Pro Mathematica: Vol.VI,Nos.11-12,1992

CONSTRUCCION DE EJEMPLOS DE BIENES GIFFEN E INFERIORES

Ramón **García-Cobián J.***

El presente artículo tiene por objeto exhibir dos ejemplos microeconómicos de la teoría del consumidor: los de un bien Giffen (aquél cuya demanda disminuye al hacerse más baratos) y un bien inferior (aquél cuya demanda decrece al aumentar el ingreso). La idea me fue sugerida por el profesor L. Vilcapoma, del Departamento de Economía, y tiene por propósito el servir de ilustración para la construcción de ejemplos económicos de determinadas características. Espero que pueda también ser de alguna utilidad a los alumnos de los cursos de Investigación de Operaciones, Análisis Matemático 3 y Modelos Matemáticos de la Economía.

* Profesor Principal del Depto. de Ciencias, PUCP.

. Todo se basa en la estática comparativa del consumidor[1] cuya relación de preferencias se asume: continua, estrictamente convexa, monótona y tal que admita funciones de utilidad representativas de ella que sean diferenciables de clase C^2. Luego, entre éstas las hay que son estrictamente cuasicóncavas y de utilidades marginales decrecientes.

. Sea $u:\mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ una tal función de utilidad; el óptimo del consumidor, para precios $p \in \mathbb{R}^2_+$ y riqueza R dados es dado implícitamente por las condiciones de primer orden para el problema: max u(x)

sujeto a: p.x = R.

Dichas condiciones son: $Du(x) - \lambda p = 0$

$R - p.x = 0$. Ellas determinan implícitamente al óptimo $x = \varphi(p,R)$, si se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita a saber, que la derivada del sistema respecto a (x,λ) sea de matriz regular:

$$0 \neq \det \left[\begin{array}{c:c} D^2u(x) & -p \\ \hdashline -p & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} u_{11}(x) & u_{12}(x) & -p_1 \\ u_{12}(x) & u_{22}(x) & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como esta condición se cumple genéricamente, puede asumirse sin perder mayor generalidad.

. En un complejo mercantil óptimo del consumidor, se dice que una mercancía es "de Giffen" si al bajar su precio, baja también su demanda; así, la primera lo es, si $\partial x_1/\partial p_1 > 0$. En cambio, se dirá que es "inferior", si al aumentar el ingreso R, disminuye su demanda, i.e., $\partial x_1/\partial R < 0$.

---

[1] Ver por ejemplo, Malinvaud, Lectures on Microeconomics, North-Holland, 1972.

. Derivando el sistema, o por una mera aplicación del teorema de la función implícita, se obtiene:

$$\frac{\partial(x_1,x_2,\lambda)}{\partial(p_1,p_2,R)} := \begin{bmatrix} \partial x_1/\partial p_1 & \partial x_1/\partial p_2 & \partial x_1/\partial R \\ \partial x_2/\partial p_1 & \partial x_2/\partial p_2 & \partial x_2/\partial R \\ \partial\lambda/\partial p_1 & \partial\lambda/\partial p_2 & \partial\lambda/\partial R \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} D^2u(x) & -p \\ \hdashline -p & 0 \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c:c} \lambda I & 0 \\ \hdashline x & -1 \end{array}\right].$$

Luego,

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \det\begin{bmatrix} \lambda & u_{12} & -p_1 \\ 0 & u_{22} & -p_2 \\ x_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix} \Big/ \det\left[\begin{array}{c:c} D^2u(x) & -p \\ \hdashline -p & 0 \end{array}\right] =$$

$$= \frac{-\,p_2u_2(x) + x_1(p_1u_{22}(x) - p_2u_{12}(x))}{2u_{12}(x)p_1p_2 - p_1^2u_{22}(x) - p_2^2u_{11}(x)} \quad (*)$$

Como $u_{11}<0> u_{22}$, si $u_{12} > 0$, entonces el denominador es positivo y para que el bien 1 sea de Giffen, también el numerador ha de ser positivo; luego, $u_{22}(x)$ debe ser mayor que 0, lo cual contradice que $u_{22}<0$: Así, el bien 1 es de Giffen, sólo si $u_{12}(x) < 0$. Sería de Giffen si, por, ejemplo, numerador y denominador fueran positivos; pero esto equivale (ya que $\lambda = u_1(x)/p_1 > 0$) a que

$$(*)\ .\ \frac{\lambda}{\lambda^2} > 0, \text{ i.e., } -(u_2)^2 + x_1u_1u_{22} - x_1u_2u_{12} > 0$$

$$\wedge\ \ 2u_1u_2u_{12} - u_1^2u_{22} - u_2^2u_{11} > 0$$

Para tal fin, sea $u(x) = a_1x_1+a_2x_2+b_{11}x_1^2+b_{12}x_1x_2+b_{22}x_2^2$;

entonces:

$$u_1(x) = a_1+2b_{11}x_1+b_{12}x_2>0 \wedge u_2(x) = a_2+b_{12}x_1+2b_{22}x_2>0$$
$$\wedge\ u_{11}(x) = 2b_{11}<0 \wedge u_{12}(x) = b_{12}<0 \wedge u_{22}(x) = 2b_{22}<0.$$

Si el óptimo se escoge como (1,1), entonces el bien 1 es **de** Giffen si, y sólo si, :

$$- (u_2(x))^2 + u_1(x)u_{22}(x) - u_2(x)u_{12}(x) > 0 \wedge$$
$$\wedge\ 2u_1(x)u_2(x)u_{12}(x) - u_1(x)^2u_{22}(x) - u_2(x)^2u_{11}(x) > 0$$

con $x = (1,1)$; pero por la forma de u, **esto es** (con $a_1 = 1 = a_2$) :

$$\begin{aligned} &f_1(b_{11},b_{12},b_{22}) := \\ &(1+2b_{11}+b_{12})2b_{22}-(1+b_{12}+2b_{22})(1+2b_{12}+2b_{22}) > 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} f_2(b_{11},b_{12},b_{22}) :=\ & b_{12}(1+2b_{11}+b_{12})(1+b_{12}+2b_{22}) \\ & - b_{22}(1+2b_{11}+b_{12})^2 - b_{11}(1+b_{12}+2b_{22})^2 > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Un punto situado en la intersección de las fronteras de (1) y (2) es: $\bar{b} = -(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ como se comprueba fácilmente.

La idea, ahora, es buscar un $\Delta\bar{b}$ situado en la intersección de los dos semiespacios superiores determinados por los planos que pasan por $\bar{b}$ de vectores normales los gradientes de f_1 y f_2 en $\bar{b}$.

$$\nabla f_1(\bar{b}) = (-1,0,1) \quad \text{pero} \quad \nabla f_2(\bar{b}) = (0,0,0)$$

Pero con un incremento positivo en b_{22} se incrementan f_1 y f_2, aunque aún hace falta lograr $u_1 > 0 < u_2$ en (1,1); que $u_2(1,1) > 0$ se logra con el $\Delta b_{22} > 0$ anterior. Sin embargo, que $u_1(1,1) > 0$ requiere que $\Delta b_{11}>0$, y como $\partial^2 f_2/\partial b_{11}{}^2 = - 8b_{22} = 2$, entonces respecto a f_2, este $\Delta b_{11} > 0$ sólo refuerza lo deseado, aunque ya que $\partial f_1/\partial b_{11} = -1, f_1$ puede hacerse < 0. Así, es preciso elegir $\Delta b_{11} > 0 < \Delta b_{22}$ tales que

$$\frac{\partial f_1}{\partial b_{11}}(\bar{b})\Delta b_{11} + \frac{\partial f_1}{\partial b_{22}}(\bar{b})\Delta b_{22} = -\Delta b_{11} + \Delta b_{22} \text{ sea } > 0;$$

por ejemplo, elegir $\Delta b := (1/32, 0, 1/8)$. Luego, $\bar{b} + \Delta b = (-7/32, -1/2, -1/3)$.

Así, la función de utilidad elegida es

$$u(x) := x_1 + x_2 - \frac{7}{32} x_1^2 - \frac{1}{2} x_1 x_2 - \frac{1}{8} x_2^2.$$

El vector de precios p ha de ser paralelo a $\nabla u(1,1) = (1/16, 1/4)$; por ejemplo: $p = (1,4)$. Entonces la riqueza $R = 1x1 + 4x1 = 5$.

Finalmente, el problema es:

$$\max\ x_1 + x_2 - \frac{7}{32} x_1^2 - \frac{1}{2} x_1 x_2 - \frac{1}{8} x_2^2$$
$$\text{s.a } x_1 + 4x_2 = 5.$$

La solución por Lagrange es dada por:

$$1 - \frac{7}{16} x_1 - \frac{1}{2} x_2 - \lambda = 0$$

$$1 - \frac{x_1}{2} - \frac{1}{4} x_2 - 4\lambda = 0$$

$$x_1 + 4x_2 = 5$$

La solución es $(1, 1, 1/16) = (x_1, x_2, \lambda)$.

. En consecuencia, de (*) de la página 3,

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}(1,4,5) = \frac{-4x\frac{1}{4} + (1 \times -\frac{1}{4} - 4 \times -\frac{1}{2})}{2 \times \frac{1}{2} \times 4 - (-\frac{1}{4}) - 16(-\frac{7}{16})} = \frac{3}{13} > 0$$

A modo de comprobación, considérese un nuevo problema con el precio p_1 incrementado en $\varepsilon > 0$:

$$\max x_1 + x_2 - \frac{7}{32}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{8}x_2^2$$

$$\text{suj.a } (1+\varepsilon)x_1 + 4x_2 = 5$$

Se comprueba fácilmente que en la nueva solución

$$x_1 = 1 + \frac{\varepsilon(27 + 96\varepsilon - 16\varepsilon^2}{9(13 - 14\varepsilon)}.$$

Así, con $\varepsilon = 1/4$, resulta $x_1 = 1 + 25/171$ que es mayor que el valor 1 obtenido para $p_1 = 1$. Luego, respecto al óptimo (1,1) de este consumidor, el bien 1 es de Giffen

——— o ———

Para conseguir un bien inferior, hay que imponer la condición $\frac{\partial x_1}{\partial R} < 0$. De la pág.2, se obtiene que $\frac{\partial x_1}{\partial R}$ es el elemento (1,3) de la matriz inversa de $\begin{bmatrix} D^2u(x) & \vdots & -p \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots \\ -p & \vdots & 0 \end{bmatrix}$;

así, $$\frac{\partial x_1}{\partial R} = \frac{p_2u_{12}(x) - p_1u_{22}(x)}{2u_{12}(x)p_1p_2 - p_1^2u_{22}(x) - p_2^2u_{11}(x)}.$$

Entonces, $\frac{\partial x_1}{\partial R} < 0$ si, y sólo si, $\frac{\lambda}{\lambda^2}\frac{\partial x_1}{\partial R} < 0$, i.e.

$$\frac{u_2u_{12} - u_1u_{22}}{2u_{12}u_1u_2 - u_1^2u_{22} - u_2^2u_{11}} < 0.$$

Puede verse que si $u_{12}(x) > 0$, este cociente es ≥ 0. Luego, $u_{12}(x) < 0$.

Lo deseado se consigue, por ejemplo, con:

$$- u_1u_{22} < - u_2u_{12} \wedge - u_1^2\, u_{22} - u_2^2\, u_{11} > - 2u_{12}u_1u_2$$

que equivale a: $-2u_1^2\, u_{22} < -2u_{12}u_1u_2 < -u_1^2u_{22} - u_2^2u_{11}$.

Para esto, sea $u = a_1x_1 + a_2x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2$; sea (1,1) el óptimo, y sean $a_1 = a_2 = 1$. Entonces las condiciones anteriores son:

$$- (1+2b_{11}+b_{12})^2\, 2b_{22} \underset{(1)}{<} - b_{12}(1+2b_{11}+b_{12})(1+b_{12}+2b_{22})$$

$$\underset{(2)}{<} - (1+2b_{11}+b_{12})^2\, b_{22} - (1+b_{12}+2b_{22})^2\, b_{11}$$

Pero si $u_1(1,1) > 0$, entonces (1) equivale a:

$$- 2b_{22}(1+2b_{11}+b_{12}) + b_{12}(1+b_{12}+2b_{22}) < 0.$$

Un punto situado en las fronteras de (1) y (2) es $\bar{b} = (-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$ para el cual: $u_1(1,1) = 1/3 = u_2(1,1)$, y, llamando f_1 y f_2 a las funciones que según (1) y (2) han de ser negativas, se tiene que $f_1(\bar{b}) = 0 = f_2(\bar{b})$. Pero, los gradientes son: $\nabla f_1(\bar{b}) = (2/3, 1/3, -4/3)$ y $\nabla f_2(\bar{b}) = (1/9, -1/9, 1/9)$. Luego, basta con un pequeño incremento negativo en b_{11} para ingresar al interior de $(1) \cap (2)$: por ejemplo, con $\Delta b = (-1/12, 0,0)$, se tiene $b = (-1/4, -1/3, -1/6)$, para el cual, $u_1(1,1) = 1/6 \wedge u_2(1,1) = 1/3$. Además, $f_1(b) = -1/18 \wedge f_2(b) = -1/72$.

Así, $u = x_1 + x_2 - \frac{1}{4}\, x_1^2 - \frac{1}{3}\, x_1x_2 - \frac{1}{6}\, x_2^2$. Si (1,1) ha de ser óptimo, entonces $\nabla u(1,1)$ será paralelo a p, i.e. p será un múltiplo de (1/6, 1/3), por ejemplo $p = (1,2)$. La riqueza es $R = p.(1,1) = 3$. Así, $\partial x_1/\partial R$ en (1,1,3) es, de la pág. 6, $\dfrac{2x(-1/3) - 1x(-1/3)}{2(-1/3)2+1/3-4(-1/2)} = \dfrac{-1/3}{1} = -1/3 < 0$

Como comprobación, véase que el óptimo de:

$$\max\ x_1 + x_2 - \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{3}x_1x_2 - \frac{1}{6}x_2^2$$
$$\text{s.a. } x_1 + 2x_2 = 3$$

es dado por: $0 = 1 - \dfrac{1}{2}x_1, - \dfrac{1}{3}x_2 - \lambda$

$$0 = 1 - \frac{1}{3}x_1, - \frac{1}{3}x_2 - 2\lambda$$
$$3 = x_1 + 2x_2\ ,$$

lo que da (1,1, 1/6). Así, $x_1 = 1$.

Si se incrementa la riqueza en un pequeño positivo ε, entonces en el problema anterior sólo cambia la restricción a: $x_1 + 2x_2 = 3+\varepsilon$, y el nuevo óptimo es dado por:

$$0 = 1 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \lambda$$
$$0 = 1 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - 2\lambda$$
$$3+\varepsilon = x_1 + 2x_2.$$

El nuevo óptimo tiene $x_1 = 1 - \dfrac{\varepsilon}{3}$, como es fácil comprobar, por lo que en el óptimo (1,1) el bien 1 es un bien inferior.

Pro Mathematica: Vol.VI,Nos.11-12,1992

SOLUÇÕES GLOBAIS DE UM SISTEMA HIPERBOLICO COM TERMOS NÃO LINEARES NEGATIVOS

Oswaldo **Ramos Chumpitaz***

1. Introdução

O sistema de equações

$$(*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \alpha^2 u + g^2 v^2 u = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta v + \beta^2 u + h^2 u^2 v = 0 \\ \qquad \text{com } \alpha,\beta,f,g \in \mathbb{R} \text{ diferentes de zero.} \end{cases}$$

foi introduzido por I. Segal [8] para descrever a interação de cargos de mesons em um campo electromagnético. Vários autores estudaram este sistema entre os quais podemos mencionar: K. Jörgen [1], V.G. Markaukov [3],etc. Recentemente L.A. Medeiros-G. Perla Menzala [4] analizaram a existência de soluções fracas do problema misto para o sistema (*) em $\Omega \times\,]0,T[$, *onde* Ω *é um domínio limitado de* $\mathbb{R}^n$, $n = 1,2,3$. *Estes resultados foram generalizados por M. Milla Miranda-L.A. Medeiros [5], para a não*

* Profesor Principal de la UNMSM.

linearidade da forma $|v|^{\rho+2}|u|^{\rho}u$, $|u|^{\rho+2}|u|^{\rho}v$, *e qualquer domínio de* $\mathbb{R}^n$.

Neste trabalho estudaremos a existência e unicidade da solução fraca global do problema mismo para o sistema

$$(**)\ \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + a(x)v^2u = f_1 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + a(x)u^2v = f_2 \end{cases}$$

em $\Omega \times]0,T[$ sendo Ω domínio limitado de $\mathbb{R}^3$, T real positivo qualquer, $a(x) \in L^\infty(\Omega)$.

Observamos que o método usual de energia não trabalha neste caso devido ao termo $a(x)$, usaremos para este caso um método de estimativas introduzido por *L. Tartar* [9], diferente do método de "Potential Well" introduzido por *D.H. Sattinger* [7]. A unicidade é obtida por um método devido a *M.I. Visik - O. Ladysenskaja* [10].

2. Notação e Resultados prévios

Ω domínio limitado de $\mathbb{R}^3$

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)\ /\ D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ \alpha \leq m\}$$
$$\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),$$

$\alpha_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, D^α derivada no sentido sentido do de distribuições $H^o(\Omega) = L^2(\Omega)$, $H^m_o(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^m(\Omega)}$ $H^{-m}(\Omega)$ é o dual de $H^m_o(\Omega)$, $\mathcal{D}(\Omega)$ é o espaçõ das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto contenido em Ω.

O producto interno e a norma em $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$ serão representados respectivamente por:

$$(.,.),\ |.|\ \text{ e }\ ((.,.)),\ \|.\|$$

Seja $T > 0$, B espaço de Banach

$L^p(0,T;B) = \{u:]0,T[\to B\ /\ \|u\|_B \in L^p(0,T)\}$ com a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;B)} = \left(\int_0^T \|u\|_B^p\right)^{1/p} \qquad 1 \le p < \infty.$$

$L^\infty(0,T;B) = \{u:]0,T[\to B\ /\ \|u\|_B \in L^\infty(0.T)\}$

$$\|u\|_{L^p(0,T;B)} = \sup_{0<t<T} \text{ess}\ \|u(t)\|_B$$

$\mathcal{D}'(Q)$ e $\mathcal{D}'(0,T)$ onde $Q = \Omega \times]0,T[$ denota o espaço de distribuições sobre Q e $]0,T[$ respectivamente.

Δ é o Laplaciano; $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\ dx$; ∇u é o gradiente de u.

Lema 1. (Sobolev)

Seja Ω aberto limitado de $\mathbb{R}^3$ então $H_0^1(\Omega)$ tem imersão contínua em $L^q(\Omega)$ para $1 \le q \le 6$, isto é

$$|u|_q \le C_q\|u\| \quad 1 \le q \le 6,\ |\ |_q \text{ norma em } L^q(\Omega) \tag{1}$$

Seja $V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, $h = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ com as normas $\|[w,z]\|^2 = \|w\|^2 + \|z\|^2$; $|[\varphi,\psi]|^2 = |\varphi|^2 + |\psi|^2$, respectivamente.

Procedemos formalmente no sistema (**), multiplicando a primeira equação por u' e a segunda por v' e somando temos:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}|[u',v']|^2 + \frac{1}{2}\|[u,v]\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)u^2v^2dx\right\} = (f_1,u') + (f_2,v') \tag{2}$$

como $a(x) \in L^\infty(\Omega)$ podemos supor que $|a(x)| \le 1$, agora

$$\left|\frac{1}{2}\int_\Omega a(x)u^2v^2ds\right| \le \frac{1}{2}\int_\Omega u^2v^2dx \le \frac{1}{2}\left(\int_\Omega u^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega v^4\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\,|u|_4^2\,|v|_4^2 \le \frac{1}{2}\,c_4^4\,\|u\|^2\|v\|^2 \le \frac{1}{8}\,c_4^4\,\|[u,v]\|^4,$$

chamemos

$$c_4 = M \Rightarrow -\frac{1}{8}M^4\|[u,v]\|^4 \le \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)u^2v^2dx$$

assim

$$\frac{1}{2}\|[u,v]\|^2 - \frac{1}{8}M^4\|[u,v]\|^2 \le \frac{1}{2}\|[u,v]\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)u^2v^2dx \qquad (3)$$

Seja o polinômio $P(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{M^4}{8}\lambda^4$, ele tem raizes em $\lambda = 0, \pm\frac{2}{M^2}$, seus máximos os toma em $\lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{M^2}$ e o valor máximo é

$$\frac{1}{2M^4}, \quad P(\lambda) \ge 0 \qquad \forall\,\lambda \in \left[-\frac{2}{M^2}, \frac{2}{M^2}\right]$$

de (2) temos que

$$\frac{1}{2}\,|[u',v']|^2 + \frac{1}{2}\,\|[u,v]\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)u^2v^2dx$$

$$= \int_0^t \{((f_1;u') + (f_2,v'))ds + \gamma \qquad (4)$$

$$= \frac{1}{2}\,|[u_1,v_1]|^2 + \frac{1}{2}\,\|[u_o,v_o]\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)u_o^2v_o^2dx$$

onde $u_o = u(0)$, $v_o = v(0)$, $u_1 = u'(0)$, $v_1 = v'(0)$ y por

(3) vemos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,|[u',v']|^2 - \frac{1}{2}\,\|u,v]\|^2 - \frac{M^4}{8}\,\|[u,v]\|^4 \\
\leq\ &\frac{1}{2}\,|[u',v']|^2 - \frac{1}{2}\,\|u,v]\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)u^2v^2dx
\end{aligned}
\tag{5}
$$

3. Teorema

Sejam

$$[u_o,v_o] \in V,\ [u_1,v_1] \in H,\ f_1,f_2 \in L^1(0,T;L^2(\Omega)) \tag{6}$$

$$\|[u_o,v_o]\| < \frac{\sqrt{2}}{M^2}\,,\ |a(x)| \leq 1 \quad \text{q.s. em } \Omega \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha = &\left(\frac{1}{2}\,|[u_1,v_1]|^2 + \frac{1}{2}\,\|u_o,v_o]\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)u_o^2v_o^2dx\right)^{1/2} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}}\int_o^T(|f_1|+|f_2|)ds < \left(\frac{1}{2M^4}\right)^{1/2}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Então existem duas funções u,v tais que

$$[u,v] \in L^\infty(0,T;V),\ [u',v'] \in L^\infty(0,T;H)$$

satisfazendo

$$
\begin{array}{llll}
u'' - \Delta u + a(x)v^2u = f_1 & & \text{em} & L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \\
v'' - \Delta v + a(x)u^2v = f_2 & & \text{em} & L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \\
u(0) = u_o, & v(0) = v_o & & u|_{\partial\Omega} = 0 \\
u'(0) = u_1, & v'(0) = v_1 & & v|_{\partial\Omega} = 0
\end{array}
$$

DEMONSTRAÇÃO:

Usando o método de Galerkin

Seja $\{w_l\}$ "base" de $H_o^1(\Omega)$ e $V_m = [w_1,w_2,\dots,w_m]$ espaço gerado por $w_1,\dots,w_m$.

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j \quad , \quad v_m(t) = \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)w_j \tag{9}$$

$$\left.\begin{array}{llll} u_m(0) = u_{om} \longrightarrow u_o & \text{forte em} & H_o^1(\Omega) \\ v_m(0) = v_{om} \longrightarrow v_o & \text{forte em} & H_o^1(\Omega) \\ u_m'(0) = u_{1m} \longrightarrow u_1 & \text{forte em} & L^1(\Omega) \\ v_m'(0) = u_{1m} \longrightarrow v_1 & \text{forte em} & L^2(\Omega) \end{array}\right\} \tag{10}$$

O sistema aproximado

$$(S.A)\begin{cases} (u_m'',w)+ a(u_m,w)+(a(x)v_m^2u_m,w) = (f_1,w), w\in V_m \\ (u_m'',w)+ a(v_m,w)+(a(x)u_m^2v_m,w) = (f_2,w) \end{cases}$$

com as condições iniciais (10) possui pelo Teorema de Caratheodory solução num intervalo $[0,t_m[$, procedendo como nos cálculos prúvios temos que (3) e (4) se cumprem para $u_m(t)$, $V_m(t)$, $t \in [0,t_m[$

agora como $\alpha^2 < \dfrac{1}{2M^4}$, seja β tal que $0 < \beta < \dfrac{\sqrt{2}}{M^2}$ e

$P(\beta) = \alpha^2$ listo é $\alpha^2 = \dfrac{1}{2}\beta^2 - \dfrac{1}{8}M^4\beta^4$ pela hipótesis (7)

temos $P(\|[u_o,v_o]\|) \geq 0$, de (10) e (7) vemos que

$$\|[u_m(0),v_m(0)]\| < \frac{\sqrt{2}}{M^2} \text{ para m suficientemente grande} \tag{11}$$

asseguramos que

$$\|[u_m(0),v_m(0)]\| < \frac{\sqrt{2}}{M^2}\ , \quad \forall t \in [0,t_m[$$

por absurdo suponhamos que existe

$$t \in [0,t_m[\;/\; \|[u_m(t),v_m(t)]\| \geq \frac{\sqrt{2}}{M^2}.$$

Seja $t^* = \inf\{t \;/\; \|[u_m(t),v_m(t)]\| \geq \frac{\sqrt{2}}{M^2}\}$ por (11) $t^*>0$
e da continuidade das soluções aproximadas, temos

$$\|[u_m(t^*),v_m(t^*)]\| \geq \frac{\sqrt{2}}{M^2} < \frac{2}{M^2}, \tag{12}$$

$$\text{seja } T_o \;/\; 0 < t^* < T_o < t_m$$

e $\|[u_m(t),v_m(t)]\| < \frac{2}{M^2}$ $\forall\, t \in [0,T_o]$ listo pela continuidade

logo

$$P(\|[u_m(t),v_m(t)]\|) \geq 0 \quad \forall\, t \in [0,T_o];$$

seja

$$\gamma_m = \frac{1}{2}\,|[u_{1m},v_{1m}]|^2 + \frac{1}{2}\,\|[u_{om},v_{om}]\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)u_{om}^2 v_{om}^2 dx$$

$$\frac{1}{2}\,|[u_m'(t),v_m'(t)]|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\,|[u_m'(t),v_m'(t)]|^2 + P(\|[u_m(t),v_m(t)]\|)$$

$$\leq \frac{1}{2}\,|[u_m'(t),v_m'(t)]|^2 + \frac{1}{2}\,\|[u_m(t),v_m(t)]\|^2$$

$$+ \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)u_m^2(t)v_m^2(t)dx$$

$$= \int_o^t \{(f_1(s),u_m'(s)) + (f_2(s),v_m'(s))\}ds + \gamma_m;$$

como

$$\gamma_m - \gamma \leq \int_o^t (|f_1(s)|+|f_2(s)|)\,|[u_m'(s),v_m'(s)]| + \gamma + \varepsilon = \varphi(t)$$

$\Rightarrow$ (13)

$$\varphi'(t) = (|f_1(t)|+|f_2(t)|)\,|[u_m'(t),v_m'(t)]| \le$$

$$\le (|f_1(t)|+|f_2(t)|)\sqrt{2\varphi(t)}$$

$$2(\varphi^{1/2}(t))' = \varphi^{-1/2}(t)\varphi'(t) \le \sqrt{2}\,(|f_1(t)|+|f_2(t)|),$$

donde integrando

$$\sqrt{\varphi(t)} \le \sqrt{\varphi(0)} + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_o^t (|f_1(s)|+|f_2(s)|)ds$$

$$\le \sqrt{\gamma+\varepsilon} + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_o^T (|f_1(s)|+|f_2(s)|)ds \qquad \forall\ \varepsilon>0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\varphi(t)} \le \gamma^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_o^T (|f_1(s)|+|f_2(s)|)ds = \alpha < \left(\frac{1}{2M^4}\right)^{1/2}$$

logo

$$\varphi(t) \le \alpha^2 < \frac{1}{2M^4} \qquad \forall\ t \in [0,T_o] \tag{14}$$

$\Rightarrow$ $P(\|[u_m(t),v_m(t)]\|) \le \alpha^2 \qquad \forall\ t \in [0,T_o]$ daí

$\|[u_m(t),v_m(t)]\| \le \beta \qquad \forall\ t \in [0,T_o]$ assim

para $t^* \in [0,T_o]$. Temos

$$\frac{\sqrt{2}}{M^2} = \|[u_m(t^*),v_m(t^*)]\| \le \beta < \frac{\sqrt{2}}{M^2}$$

o que é uma contradição, logo tem-se

$$\|[u_m(t),v_m(t)]\| < \frac{\sqrt{2}}{M^2} \qquad \forall\ t \in [0,T_o] \tag{15}$$

das mesmas estimativas obtemos

$$\|[u'_m(t),v'_m(t)]\| < \frac{\sqrt{2}}{2M^2} \quad \forall\ t \in [0,T_m] \tag{16}$$

logo podemos extender a solução a um intervalo [0,T] independente de m.

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ e } (v_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ são limitados em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{17}$$

$$(u'_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ e } (v'_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ são limitados em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{18}$$

$$(u_m^2 v_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ e } (v_m^2 u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ são limitados em } L^\infty(0,T;L^{3/2}(\Omega)) \tag{19}$$

disto segue-se que $\exists$ ubsucessões as quais denotaremos tambén por u_m, v_m tais que

$$u_m \rightarrow u \quad \text{e} \quad v_m \rightarrow v \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{20}$$

$$u'_m \rightarrow u' \quad \text{e} \quad v'_m \rightarrow v' \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{21}$$

$$u_m^2 v_m \rightarrow X_1 \quad \text{e} \quad v_m^2 u_m \rightarrow X_2 \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0,T;L^{3/2}(\Omega)) \tag{22}$$

agora usando o fato de que $H_0^1(\Omega)$ tem imersão compacta em $L^2(\Omega)$ e o Lema de Lions-Aubin, vemos que $X_1 = u^2 v$, $X_2 = v^2 u$, logo podemos passar ao limite na forma usual, as condições iniciais se verificam de modo standard.

Para a unicidade, sejam $U = u - \hat{u}$, $v = v - \hat{v}$ $\Rightarrow$

$$U'' - \Delta U + a(x)(v^2\, u - \hat{v}^2\, \hat{u}) = 0 \tag{23}$$

$$U'' - \Delta V + a(x)(u^2\, v - \hat{u}^2\, \hat{v}) = 0 \tag{24}$$

$$U(0) = 0,\ V(0) = 0,\ U'(0) = 0,\ V'(0) = 0$$

Sejam

$$\varphi(t) \begin{cases} -\displaystyle\int_t^s U(\sigma)d\sigma & \text{para} \quad 0 \le t \le s \\ \quad o & \text{para} \quad s < t \le T \end{cases}$$

$$\varphi(t) \begin{cases} -\displaystyle\int_t^s V(\sigma)d\sigma & \text{para} \quad 0 \le t \le s \\ \quad o & \text{para} \quad s < t \le T \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\varphi,\psi \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)$, tomando producto interno de (23) com φ e (24) com ψ, obtemos estimados que nos permite obter unicidade em algum intervalo $[0,s_0]$, repetindo o processo iniciando em s_0, podemos depois de algumas e-tapas chegar a T.

Bibliografia

[1] *K.Jörgen,* Nonlinear wave equations,University of Colorado, Departament of Mathematics, 1970.

[2] *J.L. Lions,* Quelques Méthodes de Résolution de Problèmes aux Limites Non-Linéaires, Dunod,Paris 1969.

[3] *V.G. Makhankov*, Dynamics of classical solutions in integrable systems, Physics Reports (Section C of Physic Letters) 35 (1978), 1-128.

[4] *L.A. Medeiros - G.Perla Menzala*, On a mixed pro-plem for a class of nonlinear Klein-Gordon equa-tions, Atas 21° Seminário Brasileiro de Análise, Brasília, May 1985.

[5] *L.A. Medeiros - M. Milla Miranda*, Weak solutions for a coupled nonlinear hyperbolic equations, to appear in Funckialoy Ekvacioj.

[6] *O. Ramos Chumpitaz*, Observaciones sobre um problema no lineal sin Estimativas Globais a-priori SBA, 22°Seminário Brasileiro de Análise, 1985 p. 229 - 237.

[7] *D.H. Sattinger*, On global solutions of nonlinear hyperbolic equations, Arch. Rat. Mech. Anal. 30 (1968), 148 - 172.

[8] *I.*Segal,Nonlinear partial differential equations in Quantum Field Theory, Proc. Symp. Appl. Math. A.M.S. 17 (1965), 210 - 226.

[9] *L. Tartar*, Topics in nonlinear Analysis, Publications Mathematiques D'Orsay.

[10] *M.I. Visik - O.A.Ladysenskaja*, On boundary value problem for partial differential equations and certain class of operator equations. A.M.S.Translations, Serie 2, Vol.10 (1958).

Pro Mathematica: Vol.VI,Nos.11-12,1992

BUBBLES SOLITON SOLUTIONS IN THE Φ^6 - FIELD THEORY

M.A. **Agüero-Granados***,
V.G. **Makhankov****

Abstract

We have studied the ϕ^6 - model in the parameter domain $A > 1$. For this case we have found out a new types of soliton solutions such kinks, bubbles, and drops. The investigation of these waves around the stable minimum shows that the sound velocity provide a rigid constraint for this oscillations to be or no to stable: this is the question.

* Pontificia Universidad Católica del Perú.

** Joint Institute for Nuclear Research, LCTA, Rusia.

1. Introduction

It has long been recognized that a remarkable progress has been made in obtaining exact solutions for non-linear dynamical systems.The "non thermalize" effect is really very exciting problem and plays a great role in developing the understanding of soliton concepts in nature [1]. The role of solitons in the contemporary physics is generally recognized. The esential soliton aspect of natural phenomena has been made evident by the remarkable success in condensed matter and high energy physics. In this paper we will restrict ourselves to study the fi-six model in 1 + 1 dimension specifically. The fi-six model occurs in many branches of physics for example in the theory of ferromagnetism, the 2-body attractive and 3-body repulsive with skyrme forces in nuclear hydrodynamics [2] and in the study of soliton models of hadrons [3]. This theory also was used to des cribe phenomenologically phase transitions [4] and [5]. In addition of those mentioned works this model is also extensively used in the study of propagation of stionary light beams in the medium with the weakly saturating nonlinearity [6]. It is proved that all the above mentioned problem are governed by the following equation of motion.

$$i\psi_t + \Delta\psi + \alpha\psi + (|\psi|^2 - |\psi|^4)\psi = 0 \qquad (1)$$

or performing the scale transformation

$$\psi = \phi[2/3(2+A)]^{-1/2}$$

$$t' = \frac{4}{3}(A+2)t$$

$$x' = \frac{2}{\sqrt{3}}(A+2)x$$

we arrive at

$$i\phi_{t'}+\phi_{x'x'}-(1+2A)\phi+2(2+A)|\phi|^2\phi - 3|\phi|^4\phi = 0 \qquad (2)$$

This equation is more convenient for studying the excitations near the condensate. The coupling between the parameters is

$$\alpha = -3/4(1+2A)/(A+2)^2 \tag{3}$$

These equations support two types of solitons: a) topological solitons which are very similar to the well known soliton solutions of the cubic nonlinear Schrö-dinger equation NSE of the repulsive type. In $D = 1$ space these solution correspond to kinks, in $D = 2$ they are named vortices and there is no analogue at $D = 3$[7] The second type of solitons: b) nontopological solitons with specific propierties.These solitions have the form of stationary rarefaction bubbles [13] and exist in di-fferent domain of the parameter A.

The main aim of this work is to show that the equa tion (1) exhibits bubble, kink and drop type of soli-tions in the range of the parameter $A > 1$ which was not considered earlier, e.g. in [10], [12] and [13].

"One wants to be able to take a realistic view of the world, to talk about the world as if it is really there, even when it is not being observed... our busi-ness is to try to find out about it, and the technique for doing that is indeed to make models and to see how far we can go with them in accounting for the rel word" [9].

Pursuing on such a suggestion we will work with the model (1). The physically interesting boundary con-dition can be both zero and of the condensate type i.e.

$$\phi(x,t) \longrightarrow 0 \tag{4}$$

or

$$\phi(x,t) \longrightarrow \phi_0 \tag{5}$$

Let us consider first the bubble boundary condi-tion (5). In the paper [13] the equation (2) under the condition (5) was considered. The new type of solitons were found namely "Bubbles". These nontopological solitons were assumed to exist at $A \in (0,1)$ not only for the one dimensional case but also they survive passing to arbitrary higher dimension. For this kind of solitons the complete investigation was performed including the analysis of the stability problem for the static and moving bubbles, see also [10]. They found that in the $D = 1$ case there exist a certain critical velocity v_c such that the bubble is stable if it is moving with a velocity v move greter then v_c and unstable otherwise.

The essentially important characteristic of solitons is their stability region which determines the boundaries of the validity of such a description and the phase transition to a new state. This kind of problematics will be presented elsewhere in more details.

2. Sound velocity and small oscillations

Now, for our convenience let us write the energy and particle number integrals of our model

$$E = \int dx\{|\phi_x|^2 + (|\phi|^2 - 1)^2 (|\phi|^2 - A)\} \tag{6}$$

$$N = \int dx\{|\phi|^2 - 1\} \tag{7}$$

The potential part of the energy E

$$U = (|\phi|^2 - 1)^2 (|\phi|^2 - A) \tag{8}$$

exibits a minimum when $A > 1$ in the point

$$|\phi|^2 = \beta = \frac{2A + 1}{3} \tag{9}$$

Note that the earlier condensate type of boundary condition $\phi_0 = 1$, completely studied earlier in [13] is also the minimun of (8) when $A < 1$. Normal mode perturbations with frecuency ω and wave number k are taken proportional to the factor

$$e^{-i\omega t+ikx}$$

. In linear systems the frecuency is subjet to a dispersion relation $\omega = \omega(k)$. The system is linearly unstable,if there exists a possitive growth rate $n = Im(\omega)$ for at least one real value of k. Now let us calculate the dispersion of small oscillations in the vacuum

$$\phi = \sqrt{\beta} + \xi(x,t) = \sqrt{\frac{1 + 2A}{3}} + \xi(x,t) \qquad (10)$$

Where

$$\xi(x,t) = \eta(x,t)_1 e^{i(kx-\omega t)} + \eta(x,t)_2 e^{-i(kx-\omega t)}$$

The $\eta(x,t)_i$ satisfy the following equations

$$\omega\eta_1 - k^2\eta_1 + \eta_1(4\beta(2+A) - 9\beta^2 - \beta(1+2A)) + \eta_2(2\beta(2+A-3\beta)) = 0 \qquad (11)$$

$$-\omega\eta_2 - k^2\eta_2 + \eta_2(4\beta(2+A) - 9\beta^2 - \beta(1+2A)) + \eta_1(2\beta(2+A-3\beta)) = 0 \qquad (12)$$

After some algebra with operations regarding the determinant of the equations written above,one obtains

$$\omega^2 = k^4 + k^2(4/3)(A - 1)(1 + 2A) \qquad (13)$$

This is the Bogoliubov dispersion law.From that we easily find the sound velocity

$$v_s = \lim_{k\to 0} \frac{\omega}{k} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \sqrt{(A-1)(2A+1)} \qquad (14)$$

From the last equation we see that the condensate now is considered to be stable when $A \geq 1$.

3. Soliton Excitations of the Condensate

One of the primary requirements of all physical situation related with the problem of energy of the condensate is the fact that is must be always finite. It is the reason that the formula for energy takes the form (6) as it is easily to see varying this equation one can obtain the equation of motion. In order to obtain localized solutions of (3) we employ the formula

$$\phi(x,t) = \sqrt{\rho(x,t)}e^{i\Theta(x,t)} = \sqrt{\rho(\xi)}e^{i\Theta(\xi)}$$

and make

$$\phi(x,t) = \phi(\xi), \tag{15}$$

where

$$\xi = x - vt$$

Then we have

$$\frac{\rho''}{2\rho} - \frac{\rho'^2}{4\rho^2} - \Theta_\xi(\Theta_\xi - v) - 3(\rho-1)(\rho-\beta) = 0 \tag{16}$$

where the function Θ is defined by

$$\Theta_\xi = \frac{v}{2\rho}(\rho-\beta) \tag{17}$$

where

$$\beta = \frac{2A+1}{3}$$

Substituting the second equation (17) in the (16), then integrating and denoting

$$r = \rho-1; \qquad a = \frac{1}{4}(6\beta(\beta-1)-v^2) = \frac{1}{4}(v_s-v)$$

on can find that the above formulas reduce to the conventional form

$$\pm 2(\xi-\xi_0) = \int \frac{1}{r\sqrt{r^2 + (\frac{5A-2}{3})r + a}} dr$$

From this expression we can conclude that the regular localized soliton-like solutions exist if the parameter $a > 0$ or in other words if $v_s^2 - v^2 > 0$. We then have obtained the condition for existing a set of soliton solutions which take interesting forms in diferent regions of A. Inverting the integral written above one has

$$r(\xi) = \frac{-2a}{\sqrt{b^2 - 4a}\ ch(2\sqrt{a}(\xi-\xi_0)) \pm b} \tag{18}$$

where

$$b = \frac{5A - 2}{3} \tag{19}$$

Now if one wants to obtain a static soliton solution for $1 < A < 4$. For avoiding singularities we consider in the denominator of equation (18) only the (+) value of b

$$\phi_b = \sqrt{\beta} e^{i\Theta_0} \frac{ch(y)}{\sqrt{\frac{2A+1}{4-A} + sh^2(y)}} =$$

$$= e^{i\Theta} \sqrt{(4-A)/3}\ \frac{ch(y)}{\{1 + \frac{4-A}{3\beta} sh^2(y)\}^{1/2}} \tag{20}$$

where

$$y = (v_s/2)(x-x_0)$$

From the above formula we see that the function ϕ_b is an even function of the variable $(x-x_0)$. This function describes a bubble in the condensate.The amplitude of this bubble depends of the parameter $4-A$. For small values of this parameter we obtain a greater rarefaction in the bubble.

For $A > 4$ the soliton at rest take the form

$$\phi_k = \sqrt{\beta}e^{i\Theta_0} \frac{th(y)}{\sqrt{\frac{2A+1}{A-4} + ch^2(y)}} = \tag{21}$$

$$= \sqrt{(A-1)/3}\ e^{i\Theta} \frac{sh(y)}{\sqrt{1 + \frac{A-4}{2A+1} ch^2(y)}}$$

From here we conclude that ϕ_k is an odd function of the variables $(x-x_0)$. This solution has a kink form. The solution which joins the kinks and bubbles above written was found solving the differential equation not only for ρ but also for Θ. After a bit of calculation one gets

$$\phi_{k,b} = e^{i\Theta}\sqrt{2}\ \mathrm{ch}(\xi-i\mu)[(b)(b^2-4a]^{1/2}+ch2\xi]^{-1/2} \tag{22}$$

where

$$\xi = \frac{1}{2}(v_s{}^2 - v^2)^{1/2}(x - vt - x_0)$$

$$\cos 2\mu = \frac{[(A-\mu)\beta + v^2/2]}{\beta\sqrt{b^2 - 4a}}$$

The sign of $A - 4$ determines the solution to be or not to be a kink (bubble) like soliton solution. Fluctuations around the condensate would cause the appearance of kinks and to pass through the unstable vacum to the another stable symmetric one. If the kink is too small, the gain in volume energy by forming a region of true vaccum may not be enough so as to compensate the loss in the surface energy.

When $A = 4$ or $\alpha = -3/16$, we get a solution under the following mixed boundary conditions

$$\phi(x,t) \longrightarrow 0$$

for

$$\alpha \longrightarrow -\infty$$

$$\phi(x,t) \longrightarrow \sqrt{\beta} e^{i\Theta}$$

for

$$x \longrightarrow +\infty$$

In order to have a finite system energy the solution obeys

$$2(\xi - \xi_0) = \int \frac{d\rho}{(\rho-2)\sqrt{\rho^2 - \frac{v^2}{4}}}$$

The integral of motion: the hole number and the energy for the solution (22) have the forms:

$$N_{k,b} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\{\rho - 1\} \qquad (23)$$

$$E_{k,b} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\{|\phi_x|^2 + (\rho-1)^2(\rho-A)\} \qquad (24)$$

where

$$\phi_x = e^{i\Theta}\left[\frac{\rho_x}{2\sqrt{\rho}} + i\Theta_x\sqrt{\rho}\right] \tag{25}$$

When the amplitude of the solutions are small or in other words the velocity of the kinks (bubbles) are closed to the sound velocity.

The modules of the solution are

$$\sqrt{|\phi|^2} = \left\{1-2a\left\{\sqrt{b^2-4a}\ \mathrm{ch}(2\sqrt{a}(\xi-\xi_0)) + b\right\}^{-1}\right\}^{-1/2} \tag{26}$$

Note that for small a we can write

$$\sqrt{b^2 - 4a} \approx b - \frac{2a}{b}$$

if

$$a \ll b = \frac{5A - 2}{3}$$

The coefficient $\sqrt{b^2 - 4a}$ in the second term can have been replaced by $\frac{5A-2}{3}$ and one gets

$$\sqrt{|\phi|^2} = \left\{1 - \frac{2a\left(\frac{5A-2}{3}\right)^{-1}}{1 + \mathrm{ch}(2\sqrt{a}(\xi-\xi_0))}\right\}^{1/2} = \tag{27}$$

$$\left\{1 - \frac{3a(5A-2)^{-1}}{\mathrm{ch}^2(\sqrt{a}(\xi-\xi_0))}\right\}^{1/2} \tag{28}$$

This solution can be found by means of the method which will be developed in our next paper treating small amplitude soliton waves.

Besides the solutions given above, the ϕ^6 model possesses other localized solutions; for more information see [12].

4. Acknowledgment

One of us MAAG thanks JINR for hospitaly and financial support, Dr.G.Pontecorvo, and others physicists of JINR for interesting talking.

References

[1] A. Newell, *Soliton and Mathematics* SIAM

[2] V.G. Kartavenko. *Yader. Fiz,* **40** 1984, p.377

[3] R. Friedberg, et.al. *Nuclear Physics,* 1976, **115B** p.32, Phys.Rev. D35 (1987) N°6, p.1550

[4] M.A. Agüero G. In *Procceding of Nonlinear Evolution Equation and Dynamical Systems.* Dubna 1990. Springer-Verlag 1991 p.207
M.A. Agüero G Makhankov V.G. Preprint JINR, 1991

[5] L. Masperi *Phys. Rev.* D, **41**, (1990) 3263

[6] V.E. Zakharov, V.V. Sobolev and V.S.Synasch *Sov. Phys. JETP* **33** 1971, p.77

[7] L.P. Pitayevsky *Sov. Phys JETP* **13** (1961) p.451

[8] V.L. Ginsburg and A.A. Solianin; *Usp. Fiz. Nauk* 120 (1976) 153

[9] J.S. Bell *The Ghost in the Atom* Cambridge University Press, 1986, p.50

[10] Puzinin I.V. et. al. Physica D 34 (1989) p.240

[11] A.S. Kosevich *et. al Sov. J.Low Temp.Phys.***2** 1976 p.913

[12] V.G.Makhankov *Soliton Phenomenology.* Mathematics and Applications **33**, Kluwer Academic Publishers, 1990

[13] I.V. Barashenkov, V.G.Makhankov. *Phys.Lett.*,**A128** (1982) 52.

Pro Mathematica: Vol.VI, Nos.11-12, 1992

EXPLOSION EN TIEMPO FINITO PARA UN SISTEMA DE ECUACIONES NO LINEALES

Luis Enrique **Carrillo Díaz***

Introducción

La interacción de mesones cargados en un campo electromagnético puede ser descrito por el siguiente sistema

$$(*)\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \alpha^2 u + g^2 v^2 u = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v + \beta^2 v + h^2 u^2 v = 0 \end{array}\right.$$

donde α, β, g *y* h *son constantes reales, no nulas.*

El sistema (*) ha sido estudiado por muchos autores, entre ellos tenemos a Medeiros, L.A y Perla Menzala, G [7], con relación a la

---

* Profesor de la UNMSM.

El autor preparó este trabajo durante el periodo de 1990, en el IMUFRJ, contando con la financiación del Consejo de Investigación del Brasil (CNPq).

existencia de soluciones globales débiles del problema mixto en $Q = \Omega \times [o,T]$, donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ ($n=1,2,3$). Posteriormente, Medeiros, L.A. y Milla Miranda,M. [8], generalizaron dichos resultados considerando como términos no lineales
$|v|^{\rho+2}|u|^{\rho}u$, $|u|^{\rho+2}|v|^{\rho}v$ y Ω un dominio arbitrario de $\mathbb{R}^n$.

Milla Miranda, M. y Medeiros, L.A. [9] estudiaron la existencia y unicidad de soluciones globales débiles del problema mixto para el sistema:

$$(**)\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + u - |v|^{\rho+2}|u|^{\rho}u = f_1 \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v + v - |u|^{\rho+2}|v|^{\rho}v = f_2 \end{array}\right.$$

en $Q = \Omega \times [o,T]$, donde Ω es un abierto limitado cualquiera de $\mathbb{R}^n$ y donde el número real ρ tiene la restricción:

$$\rho > -1 \text{ si } n = 1,2 \text{ ; y } -1 < \rho \leq \frac{4-n}{n-2} \text{ si } n \geq 3 \qquad (1)$$

En éstas condiciones, ellos obtienen (Cf. [9], Pág.149)

$$H_o^1(\Omega) \text{ contínuamente inmerso en } L^{2(\rho+2)}(\Omega) \qquad (2)$$

En este trabajo se estudia la Explosión ("*blow-up*") en tiempo finito de las soluciones del problema mixto para el sistema (**), en el caso $\rho = 0$, $f_1 = f_2 = 0$ para Ω un abierto limitado de $\mathbb{R}^n$ con frontera regular Γ Es decir, se estudia "explosión" para el sistema:

$$(***)\left|\begin{array}{l} u'' - \Delta u + u - v^2u = 0 \\ v'' - \Delta v + v - u^2v = 0 \end{array}\right. \qquad (u'' = \partial^2u/\partial t^2)$$

en $\Omega \times [o,T]$, para $n = 1,2$.

§.1 NOTACIONES Y RESULTADOS PRINCIPALES

1.1 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $H^m(\Omega)$, m un entero no negativo, al espacio de Sobolev de orden m. Por $H_o^m(\Omega)$ representamos la clausura en $H^m(\Omega)$ del espacio $\mathcal{D}(\Omega)$, donde $\mathcal{D}(\Omega)$ representa el espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto contenido en Ω. El producto interno y la norma en $L^2(\Omega)$ y $H_o^1(\Omega)$ serán denotados por $(.,.)$, $|.|$ y $((.,.))$, $\|.\|$ respectivamente.

Denotados por X al espacio $[H_o^1(\Omega) \times L^2(\Omega)]^2$.Las condiciones iniciales y de frontera para el sistema (***) son las siguientes:

$$\left|\begin{array}{l} u(x,0) = u_o(x) \ ; \ v(x,0) = v_o(x) \\ u'(x,0) = u_1(x) \ ; \ v'(x,0) = v_1(x) \\ u|_\Gamma = 0 \ , \ v|_\Gamma = 0 \ ; \ t > 0 \end{array}\right. \quad ; \ x \in \Omega$$

De las restricciones para ρ en (1) se observa que $\rho = 0$ tiene sentido sólo si $n = 1,2,3,4$ y para nuestro caso (2) se transforma en

$$H_o^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega) \quad \text{con inmersión contínua.} \qquad (3)$$

1.2 Considerando $W = \begin{bmatrix} u & v \\ u_t & v_t \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta - I & 0 \end{bmatrix}$

I la identidad; y $F \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b^2a & a^2b \end{bmatrix}$

vemos que el sistema (***) puede ser escrtio en la forma

$$(\mathcal{L})\left|\begin{array}{l} W'(t) = AW(t) + F(W(t)) \\ W(0) = \varphi \end{array}\right.$$

donde $\varphi = \begin{bmatrix} u_o & v_o \\ u_1 & v_1 \end{bmatrix}$

Supondremos que $\varphi \in X$, es decir $\varphi = [u_o,u_1,v_o,v_1] \in X$.

1.3 **Sea** $G = [g_1,g_2,g_3,g_4] \in [\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)]^2$.

Definimos la norma:

$$|\|G\||^2 = \int_\Omega \{|\nabla g_1|^2+|g_1|^2+|g_2|^2+|\nabla g_3|^2+|g_3|^2+|g_4|^2\}dx \quad (4)$$

Se observa que el "completado" de $[\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)]^2$ con **relación** a la norma definida en (4) es el espacio de **Hilbert** X. Observamos también que el operador

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta-I & 0 \end{bmatrix}$$

puede ser expresado por

$$A = B + M \quad (5)$$

donde $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{bmatrix}$,

así el operador M queda definido por

$$M[u_1,u_2,v_1,v_2] = [0,-u_1,0,-v_1]$$

claramente $\qquad M \in \mathcal{L}(X,X) \qquad (6)$

1.3.1 **Definición.** Sea

$$D(B) = [H_o^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times H_o^1(\Omega)]^2 \quad (7)$$

y para $U = [u_1,u_2,v_1,v_2] \in D(B)$ definimos

$$BU = [u_2, \Delta u_1, v_2, \Delta v_1] \tag{8}$$

En las condiciones de la definición (1.3.1) se tiene el siguiente

1.3.2 Teorema.

El operador B definido por (7) y (8) es un generador infinitecimal de un grupo de clase $C_o T(t)$, de operadores lineales limitados sobre X, el cual satisface

$$\|T(t)\| \leq e^{2|t|} \tag{9}$$

Del Teorema (1.3.2) y (6) tenemos que el operador A es generador infiniterimal de un grupo, digamos $\mathcal{G}(t)$, de clase C_o, de operadores lineales limitados sobre X.

1.3.3 Definición.

Una solución débil W de (***) es una solución de la ecuación integral

$$W(t) = \mathcal{G}(t)\varphi + \int_o^t \mathcal{G}(t-\alpha)F(W(\alpha))d\alpha \tag{10}$$

donde $\begin{bmatrix} u & v \\ u_t & v_t \end{bmatrix}$.

1.3.4 Observación.

Las respectivas funciones u y v satisfacen (***) en el sentido de las distribuciones.

1.3.5 Definición.

Sea $U = [u,m,v,r] \in X$, definimos

$F(U) = [0, v^2u, 0, u^2v]$

En Milla Miranda, M. y Medeiros, L.A. [9], se prueba que $\|v^2u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} \cdot \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$; $\forall u,v \in H_0^1(\Omega)$

para $n = 1,2$. Por tanto $v^2u, u^2v \in L^2(\Omega)$ y luego

$$F : X \longrightarrow X$$

queda bien definida. Además de eso, F es localmente Lipschitziana, es decir:

Para cada subconjunto limitado Q de X existe una constante K_Q tal que

$$\|F(U) - F(V)\| \leq K_Q\|U - V\| \ ; \quad \forall U,V \in Q.$$

En las hipótesis anteriores se tiene la siguiente proposición

1.3.6 Proposición

Existe una única solución débil de (***) maximal definida

$$W = \begin{bmatrix} u & v \\ u_t & v_t \end{bmatrix} \in C^o([0, t_{max}[; X), \ t_{max} > 0.$$

Si $t_{max} < \infty$ entonces $\lim_{t \to t_{max}} \|W(t)\|_X = \infty$.

En ésta etapa, y teniendo el resultado de la proposición (1.3.6) surge una pregunta natural: ¿Bajo qué condiciones t_{max} es finito?

Nuestra preocupación en el siguiente parágrafo, está centrada justamente en responder ésta pregunta.

1.3.7 La energía asociada al sistema (***) es dada por

$$E(u,u_t,v,v_t) = \frac{1}{2}\left[|u'|^2+|v'|^2+\|u\|^2+\|v\|^2-\|uv\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \qquad (11)$$

Se prueba que se satisface la ecuación de la energía:

$$E(u,u_t,v,v_t) = E\ (u_o,u_1,v_o,v_1);\ t \in [0,t_{max}[, \tag{12}$$

donde u y v son soluciones del sistema (***).
Denotamos por $E_o = E(u_o,u_1,v_o,v_1)$. Luego el funcional de energía queda definido por

$$E : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$E(m,r,s,t) = \frac{1}{2}\ [\,|r|^2+|t|^2+\|m\|^2+\|s\|^2-\|mt\|^2_{L^2(\Omega)}\,] \tag{13}$$

1.3.8 Teorema. Si $E_o < 0$, o si $E_o = 0$ y vale

$$(u_o,u_1) + (v_o,v_1) > 0 \tag{14}$$

Entonces $t_{max} < \infty$ y $\lim\limits_{t\to t_{max}} \|W(t)\|_X = \infty$.

§.2 DEMOSTRACION DE LOS RESULTADOS

2.1 Demostración del Teorema 1.3.2

Mutatis Mutandis, la demostración se puede ver en Pazy, A.[10].

2.2 Demostración de la Proposición 1.3.6

Ver J.M. Ball [2] teorema 5.9. Para la parte de la existencia ver Segal, I [11], considerando las modificaciones naturales del caso.

2.3 Demostración del Teorema 1.3.8

Por (12) y la proposición (1.3.6) es suficiente mostrar que $t_{max} < \infty$.
Suponga que $t_{max} = \infty$. Definimos

$$F(t) = |u(t)|^2 + |v(t)|^2 \tag{15}$$

Luego

$$F'(t) = 2(u_1,u_t) + 2(v_1v_t) \qquad (16)$$

Usando (12) y (11) obtenemos

$$F''(t) \geq -4E_o. \qquad (17)$$

Si $E_o < 0$, de (17) tenemos que $F'(t) > 0$ c.s. Luego podemos suponer que en éste caso tambien vale (14) Como $F''(t) \geq 0$ se sigue que $F'(t)$ y $F(t)$ son funciones no decrecientes y no negativas de t. Usando éstos argumentos y (17) obtenemos una contradición

Observación.

El caso en que el abierto Ω es substituído por $\mathbb{R}^n$, se resuelve de manera análoga, haciendo las modificaciones respectivas.

Agradecimientos:

Al Profesor Manuel Milla Miranda, por la proposición del problema y por las útiles sugerencias durante la realización de este trabajo; también agradezco al Profesor Luiz Adanto Medeiros por la lectura cuidadosa hecha en el primer manuscrito, apuntando correcciones y valiosas sugerencias.

Referencias.

[1] *Ball,J.,M.* Remarks on Blow-up and nonexistence Theorems for nonlinear evolutions equations, Quart. J.Math. Oxford 28 (1977) 473-486.

[2] *Ball,J.,M.* On the asymptotic behaviour of generalized processes, with applications to nonlinear evolution equation, J. Differential Eqns. 27(1978) 224-265.

[3] *Carrillo Díaz, L.E.* Não Existência de soluçõ es fracas Globais de uma equaçao hiperbólica. Atas 28° Seminario Brasileiro de Análise. Rio de Janeiro, 1988.

[4] *Ferreira, J. - Perla Menzala,G.* Decay of solutions of a system of nonlinear Klein Gordon equations, Atas 21 SBA, Brasilia, May 1985.

[5] *Glasey, R.T.* "Blow-up" theorems for nonlinear wave equations. Math. Z. 132 (1973), 183-203.

[6] *Lions, J.L.* Quelques Méthodes de Résolution de Problémes aux limítes non Lineares. Dunod,París (1969).

[7] *Medeiros,L.A.- Perla Menzala,G.* On a mixed problem for a class of nonlinear Klein-Gordon equa tions. Atas 21 SBA / Brasilia, May 1985.

[8] *Medeiros,L.A.- Milla Miranda,M.,* Weak solutions for a system of nonlinear Klein-Gordon equation. Annali de Mat. Pura ed Appl. 146 (1987).

[9] *Milla Miranda,L.A.- Medeiros,L.A.,* On the existence of Global solutions of a coupled nonlinear Klein-Gordon Equations. Funkcialaj Ekvacioj. Vol.30. No.1 (1987), 147-161.

[10] *Pazy, A.,* Semi - groups of linear operator and applications to partial differential equations. Dep. of Math., Univ. of Maryland,Lectures notes No. 10, 1974.

[11] *Segal, I.,* "Non-linear Semi-Groups" Ann. Math, 78 (1963), 339-364.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU
FONDO EDITORIAL

REVISTAS
(Hasta ediciones 1990)

EDICIONES ANUALES

Anthropologica

	Suscripción	US$	8.00
	Número suelto	US$	10.00
Envío aéreo certificado:			
	América Latina	US$	14.42
	Canadá y U.S.A.	US$	17.50
	Europa	US$	19.80
	Asia y Africa	US$	22.88
Envío vía superficie a cualquier destino:		US$	5.00

Boletín del Instituto Riva-Agüero
Debates en Sociología
Derecho
Espacio y Desarrollo

	Suscripción	US$	6.40
	Número suelto	US$	8.00
Envío aéreo certificado:			
	América Latina	US$	7.78
	Canadá y U.S.A.	US$	9.32
	Europa	US$	10.47
	Asia y Africa	US$	12.00
Envío vía superficie a cualquier destino:		US$	4.00

EDICIONES SEMESTRALES

Areté
Economía
Histórica
Lexis
Pro Mathematica
Revista de la Universidad Católica / Nueva serie
Revista de Psicología
Revista de Química

	Suscripción	US$	12.80
	Número suelto	US$	8.00

Envío aéreo certificado:		Suscripción		Número suelto	
	América Latina	US$	9.00	US$	4.50
	Canadá y U.S.A.	US$	10.00	US$	5.00
	Europa	US$	11.00	US$	5.50
	Asia y Africa	US$	13.00	US$	6.50
Envío vía superficie a cualquier destino:		US$	4.00	US$	2.00

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU
FONDO EDITORIAL

REVISTAS
(A partir de ediciones 1991)

EDICIONES ANUALES

Anthropologica

	Suscripción	US$	12.00
	Número suelto	US$	15.00
Envío aéreo certificado:			
	América Latina	US$	14.42
	Canadá y U.S.A.	US$	17.50
	Europa	US$	19.80
	Asia y Africa	US$	22.88
Envío vía superficie a cualquier destino:		US$	5.00

Boletín del Instituto Riva-Agüero
Debates en Sociología
Derecho
Espacio y Desarrollo

	Suscripción	US$	9.60
	Número suelto	US$	12.00
Envío aéreo certificado:			
	América Latina	US$	7.78
	Canadá y U.S.A.	US$	9.32
	Europa	US$	10.47
	Asia y Africa	US$	12.00
Envío vía superficie a cualquier destino:		US$	4.00

EDICIONES SEMESTRALES

Areté
Economía
Histórica
Lexis
Pro Mathematica
Revista de la Universidad Católica / Nueva serie
Revista de Psicología
Revista de Química

	Suscripción	US$	19.20
	Número suelto	US$	12.00

Envío aéreo certificado:		Suscripción		Número suelto	
	América Latina	US$	9.00	US$	4.50
	Canadá y U.S.A.	US$	10.00	US$	5.00
	Europa	US$	11.00	US$	5.50
	Asia y Africa	US$	13.00	US$	6.50
Envío vía superficie a cualquier destino:		US$	4.00	US$	2.00

Impreso en PERU OFFSET Prolongación Lucanas No. 278 - La Victoria. Teléf. 31 8924