

Ecuaciones Diferenciales y Sistemas Dinámicos*

Rodrigo Bamón †

Estos apuntes contienen dos partes bien definidas. La Primera, es una breve introducción a la teoría general de ecuaciones diferenciales incluyendo los teoremas de existencia y unicidad de soluciones, diferenciabilidad con respecto a condiciones iniciales y algunos otros resultados importantes, que por lo demás están en todo texto de ecuaciones diferenciales. Si bien se incluyen algunas demostraciones, hemos preferido describir métodos de resolución y trabajar con abundantes ejercicios.

La Segunda parte es una introducción a la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales o Sistemas Dinámicos. Se dan algunos conceptos fundamentales para describir las propiedades dinámicas de un sistema y se exponen algunos resultados fundamentales. Naturalmente aquí, se privilegian los ejemplos y los ejercicios.

Primera Parte

1 Existencia y Unicidad de soluciones

En esta parte, así como en muchas otras hacia adelante, nos servirá de texto guía el libro "Licoes de equações diferenciais ordinárias" de Jorge Sotomayor.

Una ecuación diferencial autónoma definida en un abierto U de \mathbb{R}^n es un objeto de la forma

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in U$$

donde $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función por lo menos continua.

*Apuntes para un curso dictado en Perú bajo el marco del convenio Sociedade Brasileira de Matemática - Sociedad Peruana de Matemáticas y con aportes del I.C.T.P.

†Depto. de Matemática, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile. Casilla 653. Santiago - Chile

Una ecuación no autónoma tiene la forma:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (t, x) \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y Ω abierto.

Asociado a una ecuación diferencial está la noción de solución de la ecuación.

Una solución de

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (t, x) \in \Omega,$$

es una función diferenciable $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (I intervalo de \mathbb{R}) de modo que

$$(t, \varphi(t)) \in \Omega \quad \forall t \in I,$$

y

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in I.$$

Las siguientes notaciones suelen utilizarse

$$\dot{\varphi}(t) \equiv \varphi'(t) \equiv \frac{d\varphi}{dt}(t).$$

Ejemplo: Considere $\dot{x} = 3x^{2/3}$ $x \in \mathbb{R}$, ecuación diferencial definida en la recta real. Entonces $\varphi(t) \equiv 0$ es una solución. Otras soluciones son

$$\varphi_c(t) = \begin{cases} 0 & t \leq c \\ (t-c)^3 & t \geq c \end{cases}$$

donde c es un número arbitrario pero fijo.

El problema que consideraremos inicialmente es el siguiente: Dada una ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (t, x) \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

Ω abierto, y dada una condición inicial $x(t_0) = x_0$ con $(t_0, x_0) \in \Omega$, ¿cuándo es que existe una solución $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $t_0 \in I$ tal que $\varphi(t_0) = x_0$? ¿cuándo o bajo qué condiciones, ésta solución es única?. A éste problema se le suele llamar el problema de Cauchy.

Ejemplo: Comprobar que

$$\varphi(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} x_0$$

es una solución al problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t)x & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Ejercicios: Resolver:

1. $\dot{x} = x^2$ $x(0) = x_0$ $x \in \mathbb{R}$
2. $\dot{x} = ax$ $x(0) = x_0$ $x \in \mathbb{R}$
3. $\dot{x} = t \cdot x^2$ $x(t_0) = x_0$ $x \in \mathbb{R}$
4. $\dot{x} = Ax$ $x(0) = x_0$ $x \in \mathbb{R}^n$

A continuación enunciamos los dos principales teoremas de existencia y unicidad de soluciones para el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

Recordamos que una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\Omega \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, Ω abierto, se dice Lipschitziana (en la segunda variable) en Ω si existe constante K tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|$$

para todos $(t, x), (t, y) \in \Omega$. K se llama la constante de Lipschitz de f en Ω .

Ejercicio:

- a) Pruebe que si f es Lipschitziana en Ω entonces es continua con respecto a la segunda variable.
- b) Pruebe que si f es diferenciable respecto a la segunda variable entonces es Lipschitziana.

Teorema 1 Sea $\Omega = I_a \times B_b$ donde

$$I_a = \{t/|t - t_0| \leq a\}$$

y

$$B_b = \{x/|x - x_0| \leq b\}$$

y suponga $|f| \leq M$ en Ω .

Entonces:

- a) (Peano) Si f es continua en Ω entonces (1) tiene al menos una solución definida en I_a donde $\alpha = \min\{a, b/M\}$.
- b) (Picard) Si f es continua y Lipschitziana en Ω entonces (1) tiene una única solución definida en I_a .

En vez de probar éste teorema (cuyas demostraciones se encuentran en todos los textos de ecuaciones diferenciales) aquí sólo enunciamos algunos resultados necesarios para ésta prueba.

Lema de la contracción: Sea (X, d) un espacio métrico completo y $F : X \rightarrow X$ una contracción, es decir

$$d(F(x), F(y)) \leq Kd(x, y) \quad \text{con } 0 \leq K < 1 \quad \forall x, y.$$

Entonces existe un único punto fijo p . Más aún $\forall x \in XF^n(x) \rightarrow p$ si $n \rightarrow \infty$.

Teorema de Arzelá-Ascoli: Sea (X, d) un espacio métrico completo. Sea \mathbf{F} una familia equicontinua de funciones $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$. Si \mathbf{F} es uniformemente acotada, entonces toda sucesión $\{\varphi_n\}$ en \mathbf{F} tiene una subsucesión uniformemente convergente en X .

2 Métodos de resolución de ecuaciones diferenciales.

Ahora que sabemos cuando una ecuación diferencial tiene (al menos localmente) una solución, nos dedicaremos a dar información y describir algunos métodos para efectivamente encontrar tal solución.

2.1 Ecuaciones lineales.

$$\dot{x} = a(t)x$$

tiene solución general

$$x(t) = e^{\int a(s)ds} x_0.$$

La solución con condición inicial $x(t_0) = x_0$ es $x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} x_0$.

2.2 Ecuación lineal no homogénea.

Probar que

$$\dot{x} = a(t)x + b(t) \quad x(t_0) = x_0$$

tiene solución de la forma

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} \gamma(t)$$

para alguna función $\gamma(t)$. Encontrar $\gamma(t)$ y por ende la solución a

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

2.3 Variables separables.

Puesto que $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, la ecuación $\dot{x} = f(x)$ se escribe $\frac{dx}{f(x)} = dt$, o bien $\frac{dx}{f(x)} = dt$. Integrando

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{f(x)} = \int_{t_0}^t dt$$

se obtiene la solución. Lo mismo se puede hacer para las ecuaciones de variables separables

$$\dot{x} = g(t)f(x).$$

Ejercicios:

- Resuelva $\dot{x} = \frac{x^2}{x^2-1}$; $\dot{x} = \frac{x^2-1}{x}$
- $\dot{x} = tx^2e^t$ $x(0) = 2$.
- $\frac{dx}{dt} = tx^3$.
- $(1 + \cos\theta)dr = r \operatorname{sen}\theta d\theta$.

2.4 Ecuaciones lineales autónomas en varias variables.

$$\dot{x} = Ax \text{ con } x \in \mathbb{R}^n$$

y A una matriz real $n \times n$ se llama sistema lineal autónomo en \mathbb{R}^n .
Tiene por solución general:

$$x(t) = e^{At}x$$

donde

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \end{aligned}$$

Ejercicios:

- a) Considerar $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|$, probar que

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \|B\|$$

y que e^{At} converge para todo t . Probar que $\frac{d e^{At}}{dt} = A e^{At}$.

- b) Resuelva

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y grafique algunas curvas soluciones.

- c) Pruebe que

$$e^{\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\operatorname{sen} \beta t \\ \operatorname{sen} \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$$

y grafique alguna de las curvas soluciones de

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ejercicios:

- a) Pruebe que si $AB = BA$ entonces

$$e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt}.$$

Notación: En lo que sigue la solución del problema de Cauchy $\dot{x} = f(x)$ $x(0) = x_0$ la anotaremos por $\varphi(t, x_0)$. Es decir en una segunda coordenada ponemos el punto inicial para $t = 0$.

Ejercicio 5:

- a) Compruebe que la solución $\varphi(t, x_0)$ de $\dot{x} = Ax$ verifica $\varphi(t+s, x_0) = \varphi(t, \varphi(s, x_0))$.
b) Pruebe que toda solución $\varphi(t, x_0)$ de un sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$ es aditiva, es decir $\varphi(t+s, x_0) = \varphi(t, \varphi(s, x_0))$.

2.5 Sistemas de orden superior.

Una ecuación diferencial de la forma

$$F(x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}) = x^{(n)} \quad x^{(i)} \in \mathbb{R} \quad \forall i \quad (2)$$

se denomina ecuación diferencial de orden n .

Una solución de (2) es una función $x: I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$x^{(n)}(t) = F(x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \quad \forall t \in I.$$

Ejemplos:

- a) $x'' + \mu x' + kx = 0$ $k > 0$, $\mu \geq 0$. Oscilador armónico con roce μ .
b) $\theta'' + k \operatorname{sen} \theta = 0$. Péndulo sin roce.

Introduciendo variables auxiliares es posible reducir una ecuación de orden n en un sistema de orden 1. De hecho para una ecuación de segundo orden $F(x, x') = x''$ denominando $y = x'$ se obtiene el sistema de primer orden:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = F(x, y) \end{cases}$$

Ejercicio:

- a) Pruebe que si $x(t)$ es solución de $F(x, x') = x''$ entonces $\varphi(t) = (x(t), x'(t))$ es solución de

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = F(x, y) \end{cases}$$

Recíprocamente, si $(x(t), y(t))$ es solución de

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = F(x, y) \end{cases}$$

entonces $x(t)$ es solución de $F(x, x') = x''$.

- b) Considere la ecuación del oscilador armónico y transformela en un sistema de primer orden.
Encuentre las soluciones del sistema correspondiente.
- c) Pruebe que si los autovalores de una matriz 2 dimensional A son complejos entonces las soluciones de $\dot{x} = Ax$ espiralan en torno al origen. Pruebe el recíproco.
- d) Averigüe cuándo las soluciones del oscilador armónico oscilan en torno al punto de equilibrio. Interprete mecánicamente.

2.6 Cambio de variables

Dado un sistema $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, a veces es conveniente escribir la misma ecuación en otras coordenadas. Suponga que $y = \psi(x)$ representa un cambio de coordenadas. Es decir la función ψ es diferenciable y tiene inversa $x = \psi^{-1}(y)$, también diferenciable. Entonces por regla de la cadena

$$\dot{y} = D\psi_x \dot{x}$$

Reemplazando x y \dot{x} se obtiene

$$\dot{y} = D\psi_x f(x) = D\psi_{\psi^{-1}(y)} f(\psi^{-1}(y)).$$

En resumen:

$$\dot{y} = D\psi_{\psi^{-1}(y)} f(\psi^{-1}(y)) \quad (3)$$

es la ecuación $\dot{x} = f(x)$ en la nueva coordenada y .

Ejercicio:

- Pruebe que si $x(t)$ es solución de $\dot{x} = f(x)$ entonces $y(t) = \psi(x(t))$ es solución de (3) y recíprocamente.
- Cambie coordenadas $y = Px$ en el sistema lineal $\dot{x} = Ax$ (aquí P es una matriz invertible).
Observe que todo sistema $\dot{x} = Ax$ se puede escribir mediante cambio de coordenadas como un sistema lineal $\dot{x} = Jx$ con J una matriz de Jordan.

Ejercicio:

- Pruebe que el cambio de variables $x^{1-n} = y$ transforma la ecuación de Bernoulli $\dot{x} = a(t)x + c(t)x^n$ en una ecuación lineal.
- Una ecuación de la forma $\dot{x} = f(\frac{x}{t})$ $t \neq 0$ se llama ecuación homogénea. Pruebe que el cambio de variable $x = yt$ transforma ésta ecuación en una de variables separables.
- Encuentre valores de α y β de modo que $\dot{x} = at^\alpha + bx^\beta$ se transforma en una ecuación homogénea mediante un cambio de variable $x = y^m$.

3 Algunos resultados fundamentales.

Sea $\dot{x} = f(x)$ una ecuación diferencial autónoma definida en un abierto U de \mathbb{R}^n . (i.e. $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$). Suponga f diferenciable. A partir del teorema de existencia y unicidad local se prueba que para cada punto $x \in U$ existe una única solución de $\dot{x} = f(x)$; $x(0) = x$ dada por $\varphi_x: I_x \rightarrow U$ con $0 \in I_x$ e I_x intervalo maximal bajo estas condiciones.

Anotando la condición inicial x en la segunda coordenada de φ se obtiene una función

$$\varphi: D = \{(t, x)/x \in U, t \in I_x\} \rightarrow U.$$

tal que

$$\varphi(0, x) = x \quad \text{y} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = f(\varphi(t, x)) \quad \forall t \quad \forall x.$$

La función φ se denomina el flujo de la ecuación $\dot{x} = f(x)$.

En el siguiente teorema resumimos una serie de propiedades importantes del flujo.

Teorema 2 a) Si $I_x = (a, b)$ con $b < \infty$ entonces $\varphi(t, x) \rightarrow \partial U$ cuando $t \rightarrow b$.
Análogamente si $a > -\infty$.

b) La aplicación $\varphi : D \rightarrow U$ es continua y verifica

$$|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)| \leq e^{K|t|}|x - y| \quad \forall t \in I_x \cap I_y.$$

donde K es una constante de Lipschitz para f en U (para la prueba use desigualdad de Gronwall).

c) $\varphi : D \rightarrow U$ es diferenciable. Más aún $t \rightarrow D_2\varphi(t, x)$ es solución del siguiente sistema lineal no autónomo de ecuaciones diferenciales para matrices:

$$\begin{cases} \dot{Z} = Df_{\varphi(t,x)}Z & Z \in M(n \times n) \\ Z(0) = I & I \text{ la matriz identidad} \end{cases}$$

d) $\det D_2\varphi(t, x) = e^{\int_0^t \operatorname{div} f(\varphi(s,x)) ds}$

Esta fórmula no es otra que la fórmula de Liouville aplicada al sistema en c).

Ejercicio:

- Considere el sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$ con f diferenciable y $\operatorname{div} f \equiv 0$. Pruebe que el flujo del sistema preserva volumen.
- Pruebe que dado $\varepsilon > 0$ y $T \in I_x$, $T > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $T \in I_y$, $\forall y$ con $|y - x| < \delta$ y además $\|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, T]$.

4 Miscelanea de Ejercicios.

a) Pruebe que las soluciones del sistema $\dot{x} = A(t)x$ $x \in \mathbb{R}^n$ forman una \mathbb{R} -espacio vectorial.

Sean $x_i(t)$ $i = 1, \dots, n$ soluciones de $\dot{x} = A(t)x$ tales que

$x_i(0) = e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ donde el 1 está en la i -ésima coordenada.

Pruebe que toda solución $x(t)$ de $\dot{x} = A(t)x$ es combinación lineal de las $\{x_i(t)\}$.

Resuelva

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(0) = x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \end{cases}$$

La matriz

$$\Phi(t) = (x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t))$$

donde los $x_i(t)$ se escriben como columnas es una matriz fundamental del sistema.

Pruebe que $x(t) = \Phi(t)x_0$ es la solución al problema de Cauchy anterior.

b) Sean

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- i) Encuentre una base de soluciones para $\dot{x} = Ax$ y pruebe que toda solución de esta ecuación tiende para 0 cuando $t \rightarrow -\infty$.
- ii) Encuentre la solución $x(t)$ de $\dot{x} = Bx$ con $x(0) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$. Pruebe que $|x(t)|$ es acotada si y solo si $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.
- c) Pruebe
 i) $|e^A| \leq e^{|A|}$ ii) $\det e^A = e^{\text{Traza} A}$
- d) Suponga que μ no es valor propio de A . Pruebe que la ecuación $\dot{x} = AX + e^{\mu t}b$ tiene una solución de la forma $x(t) = ve^{\mu t}$.
- e) Encuentre la solución de $\ddot{x} + x = g(t)$ con $x(t_0) = x_0$ $x'(t_0) = x'_0$.
- f) Pruebe que no necesariamente $\Phi(t) = e^{\int_0^t A(s) ds}$ es matriz fundamental de $\dot{x} = A(t)x$. Encuentre condiciones bajo las cuales ésto si ocurre.
- g) Haga un esquema aproximado de las soluciones de $\dot{x} = Ax$ en los siguientes casos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Segunda Parte

Esta Segunda parte es algo independiente de la Primera. A quienes ya han seguido un curso de Ecuaciones Diferenciales se les recomienda omitir la Primera Parte y comenzar por la Segunda.

El punto fundamental aquí es que no nos interesa resolver ecuaciones diferenciales. Nos interesa sí, conocer propiedades geométricas o dinámicas de éstas: ¿Existen soluciones estacionarias?, ¿periódicas?, ¿hay recurrencias?, ¿hay soluciones estables?, etc, etc. Estas son tipos de preguntas que nos interesa responder para un sistema dado. Otro tipo de inquietud tiene que ver con propiedades genéricas, estabilidad estructural, etc. No nos detendremos mucho en éstos asuntos.

1 Generalidades

En todo primer curso de ecuaciones diferenciales aprendemos que

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in U, \quad U \text{ abierto de } \mathbb{R}^2$$

es una ecuación diferencial en dos variables x, y , $(x, y) \in U$. En general se supone que f y g son funciones diferenciales. Si escribimos $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $X(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ entonces hablamos de un campo de vectores en U : a cada punto $(x, y) \in U$ se le asigna un vector, a saber, $X(x, y)$. Fig.1a.



Fig.1a: Campo de vector en $U \subset \mathbb{R}^2$



Fig.1b: Flujo del Campo.

Sabemos también por los cursos de ecuaciones diferenciales que dado un campo de vectores X en U y dado $p \in U$, existe una única curva $\varphi :]a, b[\rightarrow U$ con $0 \in]a, b[$, $|a, b|$ maximal, y tal que $\varphi(0) = p$ y $\dot{\varphi}(t) = X(\varphi(t)) \quad \forall t \in]a, b[$.

Tal curva se llama solución (u órbita) de X por p . El punto p se llama condición inicial y es costumbre anotar éste punto como segunda coordenada para φ . Es decir se escribe $\varphi(t, p)$ y se habla del flujo de X . La condición $\dot{\varphi}(t, p) = X(\varphi(t, p))$ indica que $\varphi(t, p)$ es aquella curva que tiene su vector tangente $\varphi'(t, p)$ prescrito por el campo X . Fig.1b.

Ejemplos:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases} \quad \text{tiene flujo } \varphi(t, (x_0, y_0)) = (e^t x_0, e^t y_0)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad \text{tiene flujo } \varphi(t, (x_0, y_0)) = (e^t x_0, e^{-t} y_0)$$

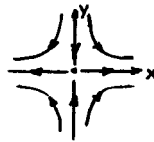
$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases} \quad \text{tiene flujo } \varphi(t, (x_0, y_0)) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Si en cada uno de estos ejemplos graficamos en el plano cada una de sus órbitas, obtendremos las siguientes configuraciones de órbitas:

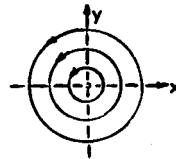
1)



2)



3)

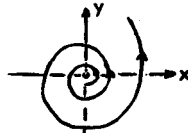


Vemos así que el conjunto de órbitas de un campo de vectores constituye una partición del plano la cual denominamos configuración de órbitas o diagrama de fase de X en U .

Ejemplo 4:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x + y \end{cases} \quad \text{tiene flujo } \varphi(t, (x_0, y_0)) = e^t \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

y diagrama de fase:



En lo que sigue de éstas notas daremos información acerca de los diagramas de fase de campos de vectores en el plano y en particular de campos polinomiales, es decir, campos $X(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ donde f y g son expresiones polinomiales en x e y .

Observamos que en todos los ejemplos anteriores (que corresponden a campos polinomiales de grado 1) hemos dado expresiones explícitas para el flujo y a partir de éste (graficando cada curva solución) hemos encontrado el diagrama de fase correspondiente. Esto no será ni puede ser el procedimiento general para obtener diagramas de fase. Basta considerar por ejemplo

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

para ver la dificultad de encontrar el flujo de un campo. Hacer esto significaría de hecho resolver la ecuación diferencial, y todos sabemos por los cursos de ecuaciones diferenciales que son muy pocas las ecuaciones para las cuales se conocen métodos de resolución.

Desde la invención del cálculo infinitesimal y la consiguiente aparición de las ecuaciones diferenciales, se intentó por siglos (y fué objetivo principal) encontrar métodos para resolver más y más tipos diferentes de ecuaciones diferenciales. Fué Henri Poincaré, en 1881, quien puso énfasis no en la expresión cuantitativa de las soluciones, pero sí en sus propiedades cualitativas. A partir de entonces, crece el interés por estudiar propiedades geométricas y/o topológicas de las soluciones de una ecuación diferencial. Nacen nuevos conceptos, métodos y perspectivas.

Estas notas corresponden a una breve introducción al estudio de diagramas de fase de campos de vectores en el plano. Definiremos algunos conceptos en términos de los cuales podemos describir los diagramas de fase y daremos también algunos métodos para llegar a describirlos. Daremos ejemplos sin hacer demostración alguna, estas quedan para el lector.

Para terminar, digamos algunas palabras sobre campos polinomiales: El interés por este tipo de campos tiene principalmente dos fuentes: la primera reside en que Henri Poincaré inició el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales considerando precisamente éstos campos. Es interesante (y un desafío) notar que aún quedan sin resolver importantes preguntas, como por ejemplo las contenidas en el problema 16 de Hilbert, las cuales enunciamos en la Sección 3 de éstas notas. La otra fuente de interés reside en las aplicaciones. En efecto, campos polinomiales en el plano modelan a menudo diversos tipos de fenómenos naturales: oscilador armónico en mecánica, ecuación de Van der Pol en circuitos electrónicos y otros, ecuaciones de Volterra-Lotka en dinámica de poblaciones. Esto para citar los ejemplos más conocidos.

2 Diagrama de fase

En esta Sección consideraremos campos

$$X \begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

con f y g diferenciales. Describimos conceptos y métodos para estudiar sus diagramas de fase.

2.1 Singularidades y puntos regulares

Un punto (x_0, y_0) se dice singularidad de X si $X(x_0, y_0) = (0, 0)$. En caso contrario se dice que es un punto regular de X .

Si $p_0 = (x_0, y_0)$ es singularidad de X entonces $\varphi(t, p_0) \equiv p_0 \forall t$. Es decir, la órbita de X por p_0 está estacionada en p_0 . Es por esto que a veces se le llama también punto de equilibrio.

En la vecindad de un punto regular p_0 , las órbitas pasan con velocidades próximas a $X(p_0)$ (ver Figura) y el flujo en esa vecindad es un conjunto de curvas "paralelas".

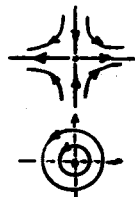


En la vecindad de una singularidad las órbitas tienen diversos tipos de comportamientos. Revisando los ejemplos vistos anteriormente encontramos los siguientes:

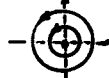
Esta singularidad se llama **nodo**: las órbitas vecinas salen (**nodo repulsor**) o entran (**nodo atractor**) de la singularidad con direcciones definidas.



Esta singularidad se llama **silla**. Hay dos órbitas que salen y dos que entran en la singularidad. Las demás órbitas pasan.



Esta singularidad se llama **centro**. Todas las órbitas vecinas son curvas cerradas.



Esta singularidad se llama **foco**. Las órbitas espiralan desde (**foco repulsor**) o hacia (**foco atractor**) la singularidad.



Si $p_0 = (x_0, y_0)$ es una singularidad de $X = (f, g)$ entonces la matriz

$$DX_{p_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(p_0) \end{pmatrix}$$

contiene información respecto a qué tipo de singularidad corresponde p_0 . De hecho si λ_1 y λ_2 son los valores propios de DX_{p_0} entonces

- i) $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow p_0$ es una silla.
- ii) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0, \lambda_1$ real $\Rightarrow \begin{cases} p_0 & \text{nodo repulsor si } \lambda_1 > 0 \\ p_0 & \text{nodo atractor si } \lambda_1 < 0 \end{cases}$
- iii) $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \beta \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} p_0 & \text{foco repulsor si } \alpha > 0 \\ p_0 & \text{foco atractor si } \alpha < 0 \end{cases}$
- iv) $\lambda_1 = i\beta, \beta \neq 0 \Rightarrow p_0$ las órbitas giran en torno al origen.
- v) $\lambda_1 \lambda_2 = 0 \Rightarrow$ puede aparecer otro tipo de singularidades.

Ejemplo 5: $\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$ tiene diagrama de fase



Ejercicio 1: Haga diagrama de fase de $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - \varepsilon \\ \dot{y} = -y \end{cases}$ para distintos valores de ε .

2.2 Órbitas periódicas

Si $\varphi(t, p)$ es una órbita del campo $X = (f, g)$ tal que $\varphi(T, p) = p$ para algún $T > 0$, entonces $\varphi(T+t, p) = \varphi(t, p) \forall t \in \mathbb{R}$ y decimos que la órbita por p es una órbita periódica. Ella será atractora o repulsora según si las órbitas vecinas espiralan hacia o desde ella.



órbita periódica atractora



órbita periódica repulsora

Una forma de reconocer el carácter de una órbita periódica (atractora o repulsora) es calcular su exponente característico:

$$I = \int_0^T \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t, p)) + \frac{\partial g}{\partial y}(\varphi(t, p)) \right) dt.$$

Si $I > 0$ la órbita es repulsora y si $I < 0$ la órbita es atractora.

Si $I = 0$ la órbita puede ser tanto atractora, repulsora o de otro tipo.

Observación: Esta integral es casi siempre difícil de calcular, siendo posible tan sólo (a veces) estimar su signo.

Ejercicio 2: Pruebe que $\{(x, y)/x^2 + y^2 = 1\}$ es una órbita periódica de

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + (1 - x^2 + y^2)x \\ \dot{y} = x + (1 - x^2 + y^2)y \end{cases}$$

¿Es atractora?, ¿Repulsora?.

2.3 Teorema de Poincaré Bendixon (versión parcial)

Sea X un campo en \mathbb{R}^2 y sea $p \in \mathbb{R}^2$.

Se define el ω -límite y α -límite de p en la siguiente forma:

$$\omega(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 / \exists t_i \rightarrow \infty \text{ tq } \varphi(t_i, p) \rightarrow x \text{ si } i \rightarrow \infty\}$$

$$\alpha(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 / \exists t_i \rightarrow -\infty \text{ tq } \varphi(t_i, p) \rightarrow x \text{ si } i \rightarrow \infty\}.$$

Estos conjuntos corresponden a los puntos donde las órbitas positivas y negativas de p se acumulan.

Ejercicio 3: Encuentre $\omega((1,0))$, $\alpha((1,0))$, $\omega((\frac{1}{2},0))$ y $\alpha((\frac{1}{2},0))$ para el campo del Ejercicio 2.

Una parte del teorema de Poincaré-Bendixon dice que si para un punto p , $\omega(p)$ es un conjunto acotado y no contiene singularidades, entonces $\omega(p)$ es una órbita periódica del campo. Lo mismo vale para $\alpha(p)$. Por otra parte si el campo tiene finitas singularidades y $\omega(p)$ $\alpha(p)$ no contiene puntos regulares, entonces es una única singularidad.

Ejercicio 4: Suponga que

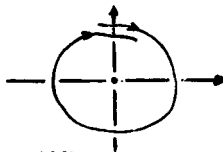
$$\begin{cases} \dot{x} = y + x - x^3 \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

tiene una órbita de la forma:

(¿ Podría probar ésto ?)

y pruebe que tiene por lo menos una órbita periódica.

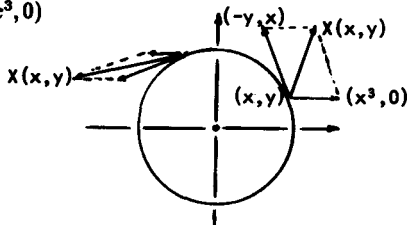
Ecuación de Van der Pol



Ejercicio 5: Pruebe que en la región acotada por una órbita periódica existe por lo menos una singularidad.

2.4 Campos de direcciones.

A veces, para determinar el diagrama de fase de un campo, resulta útil dibujar en el plano algunos de los vectores del mismo. Por ejemplo: El campo $X(x,y) = (-y + x^3, x) = (-y, x) + (x^3, 0)$ asigna a un punto (x,y) la suma de los vectores $(-y, x)$ [el cual es ortogonal a (x,y)] y $(x^3, 0)$



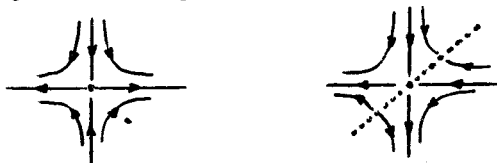
Una componente hace rotar a las órbitas y la otra las hace alejarse del origen. Podemos conjeturar entonces que el diagrama de fase consiste de un foco repulsor en el origen.

Aprovechemos este punto para hacer la siguiente observación:

Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y positiva en U , U abierto de \mathbb{R}^2 , entonces para un campo X se tiene que X y fX tienen exactamente el mismo diagrama de fase en U . De hecho, lo único que hace la multiplicación por f es cambiar la velocidad de las curvas soluciones.

Ejemplo: Los campos $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$ y $\begin{cases} \dot{x} = (y-x)x \\ \dot{y} = -(y-x)y \end{cases}$

tienen respectivamente diagramas de fase:



Ejercicio 6: Aplicar éstos métodos al campo en el ejercicio 2.

2.5 Simetrías

Suponga que $X(0,0) = (0,0)$ y que $DX_{(0,0)}$ tiene autovalores $\pm i\beta$. Según vimos en 2.1 las órbitas giran en torno al origen. Si además $X = (P, Q)$ es tal que $P(-x, y) = P(x, y)$ y $Q(-x, y) = -Q(x, y)$ el lector puede comprobar que si $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ es una solución de X entonces $\bar{\varphi}(t) = (-x(t), y(t))$ es solución de $-X$. Se concluye con esto que el origen es un centro para X . Este ejemplo ilustra que la existencia de simetrías en el campo tiene implicancias en el diagrama de fase del mismo.

2.6 Divergencia

La divergencia de un campo $X = (f, g)$ se define por $\text{div}X(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$.

Si X tiene una órbita periódica γ y si $\text{div}X \neq 0$ en la región acotada por γ entonces esta región intersecta tanto $\{\text{div}X < 0\}$ como $\{\text{div}X > 0\}$. Es decir, la divergencia cambia de signo en la región acotada por γ . Esto resulta inmediatamente del Teorema de Green

$$\iint_A \text{div}X dx dy = \pm \int_{\partial A} X \cdot n dt$$

donde n es vector normal a ∂A .

Ejercicio 7: Encuentre los diagramas de fase de los siguientes campos en el plano:

$$i) \begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = 1 - 2y - x^2 + xy + y^2 \end{cases}$$

- ii) $\begin{cases} \dot{x} = x(y+x^2) \\ \dot{y} = -y^2/2 - x^2y \end{cases}$ pruebe que no tiene órbitas periódicas
- iii) $\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = 1 - 2x^2 + 2xy \end{cases}$ pruebe que no tiene órbitas periódicas
- iv) $\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = \alpha + mx + ax^2 \end{cases}$ $\alpha > 0, a < 0$ pruebe que tiene dos centros.

2.7 Criterio de Dulac Bendixon

Según vimos en 2.4., al multiplicar un campo X por una función positiva f , el campo resultante fX tiene el mismo diagrama de fase que X . Así por ejemplo, si uno de ellos tiene órbitas periódicas, el otro también. Por otra parte, vimos en 2.6 que si $\text{div}X > 0$ (o $\text{div}X < 0$) entonces X no tiene órbitas periódicas. A veces ocurre que $\text{div}X$ cambia de signo en una región U , pero existe una función f , positiva en U , tal que $\text{div}fX$ no cambia de signo, implicando que X no tiene órbitas periódicas contenidas en U . Una tal función f se llama función de Dulac de X and U .

Ejercicio 8: Considere el campo

$$X : \begin{cases} \dot{x} = x(m + ax + by) \\ \dot{y} = y(n + cx + dy) \end{cases}$$

- a) Pruebe que si X tiene una órbita periódica, ella está contenida en algún cuadrante. (Suponga que $ad - bc \neq 0$).
- b) Suponga $ad - bc \neq 0$ y $an(b-d) + dm(c-a) \neq 0$ y pruebe que X tiene función de Dulac de la forma $f(x, y) = x^{r-1}y^{s-1}$ en cada cuadrante.
- c) Encuentre el diagrama de fase de X bajo las condiciones dadas en b).

2.8 Integrales primeras

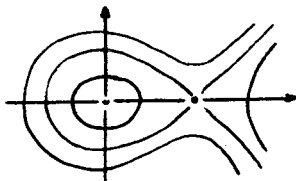
Si $X = (f, g)$ es un campo de vectores en U y $E : U \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $\frac{\partial E}{\partial x}f + \frac{\partial E}{\partial y}g \equiv 0$ en U , decimos que E es una integral primera para X en U . Lo interesante de una tal función E (si es que existe) es que toma el mismo valor a lo largo de cada solución de X . Es decir $E(\varphi(t, p))$ no depende de t (compruébelo derivando con respecto a t). Así, las soluciones de X se encuentran sobre los niveles de la función E .

Ejemplo $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$ tiene integral primera $E(x, y) = x^2 + y^2$.

Los niveles de E son círculos en torno al origen y el diagrama de fase de X son éstos mismos círculos recorridos en sentido antihorario.

Ejemplo $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x - x^2 \end{cases}$ tiene integral primera $E(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2} - \frac{x^3}{3}$, cuyas curvas de nivel están dadas en la figura adjunta.

El diagrama de fase de X se obtiene orientando correctamente el sentido en que éstos niveles son recorridos. (¿ Puede usted hacerlo?)



2.9 Funciones de Lyapunov

Dado un campo de vectores $X = (f, g)$, una función $V : U \rightarrow \mathbb{R}$, U abierto de \mathbb{R}^2 , se denomina **función de Lyapunov** para X en U toda vez que $\frac{\partial V}{\partial x}f + \frac{\partial V}{\partial y}g > 0$ (< 0) en U .

Lo interesante de una función de Lyapunov (si existe) es que toda solución $\varphi(t, p)$ contenida en U crece (o-decrece) en los niveles de U . Es decir $t \rightarrow V(\varphi(t, P))$ es creciente (decreciente). Esto implica por ejemplo que X **no** tiene órbitas periódicas contenidas en U (toda vez que una órbita crece en los niveles de V no regresa al punto inicial).

Ejercicio 9: Pruebe que $\begin{cases} \dot{x} = x - y - x^3 \\ \dot{y} = x + y - y^3 \end{cases}$ tiene por lo menos una órbita periódica.

Indicación: Use la función de Lyapunov $V(x, y) = x^2 + y^2$.

2.10 Campos hamiltonianos y factores integrantes

A toda función diferenciable $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se le puede asociar el campo

$$X_H : \begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

al cual denominamos **campo hamiltoniano asociado a H** . Para un tal campo la misma función H resulta ser una integral primera (como el lector fácilmente puede comprobar) y por lo tanto el diagrama de fase de X_H se obtiene orientando correctamente las curvas de nivel de H .

Ahora bien, dado un campo $X = (f, g)$ podemos siempre preguntarnos si acaso es hamiltoniano de alguna función H . En tal caso $f \equiv -\frac{\partial H}{\partial y}$ y $g \equiv \frac{\partial H}{\partial x}$. La forma de decidir ésto reside en el siguiente criterio; X es un campo hamiltoniano sí y sólo si $\text{div}X \equiv 0$. De hecho, si $\text{div}X \equiv 0$, integrando $f(x, y) = -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y)$ con respecto a y se obtiene $H(x, y) = \int f(x, s)ds + \phi(x)$, lo que reemplazando en $g = \frac{\partial H}{\partial x}$ permite obtener una ecuación diferencial en x , y sólo en x (esto pues $\text{div}X \equiv 0$), para ϕ . De esta forma encontramos H tal que $X = X_H$.

A veces ocurre que $\text{div}X \neq 0$, pero existe una función positiva $f(x, y)$ tal que $\text{div}(fX) \equiv 0$ con lo cual tanto fX y X tienen una integral primera H . Una tal función f se denomina **factor integrante de X** .

Ejercicio 10: Pruebe que el campo de vectores del ejercicio 8 o tiene un centro o no tiene órbitas periódicas. [Es decir este campo no tiene ciclos límites (ver definición en la sección siguiente)].

3 Campos Polinomiales

Sean X e Y dos campos de vectores en \mathbb{R}^2 . Decimos que X e Y son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que lleva órbitas de X en órbitas de Y preservando orientación. Es decir, h establece una correspondencia uno a uno entre las órbitas de X y las órbitas de Y . Específicamente: $h(\phi_X(t, p)) = \phi_Y(t', h(p))$ con $t \cdot t' > 0$.

Ejercicio 11:

- i) Si p es singularidad de X entonces $h(p)$ es singularidad de Y .
- ii) Si $\theta(p)$ (órbita de p) es periódica para X entonces $\theta(h(p))$ es periódica para Y .
- iii) $h(\omega(p)) = \omega(h(p)) \quad \forall p \in \mathbb{R}^2$.

Podemos ahora enunciar el Problema fundamental para campos polinomiales en el plano: Fijado un grado n , clasificar módulo equivalencia topológica, todos los diagramas de fase de campos polinomiales de tal grado.

Por ejemplo, para $n = 1$ todo campo $\begin{cases} \dot{x} = \alpha + ax + by \\ \dot{y} = \beta + cx + dy \end{cases}$ es topológicamente equivalente a uno de los siguientes:

a) $\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$  campo lineal sin singularidades.

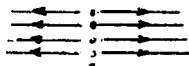
b) $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases}$  repulsor

c) $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$  silla

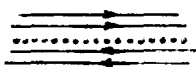
d) $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$  atractor

e) $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$  centro

$$f) \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$



$$g) \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$



$$h) \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$



Ejercicio 12: Pruebe que para un abierto y denso en los coeficientes $(\alpha, \beta, a, b, c, d)$ se tiene sólo los casos b), c) y d).

Para $n \geq 2$, la clasificación completa está lejos de ser alcanzada. Para ver ésto necesitamos primero definir algunos conceptos.

Un **ciclo límite** de un campo en el plano es una órbita periódica aislada. Es decir, una órbita periódica tal que cualquier otra órbita en una vecindad de ella no es periódica. Por ejemplo, las órbitas periódicas de los ejercicios 2 y 4 son ciclos límites. El principal y gran problema para obtener una clasificación de los diagramas de fase de campos polinomiales está contenida en el llamado **problema 16 de Hilbert**; Dado n , describir la posición relativa de órbitas periódicas y dar cota para el número de ciclos límites de campos polinomiales de grado n .

En lo que sigue damos un breve esquema de algunos de los resultados que en este momento se saben (y no se saben) al respecto.

Las órbitas periódicas (si existen) de campos cuadráticos (grado 2) están ubicadas en dos series de órbitas "concéntricas"; las de una serie giran en un sentido, las de la otra serie giran en sentido opuesto



Las posición relativa de órbitas periódicas de campos cúbicos (grado 3) no tiene aún descripción completa. Lo mismo ocurre para campos de grado mayor.

Existen ejemplos de campos cuadráticos con las siguientes configuraciones de ciclos límites:

i) 1 ciclo límite



ii) 2 ciclos límites



iii) 3 ciclos límites



iv) 4 ciclos límites

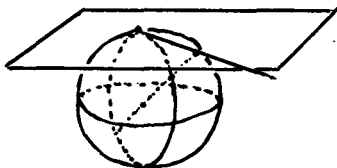


Así vemos que no se ha encontrado campos cuadráticos con más de 4 ciclos límites. De hecho, se conjetura que 4 es una cota superior. Nadie ha probado aún que una tal cota exista.

Para campos cúbicos se ha encontrado ejemplos con 11 ciclos límites, y no existe conjetura razonable sobre una posible cota. Más aún, sólo recientemente se ha podido probar que todo campo polinomial tiene apenas un número finito de ciclos límites. De hecho, el llamado Problema de Dulac pedía probar la finitud de ciclos límites para todo campo polinomial. Esto fué primero probado para campos cuadráticos y sólo recientemente para campos polinomiales cualesquiera.

Finalmente, para terminar estas notas, describimos una propiedad interesante que verifican los campos polinomiales en el plano (y en \mathbb{R}^n) y que fué descubierta por Poincaré en el siglo pasado. En breve, esta propiedad puede enunciarse así: Todo campo polinomial admite una extensión al ∞ (borde de \mathbb{R}^2).

Si ponemos el plano \mathbb{R}^2 tangente a la esfera $S^2 = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ en el polo norte $(0, 0, 1)$ y lo proyectamos centralmente en la esfera, obtenemos dos correspondencias diferenciables punto a punto ϕ_+ y ϕ_- : una, ϕ_+ , entre \mathbb{R}^2 y el hemisferio superior $\{(x, y, z) \in S^2/z > 0\}$ y la otra, ϕ_- , entre \mathbb{R}^2 y el hemisferio inferior $\{(x, y, z) \in S^2/z < 0\}$. El ecuador $\{(x, y, z)/z = 0\}$ representa los puntos en el infinito.



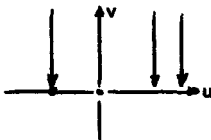
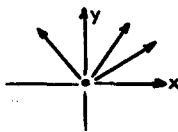
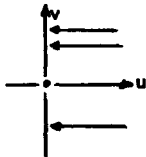
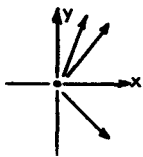
Si X es un campo en \mathbb{R}^2 , entonces ϕ_+ (ϕ_-) traslada a X hacia un campo X_+ (X_-) en el hemisferio superior (inferior). Lo interesante está en que si X es polinomial, entonces existe un campo analítico en toda la esfera S^2 que extiende a los campos X_+ y X_- . Es decir, los campos X_+ y X_- , son la restricción a los hemisferios de un campo analítico en toda la esfera.

A este campo en la esfera se le llama la Compactificación de Poincaré de X y se denota por $P(X)$.

En la práctica, para estudiar el comportamiento de $P(X)$ en el infinito, se hacen los siguientes cambios de coordenadas en el infinito:

$$\begin{cases} u = 1/x \\ v = y/x \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = x/y \\ v = 1/y \end{cases}$$



Ejercicio 13: Pruebe que todo campo polinomial de grado par tiene al menos una singularidad en el infinito.

Ejercicio 14: Pruebe que
$$\begin{cases} \dot{x} = -y - 10x^2 + 5xy + y^2 \\ \dot{y} = x + x^2 - 25xy \end{cases}$$
 tiene al menos un ciclo límite.

Indicación: Estudie el campo sobre la recta $1 + x - 25y = 0$ y sobre el infinito.

Bibliografía

- Textos sobre teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales:
 - J. Palis y W. de Melo., *Introdução aos Sistemas Dinamicos*, Projeto Euclides.
 - J. Sotomayor., *Licções de euqções diferenciais ordinarias*, Projeto Euclides.
 - S. Smale and M. Hirsch., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.
- Textos y artículos sobre campos polinomiales:
 - A. Coppel., *A survey of quadratic systems*, *Journal of Differential Equations* 2 (1966).
 - Ye Yan Quan, *Theory of limit cyles*, *Trans. Math. Monographs* 66 (AMS 1986).
 - N. G. Lloyd., *Limit cycles of polynomial systems: some recent developments*. New direction in *Dynamical Systems*. cambridge Univ. Press. 1988.
 - R. Bamón., *Quadratic vector fields in the plane have a finite number of limit cyles*. *Publ. Math. IHES* N° 64 (1987).
 - Yu.S. Il'yashenko., *Finiteness theorems for limit cycles*. *Russian Math. Surveys* Vol 45, N° 2, 1990
- Textos con aplicaciones:
 - S. Smale and M. Hirsch., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press (1974).
 - M. Braun., *Differential Equations an their applications*, Springer Verlag (1975).