-y| \le \delta$. Así tendríamos,

$$|\tilde{f}(x)| \le \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\delta} \frac{|f(x+y)-f(x-y)|}{|y|}\, dy$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} \frac{|f(x+y)-f(x-y)|}{|y|}\, dy.$$

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $1 \le p < \infty$, obtenemos (usando la desigualdad de Hölder para $f \in L^p$),

$$|\tilde{f}(x)| \le C\int_{0}^{\delta} |y|^{\alpha-1} dy + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} \frac{|f(x+y)-f(x-y)|}{|y|}\, dy<\infty.$$

Veamos ahora la *teoría* L^2. Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$ y los reales $0 < \varepsilon < \delta < \infty$ y consideremos la truncación

$$\tilde{f}_{\varepsilon,\delta}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|x-t|<\delta} \frac{f(t)}{x-t}\,dt.$$

Entonces, se tiene, $\tilde{f}_{\varepsilon,\delta} : L^2(\mathbb{R}^1) \to L^2(\mathbb{R}^1)$ es un operador lineal continuo, esto es, existe una constante $C > 0$ tal que $\|\tilde{f}_{\varepsilon,\delta}\|_2 \leq C\|f\|_2$. En efecto, considerando la transformada de Fourier

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\, g(t)dt$$

y el núcleo truncado

$$k_{\varepsilon,\delta}(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \ldots \text{ si } \varepsilon < |x| < \delta \\ 0 & \ldots \text{ complemento} \end{cases}$$

tenemos

$$\hat{\tilde{f}}_{\varepsilon,\delta}(x) = [k_{\varepsilon,\delta}*f]^{\wedge}(x) = \hat{k}_{\varepsilon,\delta}(x)\,\hat{f}(x) \quad \text{a.e.}$$

Se verifica que $|\hat{k}_{\varepsilon,\delta}(x)| \leq C$. Luego tenemos $\|\hat{\tilde{f}}_{\varepsilon,\delta}\|_2 \leq C\|\hat{f}\|_2$ y por la fórmula de Parseval se tiene lo deseado, esto es, $\|\tilde{f}_{\varepsilon,\delta}\|_2 \leq C\|f\|_2$.

Se prueba también que $\hat{k}_{\varepsilon,\delta}(x) \to -\,i \operatorname{sgn} x$ si $\varepsilon,\delta \to 0$, donde sgn x es la función "signo de". Luego, $\hat{\tilde{f}}_{\varepsilon,\delta}(x) \to (i \operatorname{sgn} x)\,\hat{f}$ en L^2, de donde (tomando antitransformada de Fourier), $\tilde{f}_{\varepsilon,\delta} \to \tilde{f}$ en la norma - L^2 para $\tilde{f} \in L^2$ tal que $\hat{\tilde{f}}(x) = (-i \operatorname{sgn} x)\,\hat{f}(x)$. Esta igualdad es importante porque escribiendo $Hf \equiv \tilde{f}$ y $\sigma_H(x) = -i \operatorname{sgn} x$, tenemos $[Hf]\,\hat{}(x) = \sigma_H(x)\hat{f}(x)$, esto es

$$H = F^{-1} \sigma_H F \qquad (2),$$

siendo F la transformada de Fourier y F^{-i} la transformada inversa de Fourier. (2) nos describe la naturaleza de la transformada de Hilbert.

Observamos que σ_H se comporta como un multiplicador, en el sentido que precisaremos después. $\sigma_H(x) = -i \operatorname{sgn} x$ es llamado el *símbolo* de la transformada de Hilbert. Luego, a menos de isomorfismos en L^2, el operador H actúa "multiplicando" por el símbolo. Obsérvese que $|\sigma_H| = 1$, $\sigma_H^2 = -1$ y que $\tilde{f}(x) = [\sigma_H \hat{f}]^{\vee}(x) = (\sigma_H^{\vee} * f)(x)$, luego $\overset{\vee}{\sigma}_H = \text{v.p.}\ \frac{1}{x}$, esto es $\sigma_H(x) = [\text{v.p.}\ \frac{1}{x}]\hat{}$. Una de las preocupaciones de los analistas de entonces fue comprender la naturaleza del símbolo en contextos más generales.

La transformada de Hilbert es un ejemplo de operador integral singular, el más simple de tales operadores. Estos son operadores un tanto intermedios entre los operadores diferenciales y los integrales; son operadores lineales respecto a las funciones que consideramos, pero que en el sentido usual son integrales divergentes. Luego, la necesidad de considerarlos como límites de integrales usuales, esto es, considerar el valor principal de la integral; la idea es que los valores grandes de la función se compensen con los valores negativos, y que el límite exista. Sin embargo, el comportamiento de los operadores integrales singulares es buena en cuanto a su continuidad respecto a la topología de los espacios, L^p por ejemplo. Observemos que al operador transformada de Hilbert H le hemos asociado una función (de un punto y una dirección), su símbolo $\sigma_H(x)$. De un modo general a cada operador integral singular se le asocia un símbolo, de modo que se pueda establecer un cálculo funcional simple, como que a la suma de dos operadores corresponda la suma de sus símbolos, y a la composición de operadores le corresponda el producto de sus símbolos. En realidad, el papel del símbolo es caracterizar al operador en sus cualidades esenciales, salvo operadores que tienen comportamiento "muy bueno" y que se pueden controlar, o aun ignorarlos. Recíprocamente, cada función regular (de punto y dirección) es el símbolo de un operador integral singular. He aquí lo flexible y útil de estos operadores.

Insistamos en consideraciones históricas relacionadas con la transformada de Hilbert. Sea Ω un dominio acotado en el plano complejo, simplemente conexo, con frontera $\partial\Omega = L$, la que es una curva regular cerrada. Ω_c representa el dominio complemento de Ω. Un clásico problema, propuesto por Plemelj, en 1908, es: "sea f una función de valores complejos sobre L, encontrar dos funciones F_1 y F_2 analíticas en Ω y en Ω_c respectivamente, con $F_2 \longrightarrow 0$ en el infinito, tal que $f = F_1 - F_2$".

La solución de este problema nos lleva a la transformada de Hilbert de f. Así, Plemelj considera las integrales sobre la frontera

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(t)}{t-z}\, dt \quad , \quad \text{con} \quad z \in \Omega$$

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{G(t)}{t-z}\, dt \quad , \quad \text{con} \quad z \in \Omega_c .$$

$F(z)$ y $G(z)$ son funciones analíticas en Ω y Ω_c respectivamente. Si F y G son Hölder continuas, entonces F y G tienen valores límites en L, que son respectivamente,

$$F_1(t) = \lim_{z\to t} F(z) = \frac{1}{2}\, f(t) + \frac{1}{2\pi i}\, \text{p.v.} \int_L \frac{f(s)}{s-z}\, ds$$

$$F_2(t) = \lim_{z\to t} G(z) = -\frac{1}{2}\, f(t) + \frac{1}{2\pi i}\, \text{p.v.} \int_L \frac{f(s)}{s-z}\, ds.$$

F_1 y F_2 son la solución al problema planteado. Obsérvese que en estos argumentos estamos tratando con un problema de contorno. En el caso particular que Ω es un semiplano, se tiene:

$$F_1(t) = \frac{1}{2} f - \frac{1}{2} Hf$$

$$F_2(t) = -\frac{1}{2} f - \frac{1}{2} Hf$$

donde H es la transformada de Hilbert. Asimismo, se verifica que $H^* = -H$, donde H^* es el adjunto de H; también $H^{-1} = -H$, así $H^* = H^{-1}$ lo que nos dice que la transformada de Hilbert es un operador unitario.

¿Sobre qué espacios, el operador H está bien definido, y es un operador continuo? Privaloff, en 1916, probó que H es continuo sobre los espacios de Lipschitz Λ_α, $0 < \alpha < 1$. Más tarde, en 1928, M. Riesz usando la relación entre las funciones analíticas y el operador H, probó que este operador es bien definido y continuo en el espacio de Lebesgue L^p, $1 < p < \infty$. Formalmente tenemos el

Teorema. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $1 < p < \infty$, y $H_\varepsilon f(x) = \tilde{f}_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t}\, dt$. Entonces,

(a) $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p \leq C_p \|f\|_p$;

(b) existe $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^1)$ tal que $\|\tilde{f}_\varepsilon - \tilde{f}\|_p \to 0$ si $\varepsilon \to 0$;

(c) $\|\tilde{f}\|_p \leq C_p \|f\|_p$.

La evolución de la teoría $\mathbb{R}^n$ de las integrales singulares fue influida fundamentalmente por otros problemas relacionados al problema propuesto anteriormente. Así tenemos:

1. [Hilbert, 1904]. Encontrar una función analítica $F(z) = u+iv$ en Ω tal que, si a,b y f son funciones reales dadas sobre L, tengamos $ua + vb = f$ en L.

2. [Hilbert, 1905]. Encontrar dos funciones analíticas F y G en Ω y Ω_c respectivamente tal que tengamos $F = fG$ en L, siendo f una función de valor complejo en L.

3. [Poincaré, 1910]. *El problema de la derivada oblícua.* Dada una función f en L, encontrar una función armónica u en Ω tal que $\frac{\partial u}{\partial n} = f$, siendo n un campo de vectores dado sobre L, transversal a L.

Hagamos unos breves comentarios sobre estas cuestiones. Por argumentos analíticos, esos problemas conducen a resolver una ecuación integral singular de la forma

$$a(t)\,\Phi(t) + b(t)(H\Phi)(t) + K\Phi = f(t) \qquad (3)$$

siendo a, b y f funciones dadas y K un operador integral con núcleo no-singular, y

$(H\Phi)(t) = \frac{1}{\pi i}$ v.p. $\int_L \frac{\Phi(s)}{s-t}\,ds$ (la transformada de

Hilbert). La ecuación (3) es reducida a una ecuación integral,en donde aparecen en forma natural los conmutadores

$$Ha - aH \qquad y \qquad Hb - bH.$$

Así, multiplicando (3) por $a - bH$, considerando que $H^2 = I$, se obtiene

$$(a^2 - b^2)\phi - b(Ha - aH)\phi - b(Hb - bH)H\phi$$
$$+ (a - bH)K\phi = (a - bH)f.$$

Si $a^2 - b^2 \neq 0$, se obtiene la ecuación $\phi + K_1\phi = f_1$. Si las funciones a y b son Hölder-continuas, entonces K_1 es un operador integral no-singular, y se le puede aplicar la teoría de Fredholm.

Ya hemos visto que H es un operador bien definido y continuo sobre L^p, $1 < p < \infty$. Es oportuno remarcar que H no preserva la clase L^1. Por ejemplo, si $f(x) = X_{a,b}(x)$ es la función característica del intervalo finito (a,b), se verifica que $Hf(x) = \frac{1}{\pi} \log \left|\frac{a-x}{b-x}\right| \quad (\notin L^1(\mathbb{R}^1))$.

§ 3. INTEGRALES SINGULARES EN $\mathbb{R}^n$

Las primeras contribuciones hacia la generalización del operador H a varias variables son debidas a F.G. Tricomi en 1925 y 1928, quien considera operadores de la forma

$$Tf(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^2} k(x-y)\ f(y)dy \qquad (4)$$

para funciones de dos variables en el plano. Asume que k es una función homogénea de grado -2, esto es, $k(\lambda x) = \lambda^{-2}k(x)$ para todo real $\lambda > 0$ y todo $x \in \mathbb{R}^2$. Tricomi logra construir un operador S, del mismo tipo que T, tal que $ST = I$; para ello reduce el problema a una ecuación integral singular de una variable. Así, su mayor contribución fue considerar la composición de tales operadores, permitiéndole resolver la ecuación $Hf = g$.

G. Giraud estudió el problema de generalizar el método de las integrales para atacar el problema de Poincaré, 1910, en el caso $n > 2$. Así mismo, en 1934, considera operadores integrales singulares sobre variedades regulares cerradas de dimensión arbitraria; establece la invarianza de estos operadores por cambios de coordenadas y que son continuos en espacios de Lipschitz; logra reducir las ecuaciones singulares a ecuaciones de tipo Fredholm. Como en el trabajo de Tricomi, Giraud aún no encuentra condiciones simples para obtener tal reducción.

Un significativo aporte en esta dirección fue dado por S. G. Mihlin en 1936 al asociar al operador T, dado por (4), la función $\Sigma\ \gamma_m a_m e^{im\Theta}$, que llamó *símbolo*, donde las γ_m son constantes y $\Sigma a_m e^{im\Theta}$ es la serie de Fourier asociada a $k(e^{im\Theta})$, que es la restricción de k a la circunferencia unitaria. Denotemos el símbolo con

$$\sigma_T(x;\ \cos\Theta,\ \operatorname{sen}\Theta) = \sum_m \gamma_m a_m(x)\ e^{im\Theta}.$$

Fue interesante observar que la relación entre los operadores y sus símbolos es lineal y biunívoca. Por ejemplo, el símbolo de la composición de dos tales operadores es el producto de los símbolos respectivos, esto es, $\sigma_{T_1 \circ T_2} = \sigma_{T_1} \cdot \sigma_{T_2}$

Con tales ideas Mihlin resuelve el problema de la inversión de los operadores T tipo (4), así como la reducción de ecuaciones integrales singulares a ecuaciones de tipo Fredholm. Giraud lleva esta idea al caso $\mathbb{R}^n$, usando para ello desarrollos en series de armónicos esféricos. Calcula los coeficientes γ_m usando la naturaleza del símbolo, la que aún conserva cierto misterio.

Así llegamos a la década de los años 50's. En 1952 aparece un trabajo de los profesores

Alberto P. Calderón y Antoni Zygmund, el que es inicio de una teoría con proyecciones aun hasta en nuestra época. Se aclara la naturaleza del símbolo para operadores de tipo convolución. Así consideran operadores del tipo

$$Tf(x) = cf + v.p. \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)\, f(y)\, dy$$

donde $K(x)$ es una función homogénea de grado $-n$, tal que $\int_{|x|=1} k(x) d\sigma = 0$, siendo c una constante. Entonces se prueba que $\sigma_T(x) = c + \hat{k}(x)$. De un modo mas general, en $\mathbb{R}^n$, consideramos operadores integrales singulares de la forma

$$Tf(x) = a(x)\, f(x) + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} k(x,x-y)\, f(y)dy \qquad (5)$$

donde $a(x)$ pertenece a una clase de funciones acotadas (con ciertas restricciones), y donde

$$k(x,\lambda y) = \lambda^{-n} k(x,y) \quad , \quad \int_{|y|=1} k(x,y) d\sigma = 0$$

teniendo $k(x,y)$ además ciertas condiciones de regularidad. El símbolo de T es definido siendo

$$\sigma_T(x,z') = a(x) + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon<|y|<1/\varepsilon} e^{-iyz'}\, k(x,y)dy$$

donde $z' = \frac{z}{|z|}$. Se verifica que $\sigma_{T_1+T_2} = \sigma_{T_1} + \sigma_{T_2}$

Con el objeto de precisar la idea de operador integral singular de tipo C^{∞}_{β}, demos algunas ideas previas.

Sea $\alpha > 0$ un número real; C_α denota la clase de las funciones f, de valor complejo, acotadas y continuas sobre $\mathbb{R}^n$ tales que:

$\left|\frac{\partial^\gamma}{\partial x} f\right| \le M$ para $|\gamma| \le [\alpha]$;

las derivadas de orden $[\alpha]$ satisfacen una condición de Hölder, de orden $\delta = \alpha - [\alpha]$.

($[\alpha]$ es el mayor entero $\le \alpha$).

Sea ahora la clase C_α^∞ de funciones $f(x,z) \in C_\alpha$, que son C^∞ respecto a z y tal que todas sus derivadas con respecto a z están en C_α. Entonces se tienen los fundamentales resultados:

Teorema. "Sea $k(x,z) \in C_\beta^\infty$, $\beta \ge 0$; $x,z \in \mathbb{R}^n$, tal que $k(x,z)$ es homogénea de grado $-n$ en z; además $\int_\Sigma k(x,z)d\sigma = 0$ para todo x , y sea $a(x) \in C_\beta$. (Σ es la esfera unitaria $|x| = 1$). Sea el operador

$$T_\varepsilon f(x) = a(x)\ f(x) + \int_{|x-y|>\varepsilon} k(x,x-y)\ f(y)dy$$

y su adjunto,

$$T_\varepsilon^* f(x) = \bar{a}(x)\ f(x) + \int_{|x-y|>\varepsilon} k(y,y-x)\ f(y)dy.$$

Entonces,

(i) T_ε y T_ε^* están bien definidos para todo $f \in L^p$, $1 < p < \infty$.
Además, cuando $\varepsilon \to 0$, $T_\varepsilon f \to Tf$ y $T_\varepsilon^* f \to T^* f$ en L^p y

$$\|Tf\|_p \leq A_p \sup_{|z|=1} [|a(x)| + |k(x,z)|] \|f\|_p$$

$$\|T^*f\|_p \leq A_q \sup_{|z|=1} [|a(x)| + |k(x,z)|] \|f\|_p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(ii) Si $f \in L^p_r$, $1 < p < \infty$, $r \leq \beta$, entonces $Tf \in L^p_r$ y $T^*f \in L^p_r$ donde L^p_r es el espacio de Sobolev

$$\{f \in L^p(\mathbb{R}^n) \ / \ D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n) \ , \ |\alpha| \leq r\} ,$$

donde las derivadas son en el sentido de las distribuciones.

(iii) Si $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, y f es Hölder-conti͟nua de orden α, $0 < \alpha < \beta$, entonces Tf y T^*f son también Hölder-continua del mismo orden".

Un operador integral singular T es llamado de tipo C^∞_β si es como en el teorema. Su símbolo es la función

$$\sigma_T(x,z) = a(x) + \sum a_{nm}(x) \ \gamma_n \ Y_{nm}(z')$$

donde la serie es un desarrollo en armónicos esféricos y

$$\sum a_{nm}(x) \ \gamma_n \ Y_{nm}(z') = [k(x,z)]\hat{}_z .$$

La relación entre estos operadores y sus símbolos está dado por el

Teorema. Sea T un operador integral singular de tipo C^∞_β, entonces su símbolo es una función homogénea de grado cero con respecto a z; además,

$\sigma_T \in C_\beta^\infty$ con $|z| \geq 1$.

Recíprocamente, toda función de x,z , la cual es homogénea de grado cero con respecto a z y pertenece a C_β^∞, es el símbolo de un único operador de tipo C_β^∞ .

El trabajo de 1952 de Calderón-Zygmund tiene la importancia de ser el punto de partida de una serie de investigaciones de los mismos autores, así como de los alumnos de la escuela creada por ellos, así como de otros investigadores. La teoría influyó en temas fundamentales del análisis y otras áreas. Veamos algunos resultados clásicos para la integral singular

$Tf(x) = \text{v.p.} \int k(x-y)\, f(y)dy$, tipo convolución,

donde el núcleo es homogéneo de grado -n. Así, $k(x) = |x|^{-n}\, k(\frac{x}{|x|}) = |x|^{-n}\, k(x')$. La función $\Omega(x) = k(x')$ es homogénea de grado cero y es llamada la función característica de $k(x)$. Así el operador T se puede escribir en la forma

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}\, f(y)dy$$

o aún

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon\, f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} k_\varepsilon(x-y)\, f(y)dy,$$

donde $$k_\varepsilon(x) = \begin{cases} k(x) & \ldots \text{ si } |x| > \varepsilon \\ 0 & \ldots \text{ si } |x| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

¿Cuándo existe $T_\varepsilon f$? ... Tenemos

(i) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, y $\Omega(x) \in L^1(\Sigma)$, entonces $T_\varepsilon f(x)$ existe a.e. ;

(ii) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, y Ω es limitada, entonces $T_\varepsilon f(x)$ existe en todas partes.

Ahora, ¿cómo garantizar la existencia de $Tf(x)$? ... asumamos que

(a) $\Omega \in L^1(\Sigma)$;

(b) $\int_\Sigma \Omega(x')d\sigma = 0$, hipótesis de cancelación.

Necesitamos el espacio de Lipschitz Λ_α, $0<\alpha<1$. Por definición

$$\Lambda_\alpha = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \ / \ |f(x+t) - f(x)| \le C|t|^\alpha\}.$$

Entonces tenemos: si $f \in L^p \cap \Lambda_\alpha$, $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1$, y si Ω satisface (a) y (b), entonces existe a.e. el límite $Tf(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon f(x)$. Si además tuviéramos $\Omega(x)$ limitado, entonces el límite existe en todas partes.

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$; Ω satisface (b) y $\Omega \in L^q(\Sigma)$ para algún $q > 1$, entonces T es un operador de tipo fuerte (p,p), esto es, $\|Tf\|_p \le A_p\|f\|_p$. Si $p = 1$, se tiene

$$|\{x \ / \ |Tf(x)| > \lambda\}| \le \frac{C}{\lambda} \|f\|_1$$

esto es, T es continuo de L^1 en L^1- débil. Hörmander, a fines de los 50's, relaja la condición de homogenidad. Así tenemos el

Teorema A. "Si $k \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que [a] $|\hat{k}(x)| \leq C'$ para todo x; [b] existe $C'' > 0$ tal que para todo $y \neq 0$ se tenga $\int_{|x|>2|y|} |k(x-y) - k(x)|dx \leq C''$.

Si $f \in L^1 \cap L^p$, $1 < p < \infty$, entonces el operador

$$Tf(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)\, f(y)dy$$

es de tipo fuerte (p,p)".

La prueba del teorema A sigue la siguiente estrategia. Se prueba que T es de tipo (fuerte) (2,2), lo que no presenta dificultad. Luego se prueba que T es de tipo débil (1,1), esto es, se tiene $|\{x \,/\, |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1$. La prueba de este hecho es más delicada; se hace uso del famoso lema de descomposición de Calderón-Zygmund (1952) que establece: "sea $f \geq 0$ una función en $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda > 0$ un real. Entonces, existe una sucesión de cubos abiertos, disjuntos, $\{Q_k\}$ (pudiendo intersectarse sus cerraduras), tal que:

(i) sobre cada Q_k se tiene $\lambda < \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f \leq 2^n\lambda$

(ii) sobre $\mathbb{R}^n - \bigcup_k Q_k$, se tiene $f(x) \leq \lambda$ a.e."

Históricamente este lema fue introducido por Calderón-Zygmund para probar la L^p- continuidad,

$1 < p < \infty$, de una clase de operadores integrales singulares en $\mathbb{R}^n$. Sigamos con la idea de la prueba del Teorema A. Vía tal lema, se tiene la descomposición $f = b + m$, donde $b \in L^2$ es una función "buena" y se tiene $|\{x \ / \ |(Tb)(x)|>\lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1$. Con un poco de más dificultad se establece que Tm también satisface una similar desigualdad, y de esta manera (por linealidad) T es un operador tipo débil (1,1). Ahora,usando el teorema de interpolación de Marcinkiewicz se concluye que T es un operador de tipo (p,p) con $1 < p \leq 2$, esto es, $T\colon L^p \longrightarrow L^p$ es un operador lineal continuo. Finalmente, vía un argumento de dualidad, se tiene que T es de tipo (p,p) con $2 < p < \infty$, y se tiene la tesis del teorema.

Remarcamos que los operadores integrales singulares tienen dificultades, en cuanto a su continuidad, en los casos $p = 1$ y $p = \infty$. Ya hemos visto que en el caso $\mathbb{R}^1$, el operador integral singular H (la transformada de Hilbert) no preserva la clase L^1, pues $f(x)= \chi_{a,b}(x) \in L^1 \cap L^\infty$ pero $Hf(x) = \frac{1}{\pi} \log\left|\frac{a-x}{b-x}\right| \notin L^1 \cap L^\infty$. Así, considerando H operando sobre L^∞,para capturar el rango de H fue preciso introducirse un "nuevo" espacio, más grande que L^∞, y que contenga,por ejemplo, a $\log|x|$. Este fue el espacio de las funciones de oscilación media acotada,denotado BMO.

Demos algunas ideas al respecto. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y consideremos el promedio $f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)dy$, donde $Q = Q(x,r)$ es un cubo de centro x, y radio r, (con lados paralelos a los ejes coordenados). Remarcamos que $|Q|$ es la medida de Lebesgue de Q. La oscilación media de f sobre Q es definida siendo

$$f^{\#}_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - f_Q| dy.$$

Diremos que f tiene oscilación media acotada, si $\|f\|_* = \sup_{Q\subset\mathbb{R}^n} \{f^{\#}_Q\} < \infty$. En este caso escribiremos $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ó simplemente $f \in BMO$. De inmediato se observa que $L^\infty \subset BMO$; se prueba también que $\log|x| \in BMO$, es decir, se tiene el deseado espacio. Tenemos el,

Teorema B. Bajo las hipótesis del Teorema A, el operador

$$Tf(x) = v.p.\int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)\ f(y)dy \quad \text{es tal que}$$

$T : L^\infty \longrightarrow BMO$ es un operador continuo, esto es, existe $C > 0$ tal que $\|Tf\|_* \le C\ \|f\|_\infty$.

De esta manera, para L^∞ el substituto adecuado para este tipo de desigualdades, es el espacio BMO. ¿Quién lo es para el espacio L^1? ... De algún modo, tal espacio aparece al responder a la cuestión, ¿encontrar un espacio tal que su dual (fuerte) sea BMO? Ch. Fefferman encontró, en 1971, entre otras notables ideas, la importante relación: $[H^1]^* = BMO$, donde H^1 es el clásico espacio de Hardy,que puesto en términos del operador integral singular R_j , la transformada de Riesz, es por definición

$$H^1 = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) \;/\; R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n), j = 1,\dots,n\}$$

siendo, también por definición,

$[R_j f]^\wedge(x) = \frac{x_j}{|x|}\hat{f}(x)$. H^1 es el substituto de L^1; así tenemos que $R_j : H^1 \longrightarrow H^1$ es un operador continuo para $j = 1,2,\dots,n$. De un modo más general tenemos el

Teorema C. [Ch. Fefferman - E.Stein, 1972]. (Extensión del teorema A). Sea k un núcleo en $L^1(\mathbb{R}^n)$; θ un parámetro real, $0 \le \theta < 1$ Si $0 < \theta < 1$ asumimos $k(x) \doteq 0$ para $|x| \ge 1$.

Asumimos la hipótesis

$$[a]' \quad |\hat{k}(x)| \le C(1+|x|)^{-n\theta/2}$$

$$[b]' \quad \int_{|x|\ge 2|y|^{1-\theta}} |k(x-y) - k(x)|\,dx \le C \,, \quad \text{si } |y| < 1 .$$

Si $Tf(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy$, entonces $T : L^\infty \longrightarrow BMO$ es un operador continuo. Asimismo lo es $T : H^1 \longrightarrow H^1$.

Nota. Si $\theta = 0$, entonces estamos en el teorema A.

§ 4. APLICACIONES A ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

La teoría de Calderón - Zygmund encontró un significativo vínculo con la teoría de operadores diferenciales parciales, contribuyendo a la solución de problemas de un modo general. Son notables los trabajos del Prof. A. P. Calderón en esta dirección, así como de sus alumnos y otros investigadores.

Veamos algunos argumentos. Sea $\alpha \in \mathbb{N}^n$, esto es, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Si $x \in \mathbb{R}^n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$

Pongamos $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f \equiv D^\alpha f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} f$.

Sea el polinomio $P(x) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) x^\alpha$ al que asociamos el operador diferencial parcial $P(D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$. Sea $f \in S$ (distribuciones rápidamente decrecientes); sabemos que $\left[\frac{\partial}{\partial x_j} f\right]^\wedge(x) = 2\pi i x_j \hat{f}(x)$, y más generalmente $[P(D)f]^\wedge(x) = P(2\pi i x)\hat{f}(x)$. Si, por ejemplo,

$$P(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2 , \quad P(D)f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \equiv \Delta f.$$

Luego, $[\Delta f]^{\wedge}(x) = -4\pi^2|x|^2 \hat{f}(x)$. Obsérvese la forma de esta representación. De un modo más general, definamos $\varphi(D)$ vía $[\varphi(D)f]^{\wedge}(x) = \varphi(2\pi i x)\hat{f}(x)$, donde φ es una función arbitraria. En particular, si $\varphi(x) = |x|$ tendremos $[|D|f]^{\wedge}(x) = 2\pi|x|\hat{f}(x)$. Definamos el operador Λ siendo $\Lambda = |D|$, esto es, $[\Lambda f]^{\wedge}(x) = 2\pi|x|\hat{f}(x)$. Λ es una suma de composiciones del operador integral singular R_j con monomios diferenciales. Más concretamente, $\Lambda f(x) = i\sum_{j=1}^{n} R_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, donde remarcamos que R_j es la transformada de Riesz y que es una natural extensión a $\mathbb{R}^n$ de la transformada de Hilbert ya que, equivalentemente, R_j es definida vía:

$$(R_j f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} c_n \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{x_j - t_j}{|x-t|^{n+1}} f(t)dt.$$

El operador R_j fue introducido por Marcel Riesz. Ella tiene diversas aplicaciones; por ejemplo, vía la relación $R_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j}(-\Delta)^{-1/2}$, ella fue usada por Calderón en el estudio de la unicidad de la solución del problema de Cauchy.

Reiterando obtenemos $[\Lambda^m f]^{\wedge}(x) = (2\pi|x|)^m \hat{f}(x)$ En particular, $[\Lambda^2 f]^{\wedge}(x) = (2\pi|x|)^2 \hat{f}(x) =$

$4\pi^2|x|^2 \hat{f}(x) = -[\Delta f]^\wedge(x)$. Así se obtiene la relación $\Lambda^2 = -\Delta$. Similarmente, $[(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f]^\wedge(x) =$

$$(2\pi i x)^\alpha \hat{f}(x) = (\frac{x}{|x|})^\alpha i^{|\alpha|}(2\pi|x|)^\alpha \hat{f}(x)$$
$$= i^{|\alpha|}(x')^\alpha [\Lambda^{|\alpha|}f]^\wedge(x). \qquad (6)$$

Desde que $(x')^\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$ y es una función homogénea de grado cero, por lo afirmado en la anterior sección, existe un operador integral singular T_α tal que $(x')^\alpha = \sigma_{T_\alpha}$. Así, antitransformando en (6), obtenemos

$(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f = i^{|\alpha|} T_\alpha \Lambda^{|\alpha|} f$, donde

$T_\alpha f(x) = a(x) f(x) + \int_{\mathbb{R}^n} k_\alpha(x,x-y) f(y)dy.$

Para $|\alpha| = m$ tenemos $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f =$
$= i^m (\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) T_\alpha) \Lambda^m f \equiv i^m T \Lambda^m f.$

Hagamos aun el siguiente argumento. Sea la ecuación diferencial $\Delta u - \lambda u = f$, con $\lambda < 0$. Tomando transformada de Fourier $|y|^2 \hat{u}(y) - \lambda\hat{u}(y) = \hat{f}(y)$, luego $\hat{u}(y) = \dfrac{\hat{f}(y)}{|y|^2-\lambda}$, $\lambda \neq |y|^2$.

De esta manera $u(x) = \int e^{2\pi i xy} \dfrac{1}{|y|^2-\lambda} \hat{f}(y)dy.$

Si tuviéramos la ecuación de Poisson $\Delta u = f$ obtendríamos formalmente la solución

$$u(x) = \int e^{2\pi i xy} |y|^{-2} \hat{f}(y)dy.$$

Para regularizar el factor $|y|^{-2}$, lo "parchamos" con una función $\Theta \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\Theta(y) = 0$ en una vecindad de origen y $\Theta(y) = 1$ en el infinito. Así obtenemos la representación

$$\int e^{2\pi ixy}\, \Theta(y)|y|^{-2}\, \hat{f}(y)dy.$$

Más generalmente, para el operador diferencial P(D) considerado anteriormente, tenemos

$$\begin{aligned} P(D)\ f(x) &= \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\ (\frac{\partial}{\partial x})^{\alpha} f(x) \\ &= \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) \int e^{-2\pi ixz}\ [(\frac{\partial}{\partial z})^{\alpha} f]^{\wedge}(z)dz \\ &= \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) \int e^{-2\pi ixz}(2\pi iz)^{\alpha}\ \hat{f}(z)dz \\ &= \int e^{-2\pi ixz}[\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)(2\pi iz)^{\alpha}]\hat{f}(z)dz \end{aligned}$$

Esto es,

$$P(D)f(x) = \int e^{-2\pi ixz}p(x,z)\ \hat{f}(z)dz\ , \qquad (7)$$

con $p(x,z) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\ (2\pi iz)^{\alpha}$. [Obsérvese que se tiene también $P(D)\ f(x) = \int e^{-2\pi ixz}$ $[\sum_{|\alpha|\leq m} i^{|\alpha|}\ a_\alpha(x)(z')^{\alpha}]\ (\Lambda^{|\alpha|}f)^{\wedge}(z)dz]$.

Podemos "escarvar" aun más la representación (7) Consideremos la parte homogénea de grado k en

$p(x,z)$. Así, $p_k(x,z) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\ (2\pi iz)^{\alpha} =$

$$\sum_{|\alpha|=k} \frac{a_\alpha(x)(iz)^\alpha}{|z|^k} (2\pi)^k |z|^k = (2\pi)^k |z|^k h_k(x,z),$$

con $h_k(x,z) = \sum_{|\alpha|=k} \dfrac{a_\alpha(x)(iz)^\alpha}{|z|^k}$. Desde que

$p(x,z) = \sum_{|\alpha|=k=0}^{m} p_k(x,z)$, tenemos la representación

$$P(D)f(x)=\sum_{k=0}^{m} \int e^{-2\pi i x.z} p_k(x,z) \hat{f}(z)dz$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \int e^{-2\pi i xz} h_k(x,z) (2\pi)^k|z|^k \hat{f}(z)dz$$

$$= ([\Lambda^k f]^\wedge (z) = (2\pi)^k|z|^k \hat{f}(z))$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \int e^{-2\pi i x.z} h_k(x,z) [\Lambda^k f]^\wedge (z)dz .$$

Luego, si H_k es el operador $H_k g(x) = \int e^{-2\pi i x.z} h_k(x,z) \hat{g}(z)dz$, con $\hat{g} \in L^1$, tenemos la representanción $P(D)f(x) = \sum_{k=0}^{m} H_k(\Lambda^k f)(x)$. En estos argumentos está la idea de operador seudo-diferencial que veremos más tarde.

Una de las más significativas aplicaciones de las integrales singulares fue en el tratamiento de la unicidad de la solución del problema de Cauchy por Calderón; sus teoremas generales sobre la unicidad y existencia en ecuaciones en derivadas parciales son muy profundos. Veamos algunos preliminares comentarios al respecto. El problema de Cauchy consiste (formalmente) en encontrar una solución de la ecuación diferencial $P(D)f = g$, donde g es una función dada, tal que sobre una superficie $S \subset \mathbb{R}^n$ tengamos

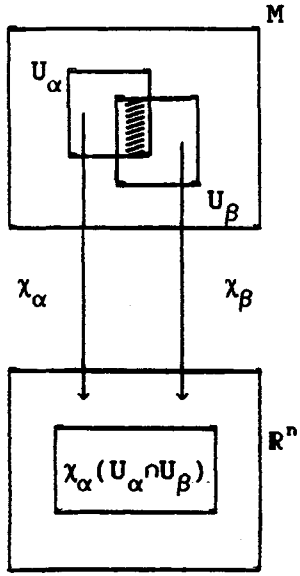
$$f = \varphi_o \ , \ \frac{\partial f}{\partial \nu} = \varphi_1, \ \ldots \ , \ \frac{\partial^{m-1}}{\partial \nu^{m-1}} = \varphi_{m-1}$$

donde ν es una normal a S (en determinado punto) y $\varphi_o, \varphi_1, \ldots , \varphi_{m-1}$ son los dados iniciales de Cauchy.

Decimos que el problema es analítico si g y los $a_\alpha(x)$'s en $\sum a_\alpha(x) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$ son funciones analíticas. En este caso, la unicidad de la solución del problema es garantizado por el teorema de Cauchy-Kowalevska. Holgren, en 1901, establece: "si $P(D)f$ es un operador con coeficientes analíticos, y si los dados iniciales se anulan sobre una superficie regular (no característica) S, entonces cualquier solución f (no necesariamente analítica) de $P(D)f = 0$, con tales dados, se anulan identicamente en una pequeña vecindad de cualquier subconjunto cerrado de S".

Carleman, en 1939, estudia la unicidad de la solución del problema de Cauchy para ecuaciones y sistemas diferenciales de dos variables, quitando la hipótesis de analiticidad, pero asume que las características de la ecuación no sean múltiples. En 1958, Calderón generaliza el resultado de Carleman para el caso de n variables (con $n \neq 3$); es en esta época en que surge la idea de representar un operador diferencial monomio $(\frac{\partial}{\partial x})^{\alpha}$ como una composición de un operador integral singular y una potencia del laplaciano Δ. La prueba del teorema de Calderón es muy técnica; hace uso de refinados argumentos con los operadores integrales singulares. Mencionemos que también Calderón abrió la posibilidad de usar tales operadores en el tratamiento de problemas de contorno para ecuaciones elípticas. En esta orientación se tienen los trabajos de R. T. Seeley, quien extiende a variedades compactas la teoría de los operadores integrales singulares en $\mathbb{R}^n$. En este contexto se aclara el concepto de símbolo en su forma mas general. Mencionemos que por este camino se dieron los recursos para la prueba del famoso teorema del índice por Atiyah-Singer (1963).

§ 5. INTEGRALES SINGULARES SOBRE VARIEDADES



Por razones de completitud de esta exposición vamos a recordar rápidamente algunas ideas sobre variedades diferenciales. Una variedad diferencial C^∞, M, de dimensión n, consiste de un conjunto S y de un atlas A de cartas tal que:

(i) cada carta χ_α es una aplicación 1-1 de un subconjunto U_α de S sobre un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$;

(ii) $\bigcup_\alpha U_\alpha = S$;

(iii) cada $\chi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es abierta y $\chi_\beta \cdot \chi_\alpha^{-1}$ es un C^∞ difeomorfismo de $\chi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ en $\mathbb{R}^n$;

(iv) dados s_1, s_2 en S, existe una carta χ_α cuyo dominio U_α contiene a s_1 y a s_2 ;

(v) A es maximal, esto es, si $\chi : U \subset S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que si $A \cup \{\chi\}$ satisface (i) a (iv), entonces χ está en el atlas A.

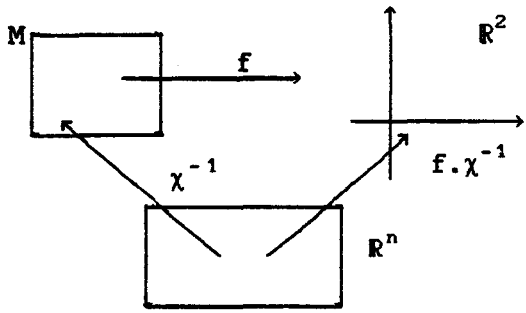
S tiene una única topología tal que todas las cartas χ_α son homeomorfismos. Por la condición (iv) esta topología es de Hausdorff. Un sub-atlas A' de A es un subconjunto tal que $\bigcup_{\chi_\alpha \in A'} U_\alpha = M$. La variedad M es compacta si existe un sub-atlas finito $\chi_1,\ldots,\chi_n$ tal que $\chi_j(U_j)$ es limitado para cada $j = 1,\ldots,n$.

Una función compleja f sobre M es llamada de clase C^k , si la composición $f.\chi^{-1}$ es de clase C^k para todo χ en el atlas. Remarcamos que con M expresamos a la variedad misma o al espacio topológico S . Para cada carta χ definimos n "campos vectoriales locales" $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ sobre el dominio de χ vía:

$$\frac{\partial}{\partial \chi^1}\varphi(p) = \frac{\partial(\varphi.\chi^{-1})}{\partial x_1}(\chi(p)), \ \ldots\ , \frac{\partial}{\partial \chi^n}\varphi(p) = $$

$$= \frac{\partial(\varphi.\chi^{-1})}{\partial x_n}(\chi(p))$$

con $\chi(p) \in D(\chi)$ (dominio de χ). $\frac{\partial}{\partial x_j}$ denota diferenciación respecto a la j^{ma}-variable en $\mathbb{R}^n$.



Sea ahora χ una carta y U su dominio. Si $a \in C^\infty(M)$ con soporte en U, definimos $a\dfrac{\partial}{\partial\chi^j}$ vía:

$$\left(a\frac{\partial}{\partial\chi^j}\right)\varphi(p) = \begin{cases} a(p)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\chi^j}(p) & \ldots \text{ si } p \in U \\ 0 & \ldots \text{ si } p \notin U. \end{cases}$$

$a\dfrac{\partial}{\partial\chi^j}$ es llamado un C^∞ campo vectorial "primitivo". Un *C^∞–campo vectorial* es por definición cualquier suma finita de tales campos vectoriales primitivos. Los C^∞-campos vectoriales forman un módulo sobre $C^\infty(M)$, con multiplicación definido por $\varphi\left(a\dfrac{\partial}{\partial\chi^j}\right) = (\varphi a)\dfrac{\partial}{\partial\chi^j}$. Si χ y χ_o son dos cartas diferentes definidas en U, entonces $\dfrac{\partial}{\partial\chi^j} = \sum_k J_{jk}\dfrac{\partial}{\partial\chi_o^k}$, siendo (J_{jk}) la matriz jacobiana de $\chi_o\chi^{-1}$.

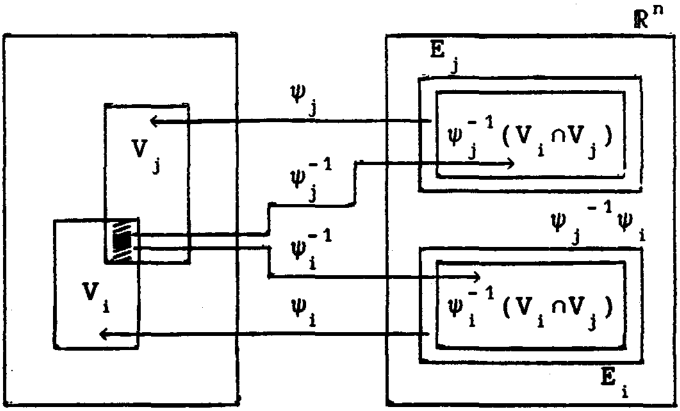
El *plano cotangente* T_x^* en el punto $x \in M$ es el espacio vectorial de las aplicaciones lineales L:[campos vectoriales reales] $\longrightarrow \mathbb{R}^1$ tal que $L(\varphi v) = \varphi(x)\, L(v)$ para todo $\varphi \in C^\infty$ y v un campo vectorial. Una base para T_x^* consiste de las aplicaciones $d\chi^j(x)$ definidas por

$d\chi^j(x)(\sum a_k \frac{\partial}{\partial\chi^k}) = a_j(x)$. Luego, el vector cotagente general en un punto x es de la forma $\sum \xi_j d\chi^j(x)$ y tenemos

$$[\sum \xi_j\, d\chi^j(x)]\ (\sum a_k \frac{\partial}{\partial\chi^k}) = \sum \xi_j\, a_j(x).$$

Por definición,el *espacio cotagente* o *fibrado cotangente* ("cotangent bundle") es la unión $T^* := \bigcup_{\chi\in M} T_x^*$ de todos los planos tangentes. El espacio cotangente es a su vez una C^∞-variedad. Las cartas χ nos permiten transformar funciones y operadores sobre M en funciones y operadores sobre $\mathbb{R}^n$.

En resumen, una variedad diferenciable n-dimensional es un espacio topológico, en el cual cada punto tiene una vecindad homeomórfica a algún conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$.



Por definición, un *sistema de coordenadas diferenciales* en una variedad n-dimensional M es una familia $\{V_j\}_{j \in J}$ de conjuntos abiertos cubriendo M, y para cada j, tenemos un homeomorfismo $\psi_j : E_j \rightarrow V_j$, donde E_j es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ tal que la aplicación

$$\psi_j^{-1}\,\psi_i : \psi_i^{-1}(V_i \cap V_j) \longrightarrow \psi_j^{-1}(V_i \cap V_j)$$

es diferenciable, donde $i,j \in J$.

El sistema de coordenadas es de clase r si tal aplicación tiene derivadas continuas de orden r.

Espacios de Sobolev $L^p_r(M)$, $1 < p < \infty$, $r \leq k$

En lo que sigue M es una variedad compacta de dimensión n y de clase C^k, $k \geq n$. Remarcamos que toda variedad compacta admite una partición finita C^∞ de la unidad,esto es, dado cualquier cubrimiento de M por conjuntos abiertos U_α, existen funciones C^∞ , $\phi_1,\ldots,\phi_m$ tales que

(a) supp $\phi_j \subset U_\alpha$ para cada j, donde supp ϕ_j es el soporte de ϕ_j, que por definición es $\overline{\{x \,/\, \phi_j(x) \neq 0\}}$;

(b) $0 \leq \phi_j \leq 1$;

(c) $\sum_{j=1}^m \phi_j = 1$. La partición es llamada subordinada al cubrimiento $\{U_\alpha\}$.

Asi podemos pensar en una familia finita $\{\phi_j\}$ de funciones C^k tal que supp ϕ_j está en el dominio de un sistema de coordenadas simple. Con cada ϕ_j podemos asociar un particular sistema de coordenadas x^j . Luego, si f es una función definida a.e. en cada dominio de coordenada, tenemos que $\phi_j f$ puede ser considerado como una función de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$.

Sea $1 < p < \infty$, $\lambda \leq k$. Por definición,
$L^p_\lambda(M) = \{f \,/\, \phi_j f \in L^p_\lambda(\mathbb{R}^n)$ para cada $j\}$.
La topología en $L^p_\lambda(M)$ es definido por la norma

$$\|f\|_{\lambda,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leq\lambda} \sum_{j=1}^m \|\phi_j^{1/p}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^\alpha f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)^{1/p}$$

Si $\lambda = 0$ obtenemos $\|f\|_{0,p} = \left(\sum_{j=1}^m \|\phi_j^{1/p} f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)^{1/p}$ $= \|f\|_{p,(v)}$ esto es, $L^p_0(M) = L^p(M,v)$ donde v es la medida $\Sigma\, \phi_j dx^j$. Es importante notar que las normas obtenidas con diferentes sistemas de coordenadas y diferentes $\{\phi_j\}$, son todas equivalentes.

Como es usual, $L^p_{-\lambda}(M) = (L^q_{\lambda}(M))'$, espacio dual, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Un operador T sobre $L^p(M)$ es llamado un operador *regular* de orden m si $T : L^p_{\lambda}(M) \longrightarrow L^p_{\lambda+1}(M)$

y $T^*: L^q_{\lambda}(M) \longrightarrow L^q_{\lambda+1}(M)$

son funciones continuas para $0 \leq \lambda \leq m$. Se tiene el siguiente resultado :

"T es un operador regular de orden m si y sólo si para cada ϕ y ψ en C^k, con soportes en una vecindad coordenada simple, $\phi\ T\ \psi$ considerado como un operador sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$, es regular de orden m."

Operadores Integrales Singulares sobre M y sus Símbolos

Un operador T definido sobre $L^p(M)$, $1<p<\infty$, es un *operador integral singular de tipo* C^∞_β, con $\beta \leq n-1$, si satisface:

(i) para cada ϕ y ψ en C^k sobre M, con soportes compactos disjuntos, $\phi\ T\ \psi$ es un operador compacto y regular de orden $[\beta]$ sobre todo $L^p(M)$;

(ii) para cada ϕ y ψ en C^k con soporte en un común dominio coordenado con coordenadas x , tenemos $\phi\ T\ \psi = \phi\ H\ \psi + R$ donde H es un operador integral singular $C^\infty_\beta(\mathbb{R}^n)$ definido vía

$$Hf(x) = a(x)f(x) + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon} h(x,x-y)\ f(y)dy$$

y donde R es un operador compacto, regular de orden $[\beta]$, sobre $L^p(M)$, $1<p<\infty$.

El *símbolo* de un operador T, C^∞_β, sobre M es la función σ_T definida sobre el fibrado cotangente de M vía $\sigma_T(p,\Sigma\ \xi_j dx_j) = a(x(p))$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|\eta|<1/\varepsilon} e^{i\Sigma\xi_j\eta_j}\ h(x(p),\eta)d\eta$$

con $\eta = (\eta_1,\ldots,\eta_n)$; $p \in (\text{supp}\ \phi) \cap (\text{supp}\ \psi)$. El símbolo σ_T es una función (sobre el fibrado cotagente) homogénea de grado cero, independiente de las coordenadas usadas al definirla.

En resumen podemos decir que los operadores integrales singulares sobre M son dados esencialmente transplantando operadores del espacio euclideano $\mathbb{R}^n$. Muchas áreas del análisis han sido estudiadas en el contexto general de las variedades. Seeley, 1959, estudia las integrales singulares sobre una variedad compacta; Strichartz, 1972, define los espacios H^1 sobre variedades y la acción de ciertos operadores (seudo-diferenciales) sobre esos espacios. Calderón, 1976, elabora una teoría de operadores seudo-diferenciales con aplicaciones a problemas de contorno. Veamos, por ejemplo, como se define el espacio H^1 sobre una variedad compacta C^∞, sin borde. Con tal fin, sea $\{\phi_j\}$ una partición de la unidad C^{∞}, subordinada al cubrimiento de vecindades coordenadas; sea $\psi_j \in C_o^{\infty}$ (con soporte compacto en una vecindad coordenada) tal que $\psi_j \ \phi_j = \phi_j$. Luego, por definición

$$H^1(M) = \{f \in L^1(M) \ / \ \psi_j \ R_i(\phi_j f) \in L^1(\mathbb{R}^n), \ \forall j, \ i\}$$

donde R_i es la transformada de Riesz respecto a un sistema de coordenadas locales. Observemos que $\phi_j f$ puede ser considerada como una función de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$. Definamos

$$L^p(M) = \{f \ / \ \phi_j f \in L^p(\mathbb{R}^n)\}, \ 1 \leq p < \infty ,$$

en donde consideramos la norma

$$\|f\|_{L^p(M)} = (\textstyle\sum_{j=1}^{m} \|\phi_j^{1/p} \ f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)})^{1/p}.$$

En $H^1(M)$ considérase la norma

$$\|f\|_{H^1(M)} = \|f\|_{L^1(M)} + \textstyle\sum_j \sum_i \| \ \psi_j \ R_i(\phi_j f)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} .$$

La definición dada es independiente de la partición de la unidad elegida y de las coordenadas locales.

§ 6. INTEGRALES SINGULARES VECTORIALES

Las integrales singulares vectoriales fueron considerados por Benedek - Calderón - Panzone en 1962. La idea es considerar espacios de Banach ;

así, sean A y B dos espacios de Banach y un núcleo $k(x), x \in \mathbb{R}^n$, que es un operador lineal acotado en $L(A,B)$, localmente integrable en $\mathbb{R}^n-\{0\}$ Entonces consideramos el operador integral singular $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)\, f(y)dy$, bien definido para $f \in L_0^\infty$ (con soporte compacto), con valores en A, donde $x \notin$ sopp f . Volvamos nuestra atención al teorema B de § 3. Si E es un espacio de Banach, pongamos

$$L_E^\infty (\mathbb{R}^n) = \{f \text{ medible, E-valorada } / \|f\|_{L^p_E} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E^p \, du\right)^{1/p}, \ 1 \le p < \infty\}$$

el que es un espacio de Banach. Entonces, la versión vectorial del teorema B es:

Teorema Bv. Sean A y B dos espacios de Banach y $T: L_A^r(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_B^r(\mathbb{R}^n)$ un operador lineal continuo, con $1 \le r < \infty$ fijo. Sea $f \in L_0^\infty$ y $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy$ con $x \notin$ sopp f ; el núcleo k satisface la condición de Hörmander

$$\int_{|x|>2|y|} \|k(x-y)-k(x)\|_{L(A,B)} dx \le C \quad \text{para} \quad y \ne 0.$$

Entonces, $T: L_A^\infty \longrightarrow BMO\ (B)$ es un operador lineal acotado, esto es $\|Tf\|_{BMO(B)} \le C \|f\|_{L_A^\infty}$, con $f \in L_A^r \cap L_A^\infty$, donde

$$BMO(B) = \{h, \text{ con valores en B } / \|g\|_{BMO(B)} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \|g(x) - g_Q\|_B \, dx < \infty\}$$

En esta dirección se tiene el importante teorema de Benedek - Calderón - Panzone :

Teorema. Bajo las hipótesis del teorema B_v, se tiene

(a) T es de tipo débil (1,1), esto es
$$|\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \|Tf(x)\|_B > \lambda\}| \le \frac{C_1}{\lambda} \|f\|_{L^1_A} ;$$

(b) si $1 < p < \infty$, T es de tipo fuerte (p,p), esto es, $\|Tf\|_{L^p_B} \le C_p \|f\|_{L^p_A}$.

Otros resultados,vía los espacios de Banach, han sido obtenidos por N.M. Rivière (entre otros matemáticos), quien considera los integrales singulares usando las familias de Vitali.

§ 7. PESOS E INTEGRALES SINGULARES

Ahora demos atención a ciertas desigualdades con peso, las que aparecen en problemas de análisis armónico y en ecuaciones en derivadas parciales. Motivemos la idea. Consideremos nuevamente la transformada de Hilbert

$$Hf(x) = \text{v.p.}\ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y}\, dy .$$

El resultado fundamental de M. Riesz,ya visto en §2, establece que H es un operador lineal de tipo fuerte (p,p), $1 < p < \infty$.· Esto significa que existe una constante $C_p > 0$ tal que $\int_{\mathbb{R}^1} |Hf(x)|^p \, dx \leq C_p \int_{\mathbb{R}^1} |f(x)|^p \, dx$. Enfatizamos que en este resultado trabajamos con la medida de Lebesque dx . Ahora se especula si al considerar otras medidas $d\mu$ podamos aun tener desigualdades de la naturaleza dada. Bien,esto tiene su propia historia, de la que damos unas breves ideas. Sea $\omega(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, una función localmente integrable, con valores en $[0,\infty]$. Funciones de esta clase se llaman funciones peso. En relación

a la transformada de Hilbert, surge el problema de caracterizar los pesos $\omega(x)$ en $\mathbb{R}^1$ tal que el operador $H: L^p(\omega(x)dx) \longrightarrow L^p(\omega(x)dx)$, $1 < p < \infty$, sea continuo, esto es, que tengamos

$$\int_{\mathbb{R}^1} |Hf(x)|^p \, \omega(x)dx \leq A_p \int_{\mathbb{R}^1} |f(x)|^p \omega(x)dx \qquad (8)$$

Si $\omega(x) = 1$ se tiene la desigualdad de Riesz. Si T es un operador integral singular, como en §3, ¿qué condiciones debemos imponer al peso $\omega(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ y a $1 < p < \infty$, para tener

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p \, \omega(x)dx \leq A_p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, \omega(x)dx \qquad ?$$

Entre otros antecedentes,mencionamos que en 1936 Hardy - Littlewood consideran la medida $d\mu = |x|^\alpha \, dx$, con $-1 < \alpha < p-1$; con ella obtienen una desigualdad semejante a (8). Helson -

Szego, 1960, prueban que para $p = 2$, (8) se satisface si y sólo si , $\omega(x) = e^{\theta_1(x)+H\theta_2(x)}$, donde $\theta_1, \theta_2 \in L^\infty$, con $\|\theta_2\|_{L^\infty} < \frac{\pi}{2}$.

Se hicieron muchos esfuerzos para encontrar resultados generales, así hasta 1972 cuando B. Muckenhoupt encuentra lo fundamental de una teoría de pesos, dando inicio a investigaciones que aun continúan. Muchkenhoupt introduce la clase de pesos A_p, $1 < p < \infty$. Así, $\omega \in A_p$ si existe una constante $C > 0$ tal que para todo cubo (Q bola) $Q \subset \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{-1/p-1}dx\right)^{p-1} \leq C .$$

El ínfimo de tales constantes C se llama "la constante A_p". Observamos que si $p_1 < p_2$, vía la desigualdad de Hölder obtenemos $A_{p_1} \subset A_{p_2}$. Asi mismo, si $p = 2$ tenemos la condición simétrica

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{-1}dx\right) \leq A_2 .$$

Si $p = 1$, decimos que $w \in A_1$, si existe una constante A_1 tal que $M\omega(x) \leq A_1\omega(x)$, donde $M\omega$ es la función maximal de Hardy-Littlewood de ω, definida vía

$$M\,\omega(x) = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |\omega(y)|dy$$

donde $Q = Q(x,r)$ es un cubo de centro x y radio r.

Si $p = \infty$, decimos que $\omega \in A_\infty$ si existen constantes C_1, C_2, $0 < C_1, C_2 < 1$ tal que para todo cubo Q y todo subconjunto medible $E \subset Q$, si $|E| < C_1 |Q|$, entonces $\int_E \omega(x)dx < C_2 \int_Q \omega(x)dx$.

Muckenhoupt, en 1972 establece el

Teorema [M]. Sea $1<p<\infty$ y $\omega \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, $\int_{\mathbb{R}^n} [Mf(x)]^p \omega(x)dx \le A_p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)dx$, para todo $f \in L^p_\omega$ *si y solo si* $w \in A_p$.

Remarcamos que $f \in L^p_\omega$ si $\int |f(x)|^p \omega(x)dx < \infty$.
El resultado de Muckenhoupt fue reprobado por Coifman-Ch.Fefferman en 1974 vía argumentos que hacen uso del lema de descomposición de Calderón - Zygmund (mencionado en §3). Estos resultados estimularon las investigaciones por obtenerse desigualdades con peso,donde los operadores pueden ser de distinta naturaleza (operadores de Calderón-Zygmund,operadores seudo-diferenciales, etc). En general, la idea es: dados un espacio normado E_ω, con peso ω, y $T:E_\omega \to E_\omega$ un operador lineal, ¿qué condiciones debemos dar a ω para que tengamos

$$\|Tf\|_{E_\omega} \le C \|f\|_{E_\omega} \quad ?$$

Aun mas generalmente,si v es otro peso, se plantea la misma pregunta para el operador $T:E_\omega \to E_v$.

Respecto a los operadores integrales singulares,que es lo que nos interesa ahora, Coifman-Ch. Fefferman consideran el operador convolución

$$Tf(x) = (k*f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)\ f(y)dy$$

donde el núcleo k(x) satisface

(a) $\|\hat{k}(x)\|_{L^\infty} \leq C$

(b) $|k(x) \leq \dfrac{1}{|x|^n}$ y

(c) $|k(x) - k(x-y)| \leq \dfrac{C|y|}{|x|^{n+1}}$ si $2|y| < |x|$.

Entonces, si $\omega \in A_p \cap A_\infty$, $1< p< \infty$, se tiene

$$\int |Tf(x)|^p \omega(x)dx \leq A_p \int |f(x)|^p\ w(x)dx.$$

Nota. Actualmente la literatura sobre la teoría de pesos es suficientemente amplia.

§ 8. ESPACIOS DE TIPO HOMOGENEO E INTEGRALES SINGULARES

Sectores del análisis armónico han sido, y son, estudiados en el marco de los espacios de tipo homogéneo, un universo mas general que $\mathbb{R}^n$. Veamos algunas ideas. Sea X un conjunto (no vacío); una seudo-distancia (o cuasi-métrica) sobre X es una aplicación $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

(a) $d(x,y) = d(y,x)$;

(b) $d(x,y) > 0$ si y solo si $x \neq y$,

(c) existe un número real $K > 0$ tal que $d(x,y) \leq K[d(x,z) + d(z,y)]$ para todo $x,y,z \in X$.

Un seudo-bola, de centro x y radio r, es el conjunto $B_r(x) = \{y \in X \,/\, d(x,y) < r\}$. Remarcamos que el adjetivo "seudo" es a veces omitido, y solo hablamos de distancias o bolas, pero entendemos que tratamos con tales conceptos.

Definición. Un espacio de *tipo homogéneo* es un espacio topológico X, provisto de una seudo-distancia d y de una medida de Borel μ tal que:

(i) las bolas $B_r(x)$ forman una base de vecindades abiertas de x ;

(ii) $\mu(B_r(x)) > 0$ si $r > 0$; existe una constante absoluta A tal que

$$\mu(B_r(x)) \leq A\ \mu(B_{r/2}(x)).$$

Nota. Si X no es un espacio acotado, asumimos que $\mu(X) = \infty$.

Ejemplos. (1) $X = \mathbb{R}^n$ provisto de la seudo-distancia $d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^{\alpha_i}$, donde los α_i's son reales positivos, con la medida de Lebesgue μ. Entonces (X,d,μ) es un espacio de tipo homogéneo. (2) $X = \Sigma$, la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$, provisto de la seudo-distancia $d(x,y) = |1 - x.y|^{\alpha}$, siendo α un real positivo; $x.y$ es el usual producto interno; μ es la medida de Lebesgue. (X,d,μ) es un espacio de tipo Homogéneo.

Motivados por el teorema A, §3, tenemos el

Teorema A*. Sea $k(x,y) \in L^2(X{\times}X,\ d\mu \otimes d\mu)$, tal que el operador $Tf(x) = \int_X k(x,y)\ f(y)\ d\mu(y)$ satisface

[a]* existe una constante C_1 tal que $\|Tf\|_{L^2} \leq C_1 \|f\|_{L^2}$;

[b]* existen las constantes C_2 y C_3 tales que

$$\int_{d(x,y_o)>C_2(y,y_o)} |k(x,y) - k(x,y_o)|\, d\mu(x) < C_3, \text{ para todo } y,y_o \in X.$$

Si $f \in L^2 \cap L^p$, $1 < p < \infty$, entonces existe una constante $A_p = A_p(C_1,C_2,C_3)$ tal que $\|Tf\|_{L^p} \leq A_p \|f\|_{L^p}$; esto es, T es de tipo (fuerte)(p,p). Además, T es de tipo débil (1,1), asi

$$\mu\,\{x \in X \;/\; |(Tf)(x)| > \lambda\} \leq \frac{A_1}{\lambda} \|f\|_{L^1}\ .$$

Macías - Segovia han considerado (1979) núcleos de integrales singulares definidos sobre (X,d,μ), asì como desigualdades de los respectivos operadores integrales singulares cuando estos actuan sobre adecuados espacios de Hardy, asi como sobre espacios de Lipschitz.

§ 9. OPERADORES DE CALDERON - ZYGMUND

Los clásicos operadores integrales singulares u operadores de Calderón - Zygmund, han sido presentados en § 2 y § 3, y sus relaciones con otras estructuras en las demás secciones. Motivados en las aplicaciones en ecuaciones diferenciales con coeficientes variables, Calderón - Zygmund extienden sus clásicos operadores de tipo convolución considerando operadores del tipo (no convoluciones)

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} k(x,y)f(y)dy$$

donde ahora el núcleo es de la forma $k(x,y) = k_1(x,x-y)$, que es suficiente regular, tal que:

(a) $k_1(x,\lambda z) = \lambda^{-n}k_1(x,z)$ con $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \neq z \in \mathbb{R}^n$;

(b) $\int_\Sigma k_1(x,z')\, d\sigma(z') = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

Entre las diferentes contribuciones hechas a la teoría, la hecha por R. Coifman - Y. Meyer en 1978 es significativa pues empezaron un estudio sistemático de tales operadores en un contexto mas general, operadores que fueron bautizados como "operadores de Calderón-Zygmund" (OCZ). Así, Coifman-Meyer consideran una nueva definición de OCZ, las cuales contienen diferentes clases de operadores, los cuales ya no son convoluciones.

Usando el lenguaje de las distribuciones, de un modo general, un operador integral es definido sobre el espacio de las funciones prueba $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, via $T\phi(x) = \int k(x,y)\phi(y)dy$, con $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, donde el núcleo k debe satisfacer ciertas condiciones a fin de garantizar la existencia de la integral. Por ejemplo, ya hemos visto el caso en que k(x) es un núcleo singular de la forma

$$k(x,y) = \Omega\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right) \frac{1}{|x-y|^n}$$

con $\Omega \in L^1(\Sigma)$ y $\int_\Sigma \Omega = 0$. Vimos que la integral debe ser interpretada en el sentido del valor principal.

En el sentido de las distribuciones, el operador integral T es interpretado considerando al núcleo k como una distribución sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, entonces el operador $T:\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$(espacio de las distribuciones) es definido por la relación

$$\langle T\varphi,\phi\rangle = \langle k,\phi \otimes \varphi\rangle \qquad (9)$$

con ϕ, $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ y $(\phi \otimes \varphi)(x,y) = \phi(x)\varphi(y)$.

El saber cuando un operador lineal T es limitado sobre los espacios de Lebesgue L^p, $1\leq p<\infty$, fue, y es, una preocupación de los analistas en distintas épocas. Ya sabemos que los clásicos operadores de Calderón-Zygmund son limitados, si $1<p<\infty$, en tales espacios. Esencialmente esto es debido a que tales operadores son del tipo convolución, y estos operadores conmutan con traslaciones. En esta dirección se tiene un teorema (recíproco)general (Hörmander,1960):"si $T:L^p\longrightarrow L^p$ es un operador lineal limitado, $1<p<\infty$, el cual conmuta con traslaciones, entonces existe una distribución temperada $u \in S'$ tal que $T\varphi = \varphi * u$ para todo $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$".

Las distribuciones $u \in S'$ son llamadas los "convolutores" de L^p ; el estudio de estas distribuciones es un capítulo especial del análisis armónico.Volviendo al operador definido según (9), ¿cuándo T es limitado o continuo sobre L^p ?. Un poco guiados por la condición de homogenidad de grado-n impuesto a los núcleos clásicos de Calderón-Zygmund, hacemos el siguiente argumento:

la distribución K, definida sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, tiene singularidad sobre la diagonal $x = y$; luego se impone la condición:

[C.Z.1] En el complemento de la diagonal $x = y$, $k(x,y) \in L^{\infty}_{loc}$ tal que existe una constante $C > 0$ tal que $|k(x,y)| \leq C|x-y|^{-n}$.

En lo sucesivo usaremos la notación: la diagonal es denotado con $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n \ / \ x = y\}$; Δ_c es su complemento. En general, E_c es el complemento de E.

El espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ juega un papel clave en la teoría ya que si un operador satisface [C.Z.1], cierta regularidad y es continua L^2, entonces es continua L^p, $1<p<\infty$. Lamentablemente, operadores que solo satisfacen [C.Z.1) no son necesariamente limitados sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$. Más generalmente, la condición [C.Z.1] no es suficiente para elaborar una teoría L^p . Motivados por la condición [b] del teorema A. § 3, se exige la condición:

[C.Z.2] Existe una constante $C > 0$ tal que

$$\int_{|x-y|\geq 2|x-x'|} |k(x,y) - k(x',y)|dy \leq C, \text{ para todo } x,x' \in \mathbb{R}^n.$$

Una amplia clase de núcleos satisfacen la condición [C.Z.2]. Así,

(i) Sea $\Omega(x)$ una función continua, con $\int_{\Sigma}\Omega = 0$, tal que su módulo de continuidad

$$\omega(t) = \sup_{|x-x'|\leq t} |\Omega(x) - \Omega(x')| \quad , \quad |x| = |x'| = 1,$$

satisface la condición de Dini $\int_0^1 \omega(t) \frac{dt}{t} < \infty$.

Entonces el núcleo $k(x,y) = \text{v.p}\ \Omega(\frac{x-y}{|x-y|})\frac{1}{|x-y|^n}$ satisface [C.Z.2].

(ii) Sean $0 < \alpha \leq 1$ y la clase

$$Z_\alpha = \{k(x,y)\ /\ k \text{ satisface [C.Z.1] y } \sup_{|x-y|\geq|x-x'|>0} \{\frac{|x-y|^{n+\alpha}}{|x-x'|^\alpha} |k(x,y) - k(x',y)|\} < \infty\}$$

Si $k \in Z_\alpha$, entonces k satisface [C.Z.2].

(iii) Ciertos argumentos para el caso $\alpha = 1$ en (ii) llevan a considerar el gradiente $\nabla_x k(x,y)$ como una función localmente limitada en Δ_c, tal que $|\nabla_x k(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{n+1}}$, para una cierta $C > 0$.

Diferentes núcleos que aparecieron en el estudio de los operadores integrales singulares satisfacen esa condición, asi como los símbolos de ciertos operadores seudo-diferenciales. Estos argumentos sugieren considerar la

Definición. K es llamado un *núcleo "standard"* si $K:\Delta_c \to \mathbb{C}$ es una función continua para la que existe una constante $C > 0$, tal que para todo $(x,y) \in \Delta_c$ se tiene

((1)) $|k(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n}$;

((2)) $|\nabla_x k(x,y)| + |\nabla_y k(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{n+1}}$, donde el gradiente es tomado en el sentido de las distribuciones.

Pongamos $C(k) = \min\{C \ / \ C$ satisface $((1))$y$((2))\}$ la que es llamada la constante del núcleo k.

Esta clase de núcleos sirve para construir los OC2 . Asi tenemos la

Definición. El operador $T:\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ es llamado un *operador de Calderón–Zygmund* si:

(i) T se extiende a $L^2(\mathbb{R}^n)$ como un operador lineal acotado;

(ii) existe un núcleo "standard" k tal que para todo $f \in L^\infty_o(\mathbb{R}^n)$ se tiene la representación $Tf(x) = \int k(x,y)f(y)dy$ a.e. sobre $(\text{soppf})_c$ donde soppf es el soporte de f.

Si T es un OCZ consideramos

$$\|T\|_{CZ} = \|T\|_{(L^2,L^2)} + C(k).$$

Es natural esperar que como ejemplo de OCZ estén los operadores convolución, como los dados en §3. Estos nuevos operadores (OCZ) son tales que $T:L^p(\omega(x)dx) \longrightarrow L^p(\omega(x)dx)$ es un operador acotado, con $\omega \in A_p$, $1<p<\infty$. Asimismo, si T es un OCZ entonces $T : H^1 \longrightarrow L^1$ y $T : L^\infty_o \longrightarrow BMO$ son operadores acotados. Luego, vía argumentos de interpolación se tiene que $T : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$, es acotado. Veamos la siguiente observación. Sea $f \in L^\infty_o(\mathbb{R}^n)$ tal que sopp $f \subset Q$, Q un cubo abierto en $\mathbb{R}^n$. Asumamos que $T:L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ es acotado.

Entonces

$$\int_{\bar{Q}} |Tf|dx \le |\bar{Q}|^{1/2} \left(\int_{\bar{Q}} |Tf|^2 dx\right)^{1/2}$$

$$\le C|\bar{Q}|^{1/2}\left(\int_{\bar{Q}} |f|^2 dx\right)^{1/2} \le C|Q|\|f\|_{L^\infty}$$

Luego, si T es un operador acotado sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces T satisface la propiedad [H]:

"si $Q \subset \mathbb{R}^n$ y $f \in L_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ con sopp $f \subset Q$

entonces se tiene

$$\int_{\bar{Q}} |Tf|dx \le C|Q|\|f\|_{L^\infty}".$$

El recíproco vale, esto es, "si T satisface la propiedad [H] entonces T es acotado sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$" Esto sigue del interesante

Teorema. Sea T un operador asociado a un núcleo "standart". Entonces,

$$T \text{ satisface [H]} \Leftrightarrow T : H^1 \longrightarrow L^1 \text{ es acotado}$$

$$\Leftrightarrow T : L_o^\infty \longrightarrow BMO \text{ es acotado.}$$

A esta altura ya estamos convencidos sobre la conveniencia de saber cuando un operador es continuo en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Un delicado problema, a inicios de los 80's, fue encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un operador T sea continuo en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Hasta 1982 los analistas sabían como probar la L^2-continuidad de una amplia clase de operadores; sin embargo, el problema seguía abierto. A fines de aquel año, G. David - J.L.Journé encontraron una solución al problema. Hallaron una condición necesaria y suficiente para que un operador T, cuyo núcleo k satisfaciendo ((1)) y ((2)) citados antes, sea un operador acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Mas concretamente se tiene el célebre

Teorema [David-Journé]. Un operador "standard" T es acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rl} \text{(i)} & T(1) \in BMO \\ \text{(ii)} & T^*(1) \in BMO \\ \text{(iii)} & T \text{ es un operador de orden cero} \\ & \text{en el sentido débil;} \end{array}$$

donde T^* es el operador adjunto de T y la condición (iii) significa que $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ es un operador lineal continuo, y para todo subconjunto limitado B de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, existe una constante $C = C(B)$ tal que para todo $\phi, \psi \in B$ se tiene

$$| < T\,(\tau_u\, h_\lambda\, \phi),\ \tau_u\, h_\lambda\, \psi >| \le C\, \lambda^n$$

para todo $u \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$, donde τ_u es el operador traslación y h_λ es la dilatación

$$[h_\lambda\, \psi(x) = \psi(\tfrac{x}{\lambda})].$$

Posteriormente, en 1985, David, Journé y S. Semmes extendieron el teorema a los espacios de tipo homogéneo, unificando así ideas y resultados en el análisis armónico que fueron elaborados en las décadas de los 70's y 80's. También en 1985, K.Yabuta extiende los OCZ al considerar los OCZ de tipo $\omega(t)$, donde $\omega(t)$ es una función no-negativa, no-decreciente sobre $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$, satisfaciendo la condición de Dini $\int_0^1 \omega(t)\frac{dt}{t} < \infty$

Una función continua $k(x,y)$ sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es llamado un *núcleo "standard" de tipo $w(t)$* si tenemos

$$((1))' \qquad |k(x,y)| \le \frac{C}{|x-y|^n} \;;$$

$$((2))' \qquad |k(x,y) - k(x_o,y)| + |k(y,x) - k(y,x_o)| \le \frac{C}{|x_o-y|^n}\,\omega\left(\frac{|x_o - x|}{|y - x_o|}\right)$$

para todo x,x_o,y tal que $|y-x_o| > 2|x-x_o|$.

Nuevamente, el ínfimo de las C's satisfaciendo ((1))' y ((2))' es llamada la constante del núcleo k. Similarmente a lo definido anteriormente tenemos la

Definición. Un operador lineal $T:S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$ (distribuciones temperadas) es llamado un *OCZ de tipo $w(t)$* si tenemos

(i)' T se extiende a $L^2(\mathbb{R}^n)$ como un operador lineal acotado, esto es,

$\|Tf\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ para todo $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$;

(ii)' existe un núcleo "standard" de tipo $\omega(t)$ tal que para todo $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ se tiene $Tf(x) = \int k(x,y)f(y)dy$, a.e. sobre $(\text{soppf})_c$

Yabuta, vía los núcleos de tipo $\omega(t)$, prueba una versión del teorema de David-Journé. También se tiene el generalizado resultado.

Teorema. Sea T un OCZ de tipo $\omega(t)$. Entonces,

(a) para todo $v \in A_p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$, tenemos $\|Tf\|_{L^p(v\,dx)} \leq C_{p,v}\|f\|_{L^p(v\,dx)}$;

(b) para todo $v \in A_1(\mathbb{R}^n)$, T es un operador de tipo débil (1,1), esto es,

$$v\{x \in \mathbb{R}^n \,/\, |Tf(x)| > \lambda\} \leq \frac{C_\omega}{\lambda}\|f\|_{L^1(vdx)}$$

(c) $\|Tf\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$

(d) $\|Tf\|_{BMO(\mathbb{R}^n)} \leq C_\infty \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$

Más recientemente, en 1988, E.Nakai-K.Yabuta han generalizado los OCZ de tipo $\omega(t)$ actuando sobre los espacios $L^{p,\Phi}$, una generalización de los espacios de Stampacchia $L^{p,\lambda}$, y de esta manera, en particular, aparecen los espacios BMO_φ y Λ_φ.

§ 10. OPERADORES SEUDO-DIFERENCIALES

En la sección § 4 hemos visto que un operador diferencial parcial

$$P(D)\ f(x) = \sum a_\alpha(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x) \quad , \quad a_\alpha(x) \in C^\infty ,$$

actuando sobre $f \in S$ (clase de Schwartz), puede escribirse en la forma

$$P(D)\ f(x) = \int e^{-2\pi i x.z}\ p(x,z)\ \hat{f}(z)dz \qquad (10)$$

con $p(x,z) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)(2\pi iz)^\alpha$ y $\hat{f}$ la transformada de Fourier de f. $p(x,z)$ es llamado el *símbolo* del operador.

En esta sección hablaremos brevemente sobre una amplia clase de operadores, llamados operadores seudo-diferenciales, y que son (motivados por el anterior argumento) naturales extensiones de los operadores diferenciales parciales, ya que aquellos operadores son de la forma (10) pero con $p(x,z)$ no necesariamente un polinomio. Ahora $p(x,z)$ es una función en $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ que satisface ciertas estimativas.

Historicamente Lagrange y Cauchy consideraron al mas simple operador diferencial $\frac{d}{dx}$ y al operador $f(\frac{d}{dx})$ le asociaron la función $f(\xi)$. Esta idea fue usada por Heaviside en su trabajo sobre problemas de transmisión electromagnética.

A menos de notación, la cuestión de asociar a un operador diferencial una función de dos variables $h(x,\xi)$ aparece en los albores del análisis funcional, en particular en la teoría de operadores. Tal estrategia surge relacionado con la mecánica cuántica en 1926, siendo H. Weyl quien elabora una teoría de operadores.

Los operadores seudo - diferenciales son un amplio universo; ellos incluyen (además de los operadores diferenciales parciales) a los operadores integrales singulares (OIS); a los operadores singulares integro - diferenciales de la forma $\sum_{|\alpha|\leq m} T_\alpha \left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha$, donde los T_α's son OIS; a los operadores convolución singulares. La construcción de tal universo es toda una evolución de ideas, en donde las investigaciones en los OIS jugaron un papel importantísimo. Ya hemos mencionado en § 3 los pioneros trabajos de Giraud, Miklin y sobre todo los trabajos de A.P. Calderón y A. Zygmund. Recordemos que en § 3 vimos la representación

$$P(D)\ f(x) = \sum_{k=0}^{m} H_k\ (\Lambda^k f)(x)$$

donde H_k y Λ^k son operadores precisados en § 3 . Hubieron ideas precursoras de tal representación.

Se observó que los OIS pueden ser tomados como representaciones particulares de cierta clase de operadores,con la ventaja de ser ahora mas manejables. Esta idea fue dada por Lax en 1963. Por aquella época, hubo la efervecencia de construir una teoría que consolidara muchas ideas que estaban en el ambiente. Se trataba de refinar el álgebra de los operadores de Calderón-Zygmund, y de encontrar un instrumento (lo más general posible) para tratar problemas de ecuaciones en derivadas parciales.

En 1964, A. Unterberger - J. Bokobza extendieron los OIS considerando una clase de operadores de CZ de orden r ; desarrollan un programa que incluye resultados en variedades diferenciales, operadores elípticos, inversión de los operadores de CZ elípticos; generalizan los espacios de Sobolev H^p a H^ρ siendo ρ una función infinitamente diferenciable; introducen los operadores seudo-diferenciables de orden variable.

En 1965, J.J.Kohn - L.Nirenberg publican un trabajo en base a la idea de Lax, en donde los operadores (que ellos llamaron"operadores seudodiferenciales) tienen una mejor representación, pues hacen de ellos una álgebra. Veamos algunos aspectos de esta teoría. La función
$\sigma(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ es un símbolo de grado $s \in \mathbb{C}$

si $\quad \sigma(x,t\xi) = t^{s}\,\sigma(x,\xi) \quad$ con $\quad t \geq 1,\ |\xi| \geq 1.$

El símbolo $\sigma(x,\xi)$ es de clase S, si existen constantes $C_{\alpha\beta\gamma}$ tal que

$$|x^{\alpha}(\frac{\partial}{\partial x})^{\beta}\ (\frac{\partial}{\partial \xi})^{\gamma}\ \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta\gamma}\ ,\ \text{con}\quad x\in\mathbb{R}^{n},\ |\xi|\leq 1$$

Sea $\sigma(x,\xi)$ un símbolo de grado s.El operador

$$O_{p}(\sigma):S(\mathbb{R}^{n})\longrightarrow C^{\infty}(\mathbb{R}^{n})$$
$$f \longrightarrow O_{p}(\sigma)f(x) = \int e^{-2\pi i\ x.\xi}\sigma(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi$$

es un operador seudo-diferencial de orden $\leq$ Re s donde entendemos que, de un modo general un operador $T:S \longrightarrow S'$ es de orden $\leq k$ (real) si

$$\|Tf\|_{H^{t-k}} \leq C_{t}\|f\|_{H^{t}} \quad \text{para cada real } t.$$

Kohn - Nirenberg observan que todo operador diferencial P(D),con coeficientes constantes,cae en la clase de operadores seudo - diferenciales por ellos considerados. Casi enseguida, Lax y Friedrichs emplean la teoría de Kohn - Nirenberg para tratar problemas de valor de contorno.

Otros aportes en el estudio de los operadores seudo-diferenciales fueron dados por Kumano-Go (1963-1964); Agranovich (1964-1965); R.Seeley (1965); R.Palais en su famoso "Seminario del teorema del index de Atiyah-Singer" (1965); y en especial el trabajo de L.Hörmander (1965), quién considera una amplia clase de operadores seudo-diferenciales de la forma

$$P(D)f(x) = \int e^{-2\pi i x.\xi}\, \sigma(x,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

donde $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω abierto. Ahora el símbolo $\sigma(x,\xi)$ pertenece a la clase

$S^m_{\rho,\delta}(\Omega) = \{\sigma(x,\xi) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$/para todo compacto $K \subset \Omega$ y cualquier multiíndices α y β, existen constantes $C_{\alpha,\beta,K}$ tal que

$$|\partial^\beta_x \partial^\alpha_\xi\, \sigma(x,\xi)| < C_{\alpha,\beta,K}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

siendo m, ρ y δ números reales con $\rho > 0$, $\delta \geq 0$, $x \in K$, $\xi \in \mathbb{R}^n\}$.

Hormander observa que los operadores construidos con símbolos en $S^m_{\rho,\delta}$ contienen como casos particulares a muchos de los operadores considerados en trabajos precedentes, en particular a los clásicos operadores de Calderón - Zygmund.

La teoría de los operadores seudo - diferenciales debe también a A. P. Calderón profundos aportes. La búsqueda de clases cada vez mas amplias de operadores seudo - diferenciales es un reto de presentes y futuras investigaciones. Aportes en esta dirección fueron dadas por A. P. Calderón - R.Vaillancourt (1971), R. Beals - Ch.

Fefferman (1973 - 1976); Beals (1974-1975-1977), y diferentes otros aportes. Más recientemente, en las décadas de los 70's y 80's mencionamos, entre otros, los trabajos de R.Coifman, Y.Meyer, J.Bony, G.Bourdaud, K.Yabuta,...

NOTAS

1. La Integral de Cauchy.

Un tema de significativas implicancias es el relativo al núcleo de Cauchy sobre curvas de Lipschitz. En la sección § 2, hemos motivado algunas históricas cuestiones al respecto. Retomemos esas ideas para definir la integral de Cauchy C(f) vía

$$C(f)\ (z) = \frac{1}{2\pi i}\ \text{v.p.} \int_L \frac{f(t)}{t-z}\ dt$$

para $z \in L$ tal que el valor principal exista. Fue conocido (desde la época de Plemelj, 1908) que para a.e. $z \in L$, el valor principal existe, si y sólo si

$$f_1(t)= \tfrac{1}{2}f(z)+C(f)(z) \qquad \text{y} \qquad f_2(t)= -\tfrac{1}{2}f(z)+C(f)(z)$$

con $z \in L$. (Ver argumentos en § 2). Si L es una curva regular las cosas van bien, pero cuando L no es regular el asunto se complica y se hace un tema muy difícil de tratar en cuanto a la continuidad del operador sobre L^2, por ejemplo. Nuevas ideas tendrían que venir. Así, en 1977 Calderón probó un profundo resultado, como sigue.

Teorema. Sea $A:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de Lipschitz tal que $A' \in L^{\infty}$; sea $L = \{x + i\ A(x)\ /\ x \in \mathbb{R}\}$ su gráfico. Entonces existe una constante absoluta $\delta > 0$ tal que si $\|A'\|_{L^{\infty}} < \delta$, tenemos que la integral de Cauchy C(f) sobre L es un operador acotado sobre L^2.

En 1982, Coifman - Mc Intosh - Meyer perfeccionaron el anterior resultado probando el

Teorema. El operador integral de Cauchy sobre cualquier gráfico de Lipschitz es un operador acotado sobre L^2, y sobre L^p, $1 < p < \infty$.

2. "Ondelettes". (1)

Entre 1985 y 1987 se dieron los fundamentos de una nueva teoría en análisis: la teoría de las bases de "ondelettes", basada en argumentos del análisis armónico. Ella permite analizar, de un modo más simple y eficaz,a las funciones o a las distribuciones, las que habían sido estudiadas hasta entonces sólo con la ayuda del análisis de Fourier. Es conveniente remarcar que antes de la

1) Desconocemos aún la correcta traducción al español.

existencia de los "ondelettes" como una teoría formalizada,ellos ya existían en los trabajos de J. Morlet, un ingeniero geofísico, sobre las señales sísmicas registradas en los campos de exploración petrolíferos. Las construcciones de bases de "ondelettes" surgieron en la pasada década de los años 80's en áreas de la física, de la matemática pura y aplicada. Con tales motivaciones, los investigadores buscaron algoritmos manejables en donde se aprovechen las ventajas de dos sistemas en boga : el sistema trigonométrico y el sistema de Haar. La idea era costruir una nueva teoría de representar funciones (pertenecientes a espacios "clásicos") usando bases hilbertianas que sean bien localizables (en el sentido que precisaremos después) en la variable espacio x , y en la variable frecuencia o variable de Fourier ξ . Este recurso ya había sido usado por los analistas armónicos,como por ejemplo la descomposición de $f \in H^p$ en átomos según R. Coifman. Asimismo, L. Carleson construyó una base incondicional del espacio de Hardy H^1 .

El espacio referencia escogido fue $L^2(\mathbb{R}^n)$, un buen espacio! Así, la base ortonormal de "ondelettes" de L^2 debe permitir analizar a la mayoría de los espacios usuales como son: $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$; los espacios de Sobolev $L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$; los espacios de Hölder Λ_α, los espacios de Hardy H^p, $0<p<1$; los espacios de Besov $B_p^{s,q}$; BMO ; ... Bien, como la teoría de Littlewood-Paley permite caracterizar a tales espacios, ella entra en el escenario de los "ondelettes". Sin embargo, para la construcción de estos "nuevos seres" es necesario usar algo más que la teoría de Littlewood-Paley clásica. Se debe encontrar una forma más simple y más poderosa, lo que se consiguió con la noción del análisis multiresolución, la que fue definida por S. Mallat y Y. Meyer en 1986. Este análisis es fundamental en la construcción de las bases de "ondelettes".

Un *análisis multiresolución* de $L^2(\mathbb{R}^n)$ es, por definición, una sucesión creciente $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de subespacios vectoriales cerrados de $L^2(\mathbb{R}^n)$ que tienen las siguientes propiedades:

(1) $\bigcap\limits_{-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$; $\overline{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} Vj} = L^2(\mathbb{R}^n)$.

(2) Para todo $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ y todo $j\in\mathbb{Z}$, tenemos que

$$f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1} .$$

Así tenemos que $f(x) \in V_j \iff f(2^{-j}x) \in V_o$

(3) Para todo $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ y todo $k\in\mathbb{Z}^n$, tenemos que

$$f(x) \in V_o \iff f(x-k) \in V_o .$$

(4) Existe una función $g(x)\in V_o$ tal que la su-

cesión $\{g(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ es una base de Riesz de V_o .

En general, si H es un espacio de Hilbert, una sucesión $\{e_i\}_{i=0,1,\ldots}$ en H es llamada una *base de Riesz* si existen dos constantes positivas C,C' tal que para toda sucesión de escalares $\{\alpha_i\}_{i=0,1,\ldots}$ tenemos

$$C(\sum_{o}^{\infty} |\alpha_i|^2)^{1/2} \leq \|\sum_{o}^{\infty} \alpha_i e_i\| \leq C'(\sum_{o}^{\infty} |\alpha_i|^2)^{1/2}$$

y si el espacio vectorial de las sumas finitas $\Sigma_o^N \alpha_i e_i$ es denso en H.

Dentro de los análisis multiresoluciones de $L^2(\mathbb{R}^n)$ son de utilidad, en teoría, aquellos que son $\mathcal{r}$-regulares, $\mathcal{r} \in \mathbb{N}$; es decir, cuando podemos elegir la función g en (4) tal que las $D^\alpha g$, $|\alpha| \leq \mathcal{r}$, sean rápidamente decrecientes en el infinito, más precisamente si tenemos

$$|D^\alpha g(x)| \leq \frac{C_m}{(1+|x|)^m} \text{ , para todo } m\in\mathbb{N} \text{ , donde } \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\ |\alpha| \leq \mathcal{r} \qquad [*]$$

Bien, ¿cómo construir un "ondelette"? ... Como sabemos, $V_j \subset V_{j+1}$. Sea W_j el subespacio de V_{j+1} que es ortogonal a V_j, es decir, $V_{j+1}=V_j \oplus W_j$ La sucesión $\{W_j\}$ satisface fundamentalmente (1), (2),(3) y (4), siendo (4) la más delicada y está garantizada por el siguiente teorema de Mallat -

Meyer.

Teorema. Existe una función ψ en W_o que satisface [*] , y tal que $\{\psi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una base *ortonormal* para W_o .

Formalizando estos resultados se puede dar la definición de "ondelette" en la *recta* (el caso $\mathbb{R}^n$ es similar). Sea $m \in \mathbb{N}$. Una función de variable real $\psi(x)$ es llamada un *"ondelette"* de clase m si se verifica:

(a) $D^{\alpha}\,\psi(x) \in L^{\infty}(\mathbb{R})$, $|\alpha| \leq m$ ... propiedad de regularidad del "ondelette".

(b) $D^{\alpha}\,\psi(x)$ es de decrecimiento rápido en el infinito, $|\alpha| \leq m$ ... propiedad de localización (mencionada anteriormente).

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} x^k\psi(x)dx = 0$ para $0 \leq k \leq m$ ... caracter oscilatorio del "ondelette"

(d) La colección de funciones $\{2^{j/2}\psi(2^jx - k)\}_{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Las funciones $2^{j/2}\psi(2^jx - k)$, $j\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$, se llaman los *"ondelettes"* engendrados por la "madre" ψ. Por otro lado,ciertas deficiencias en el tratamiento de los casos límites $L^1(\mathbb{R})$ y $L^{\infty}(\mathbb{R})$ exigen la introducción de una función "padre"

$\varphi(x)$; así se obtienen buenas representaciones de f en términos de φ y de $2^{j/2}\psi(2^j x - k)$. Se considera a J.O. Strömberg como el inventor de los "ondelettes", quien construye a la función $\psi(x) \in C^m$, de decrecimiento exponencial en el infinito tal que $2^{j/2}\psi(2^j x-k)$, $j\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$ es una base ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$. Asimismo, describe a la correspondiente función φ . Lamentablemente, su punto de vista es restringido ya que se aplica sólo a las funciones "splines", y tiene deficiencias en otras situaciones.

La teoría de "ondelettes" está en pleno desarrollo, y es de interés para matemáticos puros y aplicados, así como para físicos e ingenieros. Yves Meyer ha escrito un libro, "Ondelettes et Operateurs" (1990-1991), el que es un tratado en tres tomos:

I. "Les bases d'ondelettes" ;
II. "Les opérateurs de Calderón-Zygmund", y
III. "Applications des opérateurs de Calderón - Zygmund".

BIBLIOGRAFIA

La literatura sobre los temas tratados en esta exposición es amplia. Sólo nos remitimos en especial a libros, monografías o a algunos artículos.Mayores referencias son encontradas en las bibliografías de las mencionadas publicaciones.

[CZ] *Calderón,A.P.—Zygmund,A.*: "On the existence of certain singular integrals" Acta. Math.88. **(1952)**, 85-139.

[C1] *Calderón,A.P.*: "Uniqueness in the Cauchy problem of partial differential equation". Amer. J. Math. **(1958)**, 16-36.

[Co] *Cotlar,M.* : "Condiciones de Continuidad de operadores potenciales y de Hilbert". Bs.As. **(1959)**.

[Se] *Seeley,R.T.*: "Singular integrals on compact manifolds". Amer. J. Math. **(1959)**, 658-690.

[C2] *Calderón,A.P.*: "Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbólicas". Bs.As. **(1960)**.

[BCP] *Benedek.A.—Calderón,A.P.—Panzone,R.*: "Convolution operators on Banach space valued functions". Proc. Nat.Ac.Sci.USA.(1962),356-365.

[Z] Zygmund,A.: "Integrales singulières". Orsay (1965).

[C3] Calderón,A.P.: "Singular integrals". Bull. of the A.M.S. (1966), 427-465.

[S] Stein,E.M.: "Singular integrals and differentiability properties of functions". Princeton University Press. (1970).

[SW]Stein,E.M.—Weiss,G.:"Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces". Princeton University Press. (1971).

[CW] Coifman,R.—Weiss,G.: "Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogenes". Springer-Verlag. 242. (1971).

[N] Neri,U.: "Singular integrals". Springer-Verlag. 200 (1971).

[R] Rivière,N.M.:"Singular integrals and multipliers operators". Ark. Mat.9. (1971), 243-278.

[O] Ortiz,A.: "Operadores integrales singulares" Universidad de Trujillo.(1972)

[CW1] Coifman,R.—Weiss,G.: "Extensions of Hardy spaces and their use in analysis". Bull. A. M. S. (1977),

569-645.

[MS] *Macías,R.–Segovia,C.*: "Algunos aspectos da teoría dos espaços de Hardy". Univ. de Pernambuco. (1978).

[Sa] *Sadosky,C.*: "Interpolation of operators and singular integrals". Marcel Dekker. (1979).

[J] *Journé,J.L.*: "Calderón - Zygmund operators, seudo - differential operators and the Cauchy integral of Calderón". Springer - Verlag. 994. (1983).

[To] *Torrea Hernández,J.*: "Integrales singulares vectoriales". Bahía Blanca (1984).

[DJ] *David,G.–Journé,J.*:"A boundedness criterion for generalized Calderón - Zygmund operators". Annals of Math. (1984), 331-397.

[GR] *García–Cuerva—Rubio de Francia,J.*: "Weighted norm inequalities and related topics". North-Holland. 104. (1985).

[T] *Torchinsky,A.*: "Real variable methods in harmonic analysis". Ac. Press. (1986).

[B] *Bourdaud,G.*: "Analyse fonctionnelle dans l'espace euclidean". Pub.Math.

Paris. (1987).

[O1] Ortiz,A.: **"Tópicos sobre análisis armónico" Universidad de Trujillo.(1988)**

[L] Lemarie.P.G.: **"Ondelettes et operateurs". Orsay. (1990).**

[M] Meyer,Y.: **"Ondelettes" (Ondelettes et opérateurs I). Hermann.París.(1990)**

[Tch) Tchamitchian,Ph.: **"On applications of wavelets bases to operator theory" Córdova. (1991).**