Pro Mathematica: Vol.VI,Nos.11-12,1992

SOLUÇÕES GLOBAIS DE UM SISTEMA HIPERBOLICO COM TERMOS NÃO LINEARES NEGATIVOS

Oswaldo **Ramos Chumpitaz***

1. Introdução

O sistema de equações

$$(*)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \alpha^2 u + g^2 v^2 u = 0 \\ \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta v + \beta^2 u + h^2 u^2 v = 0 \\ \quad \text{com } \alpha, \beta, f, g \in \mathbb{R} \text{ diferentes de zero.} \end{cases}$$

foi introduzido por I. Segal [8] para descrever a interação de cargos de mesons em um campo electromagnético. Vários autores estudaram este sistema entre os quais podemos mencionar: K. Jörgen [1], V.G. Markaukov [3],etc. Recentemente L.A. Medeiros-G. Perla Menzala [4] analizaram a existência de soluções fracas do problema misto para o sistema (*) em $\Omega \times]0,T[$*, onde* Ω *é um domínio limitado de* $\mathbb{R}^n$*,* $n = 1,2,3$*. Estes resultados foram generalizados por M. Milla Miranda-L.A. Medeiros [5], para a não*

* Profesor Principal de la UNMSM.

linearidade da forma $|v|^{\rho+2}|u|^{\rho}u$, $|u|^{\rho+2}|u|^{\rho}v$, *e qualquer domínio de* $\mathbb{R}^n$.

Neste trabalho estudaremos a existência e unicidade da solução fraca global do problema mismo para o sistema

$$(**)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + a(x)v^2u = f_1 \\ \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + a(x)u^2v = f_2 \end{cases}$$

em $\Omega \times]0,T[$ sendo Ω domínio limitado de $\mathbb{R}^3$, T real positivo qualquer, $a(x) \in L^{\infty}(\Omega)$.

Observamos que o método usual de energia não trabalha neste caso devido ao termo $a(x)$, usaremos para este caso um método de estimativas introduzido por *L. Tartar* [9], diferente do método de "Potential Well" introduzido por *D.H. Sattinger* [7]. A unicidade é obtida por um método devido a *M.I. Visik - O. Ladysenskaja* [10].

2. Notação e Resultados prévios

Ω domínio limitado de $\mathbb{R}^3$

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \ / \ D^{\alpha}u \in L^2(\Omega),\ \alpha \leq m\}$$
$$\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),$$

$\alpha_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, D^{α} derivada no sentido sentido do de distribuições $H^o(\Omega) = L^2(\Omega)$, $H_o^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^m(\Omega)}$ $H^{-m}(\Omega)$ é o dual de $H_o^m(\Omega)$, $\mathcal{D}(\Omega)$ é o espaçõ das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto contenido em Ω.

O producto interno e a norma em $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$ serão representados respectivamente por:

$$(.,.),\ |.|\quad e\quad ((.,.)),\ \|.\|$$

Seja $T > 0$, B espaço de Banach

$L^p(0,T;B) = \{u:]0,T[\to B \,/\, \|u\|_B \in L^p(0,T)\}$ com a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;B)} = \left(\int_0^T \|u\|_B^p\right)^{1/p} \qquad 1 \leq p < \infty.$$

$L^\infty(0,T;B) = \{u:]0,T[\to B \,/\, \|u\|_B \in L^\infty(0.T)\}$

$$\|u\|_{L^p(0,T;B)} = \sup_{0<t<T} \text{ess}\ \|u(t)\|_B$$

$\mathcal{D}'(Q)$ e $\mathcal{D}'(0,T)$ onde $Q = \Omega \times]0,T[$ denota o espaço de distribuições sobre Q e $]0,T[$ respectivamente.

Δ é o Laplaciano; $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx$; ∇u é o gradiente de u.

Lema 1. (Sobolev)

Seja Ω aberto limitado de $\mathbb{R}^3$ então $H_0^1(\Omega)$ tem imersão contínua em $L^q(\Omega)$ para $1 \leq q \leq 6$, isto é

$$|u|_q \leq C_q \|u\| \quad 1 \leq q \leq 6,\ |\ \ |_q \text{ norma em } L^q(\Omega) \qquad (1)$$

Seja $V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, $h = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ com as normas $\|[w,z]\|^2 = \|w\|^2 + \|z\|^2$; $|[\varphi,\psi]|^2 = |\varphi|^2 + |\psi|^2$, respectivamente.

Procedemos formalmente no sistema (**), multiplicando a primeira equação por u' e a segunda por v' e somando temos:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}|[u',v']|^2 + \frac{1}{2}\|[u,v]\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)u^2v^2dx\right\} = (f_1,u') + (f_2,v') \qquad (2)$$

como $a(x) \in L^\infty(\Omega)$ podemos supor que $|a(x)| \leq 1$, agora

$$\left|\frac{1}{2}\int_\Omega a(x)u^2v^2ds\right| \le \frac{1}{2}\int_\Omega u^2v^2dx \le \frac{1}{2}\left(\int_\Omega u^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega v^4\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}|u|_4^2\ |v|_4^2 \le \frac{1}{2}c_4^4\ \|u\|^2\|v\|^2 \le \frac{1}{8}c_4^4\ \|[u,v]\|^4,$$

chamemos

$$c_4 = M \Rightarrow -\frac{1}{8}M^4\|[u,v]\|^4 \le \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)u^2v^2dx$$

assim

$$\frac{1}{2}\|[u,v]\|^2 - \frac{1}{8}M^4\|[u,v]\|^2 \le \frac{1}{2}\|[u,v]\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)u^2v^2dx \qquad (3)$$

Seja o polinômio $P(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{M^4}{8}\lambda^4$, ele tem raizes em $\lambda = 0, \pm\frac{2}{M^2}$, seus máximos os toma em $\lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{M^2}$ e o valor máximo é

$$\frac{1}{2M^4},\ P(\lambda) \ge 0 \qquad \forall\ \lambda \in \left[-\frac{2}{M^2}, \frac{2}{M^2}\right]$$

de (2) temos que

$$\frac{1}{2}\ |[u',v']|^2 + \frac{1}{2}\ \|[u,v]\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)u^2v^2dx$$

$$= \int_0^t \{((f_1;u') + (f_2,v'))ds + \gamma \qquad (4)$$

$$= \frac{1}{2}\ |[u_1,v_1]|^2 + \frac{1}{2}\ \|[u_o,v_o]\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)u_o^2v_o^2dx$$

onde $u_o = u(0)$, $v_o = v(0)$, $u_1 = u'(0)$, $v_1 = v'(0)$ y por

(3) vemos que

$$\frac{1}{2}\,|[u',v']|^2 - \frac{1}{2}\,\|u,v]\|^2 - \frac{M^4}{8}\,\|[u,v]\|^4$$
$$\leq \frac{1}{2}\,|[u',v']|^2 - \frac{1}{2}\,\|u,v]\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)u^2v^2dx \qquad (5)$$

3. Teorema

Sejam

$$[u_o,v_o] \in V,\ [u_1,v_1] \in H,\ f_1,f_2 \in L^1(0,T;L^2(\Omega)) \qquad (6)$$

$$\|[u_o,v_o]\| < \frac{\sqrt{2}}{M^2},\ |a(x)| \leq 1 \quad \text{q.s. em } \Omega \qquad (7)$$

$$\alpha = (\frac{1}{2}\,|[u_1,v_1]|^2 + \frac{1}{2}\,\|u_o,v_o]\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)u_o^2v_o^2dx)^{1/2}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\int_o^T(|f_1|+|f_2|)ds < (\frac{1}{2M^4})^{1/2} \qquad (8)$$

Então existem duas funções u,v tais que

$$[u,v] \in L^\infty(0,T;V),\ [u',v'] \in L^\infty(0,T;H)$$

satisfazendo

$$u'' - \Delta u + a(x)v^2u = f_1 \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$$
$$v'' - \Delta v + a(x)u^2v = f_2 \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$$
$$u(0) = u_o, \quad v(0) = v_o \qquad u|_{\partial\Omega} = 0$$
$$u'(0) = u_1, \quad v'(0) = v_1 \qquad v|_{\partial\Omega} = 0$$

DEMONSTRAÇÃO:

Usando o método de Galerkin

Seja $\{w_l\}$ "base" de $H_o^1(\Omega)$ e $V_m = [w_1, w_2, \ldots, w_m]$ espaço gerado por $w_1, \ldots, w_m$.

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j \quad , \quad v_m(t) = \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t) w_j \tag{9}$$

$$\left.\begin{array}{llll} u_m(0) = u_{om} \longrightarrow u_o & \text{forte em} & H_o^1(\Omega) \\ v_m(0) = v_{om} \longrightarrow v_o & \text{forte em} & H_o^1(\Omega) \\ u'_m(0) = u_{1m} \longrightarrow u_1 & \text{forte em} & L^1(\Omega) \\ v'_m(0) = u_{1m} \longrightarrow v_1 & \text{forte em} & L^2(\Omega) \end{array}\right\} \tag{10}$$

O sistema aproximado

$$(S.A)\begin{cases} (u''_m, w) + a(u_m, w) + (a(x) v_m^2 u_m, w) = (f_1, w), w \in V_m \\ (u''_m, w) + a(v_m, w) + (a(x) u_m^2 v_m, w) = (f_2, w) \end{cases}$$

com as condições iniciais (10) possui pelo Teorema de Caratheodory solução num intervalo $[0, t_m[$, procedendo como nos cálculos prúvios temos que (3) e (4) se cumprem para $u_m(t)$, $V_m(t)$, $t \in [0, t_m[$

agora como $\alpha^2 < \dfrac{1}{2M^4}$, seja β tal que $0 < \beta < \dfrac{\sqrt{2}}{M^2}$ e $P(\beta) = \alpha^2$ listo é $\alpha^2 = \dfrac{1}{2}\beta^2 - \dfrac{1}{8} M^4 \beta^4$ pela hipótesis (7) temos $P(\|[u_o, v_o]\|) \geq 0$, de (10) e (7) vemos que

$$\|[u_m(0), v_m(0)]\| < \frac{\sqrt{2}}{M^2} \text{ para m suficientemente grande} \tag{11}$$

asseguramos que

$$\|[u_m(0), v_m(0)]\| < \frac{\sqrt{2}}{M^2}, \quad \forall t \in [0, t_m[$$

por absurdo suponhamos que existe

$$t \in [0,t_m[\ / \ \|[u_m(t),v_m(t)]\| \geq \frac{\sqrt{2}}{M^2}.$$

Seja $t^* = \inf\{t \ / \ \|[u_m(t),v_m(t)]\| \geq \frac{\sqrt{2}}{M^2}\}$ por (11) $t^*>0$

e da continuidade das soluções aproximadas, temos

$$\|[u_m(t^*),v_m(t^*)]\| \geq \frac{\sqrt{2}}{M^2} < \frac{2}{M^2}, \qquad (12)$$

$$\text{seja } T_o \ / \ 0 < t^* < T_o < t_m$$

e $\|[u_m(t),v_m(t)]\| < \frac{2}{M^2}$ $\forall \ t \in [0,T_o]$ listo pela continuidade

logo

$$P(\|[u_m(t),v_m(t)]\|) \geq 0 \quad \forall \ t \in [0,T_o];$$

seja

$$\gamma_m = \frac{1}{2} \ |[u_{1m},v_{1m}]|^2 + \frac{1}{2} \ \|[u_{om},v_{om}]\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)u_{om}^2v_{om}^2dx$$

$$\frac{1}{2} \ |[u_m'(t),v_m'(t)]|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \ |[u_m'(t),v_m'(t)]|^2 + P(\|[u_m(t),v_m(t)]\|)$$

$$\leq \frac{1}{2} \ |[u_m'(t),v_m'(t)]|^2 + \frac{1}{2} \ \|[u_m(t),v_m(t)]\|^2$$

$$+ \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)u_m^2(t)v_m^2(t)dx$$

$$= \int_o^t \{(f_1(s),u_m'(s)) + (f_2(s),v_m'(s))\}ds + \gamma_m;$$

como

$$\gamma_m - \gamma \leq \int_o^t (|f_1(s)|+|f_2(s)|)\,|[u_m'(s),v_m'(s)]|+\gamma+\varepsilon = \varphi(t)$$

$\Rightarrow$ (13)

$$\varphi'(t) = (|f_1(t)|+|f_2(t)|)|[u_m'(t),v_m'(t)]| \le$$

$$\le (|f_1(t)|+|f_2(t)|)\sqrt{2\varphi(t)}$$

$$2(\varphi^{1/2}(t))' = \varphi^{-1/2}(t)\varphi'(t) \le \sqrt{2}\,(|f_1(t)|+|f_2(t)|),$$

donde integrando

$$\sqrt{\varphi(t)} \le \sqrt{\varphi(0)} + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_o^t (|f_1(s)|+|f_2(s)|)ds$$

$$\le \sqrt{\gamma+\varepsilon} + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_o^T (|f_1(s)|+|f_2(s)|)ds \qquad \forall\ \varepsilon>0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\varphi(t)} \le \gamma^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_o^T (|f_1(s)|+|f_2(s)|)ds = \alpha < \left(\frac{1}{2M^4}\right)^{1/2}$$

logo

$$\varphi(t) \le \alpha^2 < \frac{1}{2M^4} \qquad \forall\ t \in [0,T_o] \tag{14}$$

$\Rightarrow$ $P(\|[u_m(t),v_m(t)]\|) \le \alpha^2 \quad \forall\ t \in [0,T_o]$ daí

$\|[u_m(t),v_m(t)]\| \le \beta \quad \forall\ t \in [0,T_o]$ assim

para $t^* \in [0,T_o]$. Temos

$$\frac{\sqrt{2}}{M^2} = \|[u_m(t^*),v_m(t^*)]\| \le \beta < \frac{\sqrt{2}}{M^2}$$

o que é uma contradição, logo tem-se

$$\|[u_m(t),v_m(t)]\| < \frac{\sqrt{2}}{M^2} \qquad \forall\ t \in [0,T_o] \tag{15}$$

das mesmas estimativas obtemos

$$\|[u'_m(t),v'_m(t)]\| < \frac{\sqrt{2}}{2M^2} \quad \forall\ t \in [0,T_m] \tag{16}$$

logo podemos extender a solução a um intervalo [0,T] independente de m.

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ e } (v_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ são limitados em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{17}$$

$$(u'_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ e } (v'_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ são limitados em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{18}$$

$$(u_m^2 v_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ e } (v_m^2 u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ são limitados em } L^\infty(0,T;L^{3/2}(\Omega)) \tag{19}$$

disto segue-se que $\exists$ ubsucessões as quais denotaremos tambén por u_m, v_m tais que

$$u_m \to u \quad \text{e} \quad v_m \to v \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{20}$$

$$u'_m \to u' \quad \text{e} \quad v'_m \to v' \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{21}$$

$$u_m^2 v_m \to X_1 \quad \text{e} \quad v_m^2 u_m \to X_2 \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0,T;L^{3/2}(\Omega)) \tag{22}$$

agora usando o fato de que $H_0^1(\Omega)$ tem imersão compacta em $L^2(\Omega)$ e o Lema de Lions-Aubin, vemos que $X_1 = u^2v$, $X_2 = v^2u$, logo podemos passar ao limite na forma usual, as condições iniciais se verificam de modo standard.

Para a unicidade, sejam $U = u-\hat{u}$, $v = v-\hat{v}$ $\Rightarrow$

$$U'' - \Delta U + a(x)(v^2\ u - \hat{v}^2\ \hat{u}) = 0 \tag{23}$$

$$U'' - \Delta V + a(x)(u^2\ v - \hat{u}^2\ \hat{v}) = 0 \tag{24}$$

$$U(0) = 0,\ V(0) = 0,\ U'(0) = 0,\ V'(0) = 0$$

Sejam

$$\varphi(t) \begin{cases} -\displaystyle\int_t^s U(\sigma)d\sigma & \text{para} \quad 0 \leq t \leq s \\ \quad o & \text{para} \quad s < t \leq T \end{cases}$$

$$\varphi(t) \begin{cases} -\displaystyle\int_t^s V(\sigma)d\sigma & \text{para} \quad 0 \leq t \leq s \\ \quad o & \text{para} \quad s < t \leq T \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\varphi,\psi \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, tomando producto interno de (23) com φ e (24) com ψ, obtemos estimados que nos permite obter unicidade em algum intervalo $[0,s_0]$, repetindo o processo iniciando em s_0, podemos depois de algumas e-tapas chegar a T.

Bibliografia

[1] *K.Jörgen,* Nonlinear wave equations,University of Colorado, Departament of Mathematics, 1970.

[2] *J.L. Lions,* Quelques Méthodes de Résolution de Problèmes aux Limites Non-Linéaires, Dunod,Paris 1969.

[3] *V.G. Makhankov*, Dynamics of classical solutions in integrable systems, Physics Reports (Section C of Physic Letters) 35 (1978), 1-128.

[4] *L.A. Medeiros - G.Perla Menzala*, On a mixed pro-plem for a class of nonlinear Klein-Gordon equa-tions, Atas 21° Seminário Brasileiro de Análise, Brasília, May 1985.

[5] *L.A. Medeiros - M. Milla Miranda*, Weak solutions for a coupled nonlinear hyperbolic equations, to appear in Funckialoy Ekvacioj.

[6] *O. Ramos Chumpitaz*, Observaciones sobre um problema no lineal sin Estimativas Globais a-priori SBA, 22°Seminário Brasileiro de Análise, 1985 p. 229 - 237.

[7] *D.H. Sattinger*, On global solutions of nonlinear hyperbolic equations, Arch. Rat. Mech. Anal. 30 (1968), 148 - 172.

[8] *I.*Segal,Nonlinear partial differential equations in Quantum Field Theory, Proc. Symp. Appl. Math. A.M.S. 17 (1965), 210 - 226.

[9] *L. Tartar*, Topics in nonlinear Analysis, Publications Mathematiques D'Orsay.

[10] *M.I. Visik - O.A.Ladysenskaja*, On boundary value problem for partial differential equations and certain class of operator equations. A.M.S.Translations, Serie 2, Vol.10 (1958).