

LA VERSION DE CARATHEODORY DEL CALCULO
VARIACIONAL Y SU RELEVANCIA PARA LA
FISICA TEORICA

Francisco De Zela*

Se presenta la formulación de Carathéodory del Cálculo Variacional, conocida como el "camino real", con el fin de contribuir a su mayor difusión en vista de sus aplicaciones a la Física Teórica. Se plantea la necesidad de tratar el problema variacional en dominios múltiplemente conexos, en atención a una posible relación entre cuantización de una teoría física y la topología del espacio considerado.

*

Profesor Auxiliar de la PUCP, Secc. Física

1. Introducción

Los avances en la Física, a diferencia de la Matemática, se producen casi siempre por el método del “ensayo y el error”. Es interesante ver cómo poco a poco van surgiendo así, por ensayo y error, las leyes detrás de los fenómenos naturales. Dichas leyes, si se trata de las fundamentales, han encontrado su expresión matemática más adecuada cuando han sido formuladas en el lenguaje del Cálculo Variacional.

Es bien sabido el rol central que desempeña el Cálculo Variacional en la formulación más acabada de la Mecánica Analítica, aquella que asociamos con los nombres de Lagrange y Hamilton. Pero el camino por el cual los físicos llegan al Cálculo Variacional, camino intuitivo y que pasa siempre por conceptos “tangibles” como “fuerzas”, “desplazamientos virtuales”, etc, ha hecho que normalmente no presten mucha atención a las formulaciones rigurosas y precisas propias de los matemáticos. En especial, parecen no haber prestado mucha atención a aquella conocida como el “camino real” del Cálculo Variacional, debida a Carathéodory.

Hoy en día, el Cálculo Variacional parece ser llamado nuevamente a jugar el rol central en la formulación matemática de las interacciones más fundamentales, aquellas que se dan entre las partículas elementales que conforman toda la materia. Se cree que las cuatro interacciones conocidas, la fuerte, la débil, la gravitacional y la electromagnética, son en realidad cuatro aspectos diferentes de una única interacción. El problema que se plantea el físico teórico hoy en día, es el de encontrar el lagrangiano adecuado, a partir del cual se deriven las ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico de un sistema.

Pero para ello se viene valiendo el físico de todo un formalismo muy particular, que se ha ido estableciendo respaldado más por el uso generalizado que por la consistencia de una teoría acabada.

El primer paso se dió con la formulación de la Mecánica Cuántica. Desde entonces es costumbre reemplazar cantidades "clásicas" por sus correspondientes "cuánticos". Esto es, se "reinterpreta" objetos matemáticos, por ejemplo los vectores, convirtiéndolos en operadores definidos sobre un espacio (de Hilbert) adecuado, estipulando reglas de conmutación apropiadas. Lo que justifica este proceder es el éxito al que conduce cuando se confronta la teoría con el experimento.

Queda la duda, sin embargo, de si este rápido avance por el camino pragmático no nos ha hecho pasar de largo frente a posibilidades que podrían dar la clave para una formulación más sólida, una que se apoye menos en reglas y procedimientos de carácter un tanto arbitrario.

Queda la duda también, de si muchos de los problemas de autoconsistencia de las teorías que se intenta desarrollar, tienen o no su origen en el punto mismo de partida, en la "cuantización" de una teoría clásica.

De las diferentes formulaciones que se han dado del Cálculo Variacional la que quizá mejor se presta para poner en evidencia una posible íntima relación entre la formulación clásica y la cuántica, es la formulación de Carathéodory.

Pero, aún cuando esto no fuera así, ella permite en todo caso sacar a luz los puntos verdaderamente centrales en los que se apoya la formulación clásica de la Física, por lo que vale la pena contribuir a que encuentre una mayor difusión de la que ahora tiene.

El presente trabajo tiene por objeto principal presentar la formulación de Carathéodory, así como plantear ciertos problemas y conjeturas que podrían dar pie a desarrollos ulteriores.

2. La formulación de Carathéodory

El "camino real" de Carathéodory [1], muestra de la manera más clara la conexión existente entre la ecuación de Euler, las ecuaciones canónicas de Hamilton y la ecuación de Hamilton-Jacobi; esto es, entre las tres formas alternativas de resolver el problema variacional. Pero además pone dicho problema en una forma esencialmente "local", en contraste con las otras formulaciones, para las cuales el papel central lo juega el camino o curva extremal. En vez de "variar" la curva extremal, lo que se busca, siguiendo a Carathéodory, es un campo vectorial que satisfaga ciertas condiciones. Esta formulación se adecúa mejor al análisis de teorías físicas, dado que en éstas se plantean generalmente relaciones locales entre las diferentes cantidades involucradas.

El problema variacional básico consiste en encontrar aquella curva $x^i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$) que dé a la integral

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x^i, \dot{x}^i) dt \quad (1)$$

un valor tal, que para cualquier otra curva vecina $x^i(t)$ con los mismos puntos inicial y final, el valor correspondiente de la integral \bar{I} sea $\bar{I} \geq I$ (el razonamiento es análogo para $\bar{I} \leq I$). Dicha curva se llama "extremal". El método usual para determinarla consiste en encontrar condiciones necesarias, exigiendo que la variación $\delta I = 0$. Ello conduce a las ecuaciones de Euler.

El método de Carathéodory en cambio, se centra no en la curva completa, sino que reduce el problema variacional a uno local, analizando el compartimiento de L mismo:

En primer lugar, dejamos de ver los \dot{x}^i como vectores tangentes asociados a una curva $x^i(t)$, para reemplazarlos por un campo $\psi^i(t, x^i)$.

Suponiendo que exista un χ^i para el cual

$$L(t, x^i, \psi^i(t, x^i)) = 0 \quad (2)$$

y que además

$$L(t, x^i, \varphi^i(t, x^i)) > 0 \quad (3)$$

para cualquier otro campo φ^i en una cierta vecindad de x^i :

$$|\varphi^i - \psi^i| < \varepsilon, \quad (4)$$

nuestro problema varacional estaría resuelto, pues bastaría resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{dx^i}{dt} = \psi^i(t, x^i(x)) \quad (5)$$

a fin de determinar la curva extremal.

Pero, no siempre podemos suponer que existirá un tal ψ^i para un L dado. Sin embargo basta observar que cualquier curva que haga L extremal, hará también extremal una integral cuyo integrando se diferencia de Ldt en un diferencial, total ds .

Bastará entonces exigir (2) y (3) no para L mismo sino para (2)

$$L(t, x^i, \psi^i) - \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial s}{\partial x^i} \psi^i \quad (6)$$

El teorema central, en la base de la formulación de Carathéodory, dice entonces:

Teorema.

Si se logra encontrar n funciones $\psi^i(t, x^i) (\in C^1)$ y una función $S(t, x^i) (\in C^2)$ tales que

$$L(t, x, \psi) - \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial x^i} \psi^i \equiv 0$$

mientras que de otro lado

$$L(t, x, \bar{\psi}) - \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial x^i} \bar{\psi}^i > 0$$

siempre que $|\psi^i - \bar{\psi}^i|$ sean suficientemente pequeños y no todos nulos, entonces las soluciones del sistema

$$\frac{dx^i}{dt} = \psi^i(t, x^i)$$

serán las extremales ("minimales") de nuestro problema variacional. En otras palabras, debemos buscar $\psi^i(t, x)$ y $S(t, x)$ que hagan mínimo (6), siendo este valor mínimo *cero*.

Esto conduce a las relaciones (ecuaciones fundamentales):

$$\frac{\partial S}{\partial x^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(t, x, \psi); \quad \frac{\partial S}{\partial t} = L - \psi^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(t, x, \psi) \quad (7)$$

las cuales a su vez dan pie a introducir

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(t, x, \dot{x}) \quad (8)$$

y bajo el supuesto de que $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^i}\right) \neq 0$ se pueden

despejar los \dot{x}^i en función de los $p_i, x^i = \varphi^i(t, x, p)$, permitiendo introducir el hamiltoniano

$$H(t, x, p) = -L(t, x, \dot{x}) + p_i \dot{x}^i(t, x, \dot{x}) \quad (9)$$

Las coordenadas x^i, p_i se llaman "canónicas". En función de ellas (7) se expresa como

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i} ; \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H(t, x, p) \quad (10)$$

La función $S(t, x)$ debe entonces satisfacer la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}) = 0 \quad (11)$$

Al revés, siendo S una solución de (11), basta poner

$$\psi^i(t, x) = \frac{\partial H}{\partial p_i} (t, x, \frac{\partial S}{\partial x}) \quad (12)$$

para que las soluciones de las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} (t, x, \frac{\partial S}{\partial x}) \quad (13)$$

sean las extremales de nuestro problema. Sin embargo, de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, sabemos que (13) no es sino la proyección en el espacio de las x^i de las curvas características asociadas a (11), esto es, que aquellas que satisfacen

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} (t, x, p) ; \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x^i} (t, x, p), \quad (14)$$

ecuaciones que en la Física se conocen como ecuaciones canónicas de Hamilton.

La ecuación de Euler se obtiene de

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} (t, x, \dot{x}) ; \quad \frac{\partial H}{\partial x^i} (t, x, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) = - \frac{\partial L}{\partial x^i} (t, x, \dot{x})$$

que llevan directamente a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \quad (15)$$

Las ecuaciones (11), (14), (15) son pues tres expresiones alternativas de una sola exigencia, la formulada en el teorema fundamental. Por supuesto que hemos expuesto en apretada síntesis, lo que Carathéodory desarrolla con rigor y detalle. Importante, desde el punto de vista físico, es el hecho de que construir una extremal implica siempre construir a la vez todo un campo de extremales. Pero entonces, el dominio sobre el cual se trabaja se asume simplemente conexo. Este hecho hay que resaltarlo. En la Física se describe partículas "puntuales", las cuales desde el punto de vista matemático constituyen singularidades de un dominio múltiplemente conexo. Más adelante haremos algunos comentarios sobre la posible relación entre cuantización y topología del espacio que usamos.

3. El problema homogéneo

El lagrangiano $L(t, x, \dot{x})$, donde al parámetro t se le da el significado de "tiempo", es el que aparece en la Física no relativista. Desde que se descubre que el principio de relatividad subyace a toda teoría física, pasa a ser el tiempo una coordenada más, lo que a nivel de formalismo matemático lleva a considerar lagrangianos "homogéneos" $F(x, \dot{x})$, en particular homogéneos de primer orden en \dot{x} , los cuales satisfacen

$$F(x, k \dot{x}) = k F(x, \dot{x}) \quad (k > 0) \quad (16)$$

Con eso garantizamos que la integral fundamental de nuestro problema variacional

$$I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} F(x, \dot{x}) d\tau \quad (17)$$

sea independiente del parámetro τ en función del cual describimos la curva a lo largo de la que integramos:

$$x^u = x^u(\tau).$$

Así, no interesa cómo se recorre la curva, sino únicamente la forma que ella tiene. En términos físicos, se habla de una curva "espacio-tiempo", cada punto de la cual representa un evento.

Para las $F(x, \dot{x})$ que estamos tratando, se cumple

$$\det \left| \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \right| \equiv 0 \quad (18)$$

lo que dificulta introducir coordenadas "canónicas", como se hizo en el caso no homogéneo. El problema se ha resuelto por diversos caminos (3,4); el que elige Carathéodory singulariza una coordenada frente a las demás, sin por ello romper la simetría de la descripción. Se adecúa quizá por ello más que las otras formulaciones, a la descripción física, donde el tiempo se distingue, de todos modos, de las coordenadas espaciales.

La formulación de Carathéodory conduce a una definición no única del Hamiltoniano: dado un Hamiltoniano se podrán obtener otros (infinitos) que se diferencian del primero en un factor $A(x^i, P_i)$ arbitrario. Las ecuaciones canónicas, de otra parte, contendrán asimismo una función $\lambda(x^i, P_i)$ arbitraria:

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \lambda \frac{\partial H}{\partial P_i} ; \quad \frac{dP_i}{d\tau} = \lambda \frac{\partial H}{\partial x^i} \quad (19)$$

En cambio, la ecuación de Euler tiene la misma forma que antes:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0 \quad (20)$$

Cabe destacar, por último, un resultado que Carathéodory obtiene y que parece no haber sido tomado muy en cuenta. Hasta hoy se sigue considerando la elección de la "signatura" de la métrica relativista (+ --- ó - +++) como cuestión de convención. En la construcción de Carathéodory no cabe otra posibilidad que + --- . Cualquier otra elección para la "signatura" del "elemento de línea" que difiera de

$$ds = F d\tau = \sqrt{+(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} \quad (21)$$

lleva a un problema variacional sin solución (no hay extremales). Además, las extremales para el ds de (21) se ve que son "maximales", en concordancia con la realidad física (recordar el problema relativístico "paradoja de los mellizos") [5].

4. Aplicaciones a la Física Clásica

Electromagnetismo y gravitación son las dos únicas interacciones de las que se ocupó la Física Clásica en sus inicios. Tanto la teoría electromagnética, en la forma que le dió Maxwell, como la gravitacional, en la forma debida a Einstein, se apoyan en dos pilares, cuya expresión matemática está dada por sendos principios variacionales [6] :

- Para el movimiento de las partículas bajo la acción de un campo:

$$\delta \int ds = \delta \int F d\tau = 0 \quad (22)$$

- Para la dinámica del campo:

$$\delta \int \mathcal{F} d^4x = 0 \quad (23)$$

En el caso gravitacional, se tiene explícitamente:

$$F = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \quad ; \quad \mathcal{F} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \sqrt{-g} R \quad (24)$$

($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) $R_{\mu\nu}$: tensor de Ricci.

En el caso electromagnético :

$$F = m \sqrt{\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} + e A_\mu \dot{x}^\mu \quad ; \quad \mathcal{F} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\nu\mu} \quad (25)$$

con $\eta_{\mu\nu}$ el tensor de Minkowsky y $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. La ecuación (22) da en el caso gravitacional la ecuación de la geodésica [6]. En el caso electromagnético, la versión relativista de la ecuación de Lorentz [6].

La ecuación (23) da en el caso gravitacional las ecuaciones de Einstein, y en el electromagnético, las ecuaciones de Maxwell [6].

En estas ecuaciones se encuentran entonces contenidos los principios fundamentales que la Física clásica consiguió sacar a luz. Pero aún más: ellas son, asimismo, el punto de partida del camino que lleva a la Física Cuántica, como veremos a continuación.

5. Aplicaciones a la Física

Cuando se aborda el problema de describir al átomo de hidrógeno [7], [8], se toma como punto de partida el $F(x, \dot{x})$ dado en (25).

Se ve sin embargo, que para estar de acuerdo con los resultados experimentales es necesario agregar una condición adicional, la cual, desde el punto de vista de la construcción teórica, no encuentra justificación satisfactoria. Se trata de las "condiciones de cuantización de Bohr-Sommerfeld-Wilson" :

$$\oint p_i dx^i = n_i h \quad (26)$$

donde $i=1,2,3$; ($p_i dx^i$ no indica \sum_i)

$n_i = 0,1,2,\dots$

$h =$ constante de Planck

$p_i =$ "impulso conjugado" asociado a la variable x^i

\oint : indica integración sobre un período, dado que p_i es cíclica como función de x^i .

El carácter ad-hoc de estas condiciones, así como su restricción a variables cíclicas induce a los físicos a buscar una formulación distinta para resolver el problema del átomo. Schrödinger y Heisenberg la encuentran por dos caminos diferentes. Veamos lo que hace Schrödinger [9].

En vez de resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi asociada al límite no relativista del $F(x, \dot{x})$ de (25), esto es:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 - 2m\left(E + \frac{e^2}{r}\right) = 0 \quad (27)$$

(caso estacionario: $S' = -Et + S(x, y, z)$)

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

reemplaza Schrödinger S por $S = \hbar \ln \psi$ y toma la expresión resultante

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_i \psi) \equiv \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{r}\right) \psi^2 \quad (28)$$

como lagrangiano de un principio variacional

$$\delta \int \mathcal{L} d^3x = 0 \quad (29)$$

La ecuación de Euler asociada a este problema

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial (\partial \psi / \partial x^i)} \right) = 0 \quad (30)$$

es la famosa ecuación de Schrödinger, base de la Física Cuántica:

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) \psi = 0 \quad (31)$$

Exigiendo que ψ sea unívoca, continua junto con sus primeras derivadas y finita, se obtiene que los valores de E estén cuantizados; específicamente según la misma fórmula que se obtiene usando (26) en el mismo límite no relativista.

Si se sigue el mismo procedimiento con el $F(x, \dot{x})$ (relativista) de (25) se llega a un resultado en desacuerdo con la experiencia. Sin embargo, (26) da resultados correctos. La extensión de (31) al caso relativista está dada por la ecuación que Dirac propuso años después que Schrödinger [10]:

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu - e A_\mu) \psi(x) = m\psi(x) \quad (32)$$

Aquí los γ^μ son generadores del álgebra de Clifford asociada a la métrica $\eta^{\mu\nu}$:

$$\gamma^\mu \partial^\nu + \partial^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} 1$$

y $\psi(x)$ ($x \equiv x^0, x^1, x^2, x^3$) un "bispinor", un elemento del espacio de representación del grupo de Lorentz.

La ecuación (32) puede obtenerse de un lagrangiano formalmente vinculado al $F(x, \dot{x})$ de (25)

$$L = m \bar{\psi} \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \left(\frac{1}{i} \partial_\mu + e A_\mu \right) \psi \quad (33)$$

siendo $\bar{\psi} \equiv \psi^+ \gamma^0$ y ψ^+ el elemento del espacio dual al que pertenece ψ , canónicamente asociado a él.

Aplicada al átomo de hidrógeno, la ecuación (32) da para la energía exactamente los mismos valores que se obtienen por (26).

Mediciones muy finas han demostrado que dichos valores no coinciden exactamente con los valores experimentales [11]. Ello ha inducido a buscar una salida,

"reinterpretando" el significado de $\psi(x)$: Por el procedimiento llamado de "segunda cuantización" [12], se le da a $\psi(x)$ el significado de un operador, definido en un espacio de Hilbert adecuado.

Con ψ interpretado como operador se logra describir la creación y destrucción de partículas elementales, hecho que se observa experimentalmente. El formalismo de "segunda cuantización" se encuentra hoy en día sólidamente afinado en la Física, y es el que se utiliza para describir también las interacciones débil y fuerte. El problema de "cuantizar" la teoría de gravitación está aún abierto.

La búsqueda de un lagrangiano L que sea punto de partida para la descripción de las diferentes interacciones no es una búsqueda a ciegas. Las posibilidades de elección están restringidas por ciertos principios como el de relatividad (invariancia bajo transformaciones de Lorentz) o el principio de invariancia "gauge" [13].

A este último se puede llegar de la siguiente manera: en mecánica cuántica el "estado" de un sistema físico se encuentra representado por $\psi(x)$ salvo un factor $e^{i\alpha}$ (α constante), dado que las cantidades susceptibles de compararse con los resultados experimentales involucran a $\psi(x)$ siempre en la combinación $\psi^*(x)$ (Operador) $\psi(x)$.

La descripción del protón y el neutrón llevó a entender el factor $e^{i\alpha}$, que como se ve es un elemento del grupo $U(1)$, a factores del tipo $\exp[i\bar{\alpha}\cdot\bar{\tau}]$, con $\bar{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ los generadores de $SU(2)$. [13], [14].

Por razones de índole "física" se introdujo la hipótesis de que la anterior invariancia se cumpliera no sólo para $\bar{\alpha}$ constante, sino también para $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(x)$. Dicha hipótesis se ha elevado al rango de principio (principio gauge), y hoy en día se intenta encontrar el grupo "gauge" a partir del cual, exigiendo que L sea inva-

riante bajo una transformación del tipo $\psi \rightarrow \exp(i \bar{\alpha} \bar{\tau})\psi$, se obtenga la descripción adecuada de las diversas interacciones.

Hasta el momento se ha llegado a describir la interacción fuerte, partiendo de SU(3) y la débil con la electromagnética a partir de SU(2) x U(1).

6. Conjeturas y problemas

En el caso del electromagnetismo, el lagrangiano L de la ecuación (33) está construido de forma tal, que resulta invariante bajo la transformación simultánea

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x) \quad (34)$$

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A_{\mu}(x) - \frac{1}{e} \partial_{\mu} \alpha(x) \quad (35)$$

La transformación de A_{μ} según (35) ha sido considerada como válida desde que se introdujo dicho "vector potencial" para describir el campo electromagnético, esto es, mucho antes de que se hablara de "principio gauge". Ello porque las ecuaciones (de Maxwell) que rigen el comportamiento de dicho campo, lo mismo que las ecuaciones (de Lorentz) que describen el movimiento de una carga bajo la acción del mismo, involucran $A_{\mu}(x)$ sólo en la forma $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$.

A_{μ} está determinado entonces, a menos de un gradiente $\partial_{\mu}\beta(x)$ aditivo. Sin embargo, viendo las cosas desde la perspectiva de la formulación de Carathéodory, tenemos que para el $F(x, \dot{x})$ de (25), debe encontrarse un campo $v^{\mu}(x)$ y una función $S(x)$ tales que

$$F(x, v) - (\partial_{\mu}S)v^{\mu} \equiv 0 \quad (36)$$

según la formulación del teorema fundamental para el caso homogéneo.

La homogeneidad de F respecto de v^μ nos permite elegir este último, de modo que $\eta_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 1$ con lo que (36) queda

$$m + eA_\mu v^\mu - (\partial_\mu S)v^\mu \equiv 0 \quad (37)$$

La función S que satisface (37) no satisface la ecuación que se obtendría de reemplazar A_μ por $A_\mu - 1/e \partial_\mu \alpha$. Un cambio de A_μ , de este tipo, implica que simultáneamente cambiemos S por $S - \alpha$. O bien, para ponerlo en la misma forma del "principio gauge", escribamos

$$\psi(x) = e^{-is(x)} \quad (38)$$

que reemplazado en (37) da, reacomodando los términos:

$$v^\mu [i \partial_\mu - eA_\mu] \psi = m \psi \quad (39)$$

La necesidad del reemplazo simultáneo (34), (35) se manifiesta así dentro de una formulación puramente clásica, la de Carathéodory, y sin necesidad de ningún "principio" adicional.

Más aún, (39) sugiere una íntima conexión con la ecuación de Dirac (ecuación 32), conexión que queda aún por descubrir.

También, íntimamente conectada a lo anterior, debe estar la condición de cuantización (26), introducida en forma empírica: En el marco de la formulación de Carathéodory hemos visto que resolver el problema variacional implica siempre la construcción de todo un campo de extremales. Para que dicha construcción sea posible, se restringe uno a considerar regiones simplemente conexas. Así, de la validez local de

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^\mu \partial v^\nu} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^\nu \partial v^\mu} \quad (40)$$

se seguirá que

$$\oint \frac{\partial F}{\partial v^\mu} dx^\mu = \oint \left(\frac{\partial F}{\partial v^\mu} v^\mu \right) dt = \oint F dt = 0 \quad (41)$$

cuando se integra a lo largo de cualquier camino cerrado que esté contenido, junto con su interior, en la región simplemente conexa que consideramos. O bien, puesto en el lenguaje de formas diferenciales, podemos decir que la 1-forma

$$\omega = F_{v^\mu} dx^\mu \quad ; \quad F_{v^\mu} \equiv \frac{\partial F}{\partial v^\mu} (x, v) \quad (42)$$

es cerrada ($\omega = ds$), dado que es localmente exacta ($\partial_\mu F_{v^\nu} = \partial_\nu F_{v^\mu}$ ecuación (40)) en una región simplemente conexa ($U \subset \mathbb{R}^n$). La exigencia estipulada por (4) está en la base misma del Cálculo Variacional; garantiza que el problema tenga solución, al permitir la construcción de "la figura completa" (en el lenguaje de Carathéodory) o el campo de Mayer (en el lenguaje de Bliss y la escuela de Chicago [15]). ¿Qué ocurre, sin embargo, si la región no es simplemente conexa?. Este es, precisamente, el caso que interesa en Física al tratar partículas elementales, cuya representación matemática puede verse como una "singularidad" de la región considerada, la cual deja así de ser simplemente conexa.

Ubicando la singularidad en el origen y restringiéndonos por el momento a \mathbb{R}^2 , sabemos que se cumple [16] para ω cerrada en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, que existe en $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\oint \omega = 2 \pi n k \quad (43)$$

siendo n el número de veces que el camino cerrado "enlaza" el origen. Observando que $p_\mu = F_{v^\mu}$, vemos de (42) y (43), que las condiciones de cuantización, dadas por (26), pueden bien tener un origen "topológico".

De hecho, el éxito de las condiciones de cuantización se ha dado al aplicarlas al átomo de hidrógeno (fórmula de Sommerfeld), y en este caso se cumple que

las extremales correspondientes al lagrangiano F de (25) están contenidas en un plano. Así, basta ocuparse del problema restringido a \mathbb{R}^2 . Falta sacar a luz la correspondencia exacta entre (43) y (26).

Otra indicación de que detrás de todo esto pueden estar ocultas relaciones de relevancia para la Física, es la siguiente:

La constante k en (43) debe identificarse con la constante de Planck h . De otro lado, la carga eléctrica, e , aparece en el lagrangiano relativista $F(x, \dot{x})$ de (25) de una manera muy sugerente. El segundo término puede muy bien provenir de una condición restrictiva que convierta a un problema dado inicial en un problema de Lagrange. Por ejemplo, si exigimos que nuestras extremales se busquen sólo entre aquellas curvas que satisfacen

$$\sqrt{\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = A_\mu \dot{x}^\mu \quad (44)$$

vemos que el factor e en (25) juega el papel de un multiplicador de Lagrange [3].

La exigencia (44) puede ser la "traducción" del carácter múltiplemente conexo de la región considerada. ($F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \neq 0$, indica en términos físicos, la existencia de un campo electromagnético, originado por alguna "carga" puntual).

Las constantes e y h parecen estar entonces íntimamente relacionadas. De hecho, en las ecuaciones de las extremales aparecen siempre en la combinación $2\pi e^2/hc$ [17], que es un número *sin dimensiones*, su valor experimental ($1/137$) es pues independiente del sistema de unidades, hecho que es indicativo de una conexión intrínseca entre las constantes involucradas. Dicha conexión podría provenir de que en algún sentido, tanto e como h "miden" qué tanto difiere la región considerada de una región simplemente conexa. Por supuesto, hace falta plantear estas conjeturas de manera precisa, antes de aventurar una respuesta definitiva.

Referencias

- [1] *Carathéodory, C.* Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung Teubner, Leipzig und Berlin (1935) (en inglés: Calculus of variations, etc., Holden-Day, San Francisco (1967))
- [2] Se usa la convención de *Einstein*: se sobreentiende la sumatoria sobre índices que aparecen repetidos de $i = 1$ a $i = n$.
- [3] *Rund H.* The Hamilton-Jacobi theory in the calculus of variations Robert E. Krieger Pub. Co. Huntington, N.Y. (1973).
- [4] *Dirac, P.A.M.* Proc. Roy. Soc. London A 246 (1958) 326-332.
- [5] *Misner, C., Thorne, K. Wheeler, J.* Gravitation San Francisco, Freeman (1973).
- [6] *Landau, L., Lifschitz, E.* The Classical Theory of Fields, 4th. ed. Pergamon, New York, (1975).
- [7] *Kramers, H.A.* The Foundations of Quantum Theory. Amsterdam: North Holland Pub. Co. (1957).
- [8] *Merzbacher, E.* Quantum Mechanics. John Wiley and Sons, Inc. N.Y. (1961).
- [9] *Schrödinger, E.* Ann. der Phys., 79 (1926) 361-376.
- [10] *Bjorken, J.D., Drell, S.D.* Relativistic Quantum Mechanics Mc Graw. Hill Book Co., N.Y. (1964).
- [11] *Lamb, W.E., Retherford, R.C.* Phys. Rev 72, 241 (1947)
- [12] *Roman, P.* Advanced Quantum Theory Addison - Wesley Pub. Co. Inc. (1965).
- [13] *Halzen, F., Martin, A.D.* Quarks and Leptons. Wiley, N.Y. (1984).
- [14] *Heisenberg, W.Z.* Phys 77, 1 (1932) (también en Brink, D.M., Nuclear Forces, Pergamon, Elmsford, N.Y. 1965.
- [15] *Bliss, G.A.* Lectures on the Calculus of Variations University of Chicago Press, Chicago (1946).
- [16] *Lages Lima, E.* Curso de análise (Vol.2) Rio de Janeiro, I.M.P.A. CNPq, (1981).
- [17] c es la velocidad de la luz. En las unidades elegidas para escribir el F de (25) es $c = 1$.