Pro Mathematica: Vol.VI, Nos.11-12, 1992

EXPLOSION EN TIEMPO FINITO PARA UN SISTEMA DE ECUACIONES NO LINEALES

Luis Enrique **Carrillo Díaz***

Introducción

La interacción de mesones cargados en un campo electromagnético puede ser descrito por el siguiente sistema

$$(*)\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \alpha^2 u + g^2 v^2 u = 0 \\ \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v + \beta^2 v + h^2 u^2 v = 0 \end{array}\right.$$

donde α, β, g y h son constantes reales, no nulas.

El sistema (*) ha sido estudiado por muchos autores, entre ellos tenemos a Medeiros, L.A y Perla Menzala, G [7], con relación a la

---

* Profesor de la UNMSM.
El autor preparó este trabajo durante el periodo de 1990, en el IMUFRJ, contando con la financiación del Consejo de Investigación del Brasil (CNPq).

existencia de soluciones globales débiles del problema mixto en $Q = \Omega \times [o,T]$, donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ ($n=1,2,3$). Posteriormente, Medeiros, L.A. y Milla Miranda,M. [8], generalizaron dichos resultados considerando como términos no lineales
$|v|^{\rho+2}|u|^{\rho}u$, $|u|^{\rho+2}|v|^{\rho}v$ y Ω un dominio arbitrario de $\mathbb{R}^n$.

Milla Miranda, M. y Medeiros, L.A. [9] estudiaron la existencia y unicidad de soluciones globales débiles del problema mixto para el sistema:

$$(**)\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + u - |v|^{\rho+2}|u|^{\rho}u = f_1 \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v + v - |u|^{\rho+2}|v|^{\rho}v = f_2 \end{array}\right.$$

en $Q = \Omega \times [o,T]$, donde Ω es un abierto limitado cualquiera de $\mathbb{R}^n$ y donde el número real ρ tiene la restricción:

$$\rho > -1 \text{ si } n = 1,2 \text{ ; y } -1 < \rho \leq \frac{4-n}{n-2} \text{ si } n \geq 3 \qquad (1)$$

En éstas condiciones, ellos obtienen (Cf. [9], Pág.149)

$$H^1_o(\Omega) \text{ contínuamente inmerso en } L^{2(\rho+2)}(\Omega) \qquad (2)$$

En este trabajo se estudia la Explosión ("*blow-up*") en tiempo finito de las soluciones del problema mixto para el sistema (**), en el caso $\rho = 0$, $f_1 = f_2 = 0$ para Ω un abierto limitado de $\mathbb{R}^n$ con frontera regular Γ Es decir, se estudia "explosión" para el sistema:

$$(***)\left|\begin{array}{l} u'' - \Delta u + u - v^2u = 0 \\ v'' - \Delta v + v - u^2v = 0 \end{array}\right. \qquad (u'' = \partial^2 u/\partial t^2)$$

en $\Omega \times [o,T]$, para $n = 1,2$.

§.1 NOTACIONES Y RESULTADOS PRINCIPALES

1.1 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $H^m(\Omega)$,m un entero no negativo, al espacio de Sobolev de orden m. Por $H_o^m(\Omega)$ representamos la clausura en $H^m(\Omega)$ del espacio $\mathcal{D}(\Omega)$, donde $\mathcal{D}(\Omega)$ representa el espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto contenido en Ω. El producto interno y la norma en $L^2(\Omega)$ y $H_o^1(\Omega)$ serán denotados por $(.,.)$, $|.|$ y $((.,.))$, $\|.\|$ respectivamente.

Denotados por X al espacio $[H_o^1(\Omega) \times L^2(\Omega)]^2$.Las condiciones iniciales y de frontera para el sistema (***) son las siguientes:

$$\left|\begin{array}{l} u(x,0) = u_o(x) \ ; \ v(x,0) = v_o(x) \\ u'(x,0) = u_1(x) \ ; \ v'(x,0) = v_1(x) \\ u|_\Gamma = 0 \ , \ v|_\Gamma = 0 \ ; \ t > 0 \end{array}\right. \quad ; \ x \in \Omega$$

De las restricciones para ρ en (1) se observa que $\rho = 0$ tiene sentido sólo si $n = 1,2,3,4$ y para nuestro caso (2) se transforma en

$$H_o^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega) \quad \text{con inmersión contínua.} \qquad (3)$$

1.2 Considerando $\quad W = \begin{bmatrix} u & v \\ u_t & v_t \end{bmatrix} \ ; \ A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta - I & 0 \end{bmatrix}$

I la identidad; y $\quad F \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b^2a & a^2b \end{bmatrix}$

vemos que el sistema (***) puede ser escrtio en la forma

$$(\mathcal{L})\left|\begin{array}{l} W'(t) = AW(t) + F(W(t)) \\ W(0) = \varphi \end{array}\right.$$

donde $\varphi = \begin{bmatrix} u_o & v_o \\ u_1 & v_1 \end{bmatrix}$

Supondremos que $\varphi \in X$, es decir $\varphi = [u_o,u_1,v_o,v_1] \in X$.

1.3 Sea $G = [g_1,g_2,g_3,g_4] \in [\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)]^2$.

Definimos la norma:

$$|\|G\||^2 = \int_\Omega \{|\nabla g_1|^2+|g_1|^2+|g_2|^2+|\nabla g_3|^2+|g_3|^2+|g_4|^2\}dx \quad (4)$$

Se observa que el "completado" de $[\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)]^2$ **con relación a la norma definida en (4) es el espacio de Hilbert** X. Observamos también que el operador

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta-I & 0 \end{bmatrix}$$

puede ser expresado por

$$A = B + M \quad (5)$$

donde $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{bmatrix}$,

así el operador M queda definido por

$$M[u_1,u_2,v_1,v_2] = [0,-u_1,0,-v_1]$$

claramente $\qquad M \in \mathcal{L}(X,X) \qquad (6)$

1.3.1 Definición. Sea

$$D(B) = [H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)]^2 \quad (7)$$

y para $U = [u_1,u_2,v_1,v_2] \in D(B)$ definimos

$$BU = [u_2, \Delta u_1, v_2, \Delta v_1] \tag{8}$$

En las condiciones de la definición (1.3.1) se tiene el siguiente

1.3.2 Teorema.

El operador B definido por (7) y (8) es un generador infinitecimal de un grupo de clase $C_o T(t)$, de operadores lineales limitados sobre X, el cual satisface

$$\|T(t)\| \leq e^{2|t|} \tag{9}$$

Del Teorema (1.3.2) y (6) tenemos que el operador A es generador infiniterimal de un grupo, digamos $\mathcal{G}(t)$, de clase C_o, de operadores lineales limitados sobre X.

1.3.3 Definición.

Una solución débil W de (***) es una solución de la ecuación integral

$$W(t) = \mathcal{G}(t)\varphi + \int_o^t \mathcal{G}(t-\alpha)F(W(\alpha))d\alpha \tag{10}$$

donde $\begin{bmatrix} u & v \\ u_t & v_t \end{bmatrix}$.

1.3.4 Observación.

Las respectivas funciones u y v satisfacen (***) en el sentido de las distribuciones.

1.3.5 Definición.

$$\left| \begin{array}{l} \text{Sea} \quad U = [u,m,v,r] \in X, \quad \text{definimos} \\ \quad F(U) = [0, v^2u, 0, u^2v] \end{array} \right.$$

En Milla Miranda, M. y Medeiros, L.A. [9], se prueba que $\|v^2u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} \cdot \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$; $\forall u,v \in H_0^1(\Omega)$

para $n = 1,2$. Por tanto $v^2u, u^2v \in L^2(\Omega)$ y luego

$$F : X \longrightarrow X$$

queda bien definida. Además de eso, F es localmente Lipschitziana, es decir:

Para cada subconjunto limitado Q de X existe una constante K_Q tal que

$$\|F(U) - F(V)\| \leq K_Q\|U - V\| \ ; \quad \forall U,V \in Q.$$

En las hipótesis anteriores se tiene la siguiente proposición

1.3.6 Proposición

Existe una única solución débil de (***) maximal definida

$$W = \begin{bmatrix} u & v \\ u_t & v_t \end{bmatrix} \in C^o([0, t_{max}[; X), \ t_{max} > 0.$$

Si $t_{max} < \infty$ entonces $\lim_{t \to t_{max}} \|W(t)\|_X = \infty$.

En ésta etapa, y teniendo el resultado de la proposición (1.3.6) surge una pregunta natural: ¿Bajo qué condiciones t_{max} es finito?

Nuestra preocupación en el siguiente parágrafo, está centrada justamente en responder ésta pregunta.

1.3.7 La energía asociada al sistema (***) es dada por

$$E(u,u_t,v,v_t) = \frac{1}{2}\left[|u'|^2+|v'|^2+\|u\|^2+\|v\|^2-\|uv\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \qquad (11)$$

Se prueba que se satisface la ecuación de la energía:

$$E(u,u_t,v,v_t) = E\ (u_o,u_1,v_o,v_1);\ t \in [0,t_{max}[, \tag{12}$$

donde u y v son soluciones del sistema (***).
Denotamos por $E_o = E(u_o,u_1,v_o,v_1)$. Luego el funcional de energía queda definido por

$$E : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$E(m,r,s,t) = \frac{1}{2}\ [\,|r|^2+|t|^2+\|m\|^2+\|s\|^2-\|mt\|^2_{L^2(\Omega)}\,] \tag{13}$$

1.3.8 Teorema. Si $E_o < 0$, o si $E_o = 0$ y vale

$$(u_o,u_1) + (v_o,v_1) > 0 \tag{14}$$

Entonces $t_{max} < \infty$ y $\lim\limits_{t \to t_{max}} \|W(t)\|_X = \infty$.

§.2 DEMOSTRACION DE LOS RESULTADOS

2.1 Demostración del Teorema 1.3.2

Mutatis Mutandis, la demostración se puede ver en Pazy, A.[10].

2.2 Demostración de la Proposición 1.3.6

Ver J.M. Ball [2] teorema 5.9. Para la parte de la existencia ver Segal, I [11], considerando las modificaciones naturales del caso.

2.3 Demostración del Teorema 1.3.8

Por (12) y la proposición (1.3.6) es suficiente mostrar que $t_{max} < \infty$.
Suponga que $t_{max} = \infty$. Definimos

$$F(t) = |u(t)|^2 + |v(t)|^2 \tag{15}$$

Luego

$$F'(t) = 2(u_1,u_t) + 2(v_1v_t) \qquad (16)$$

Usando (12) y (11) obtenemos

$$F''(t) \geq - 4E_o. \qquad (17)$$

Si $E_o < 0$, de (17) tenemos que $F'(t) > 0$ c.s. Luego podemos suponer que en éste caso tambien vale (14) Como $F''(t) \geq 0$ se sigue que $F'(t)$ y $F(t)$ son funciones no decrecientes y no negativas de t. Usando éstos argumentos y (17) obtenemos una contradición

Observación.

El caso en que el abierto Ω es substituído por $\mathbb{R}^n$, se resuelve de manera análoga, haciendo las modificaciones respectivas.

Agradecimientos:

Al Profesor Manuel Milla Miranda, por la proposición del problema y por las útiles sugerencias durante la realización de este trabajo; también agradezco al Profesor Luiz Adanto Medeiros por la lectura cuidadosa hecha en el primer manuscrito, apuntando correcciones y valiosas sugerencias.

Referencias.

[1] *Ball,J.,M.* Remarks on Blow-up and nonexistence Theorems for nonlinear evolutions equations, Quart. J.Math. Oxford 28 (1977) 473-486.

[2] *Ball,J.,M.* On the asymptotic behaviour of generalized processes, with applications to nonlinear evolution equation, J. Differential Eqns. 27(1978) 224-265.

[3] *Carrillo Díaz, L.E.* Não Existência de soluções fracas Globais de uma equaçao hiperbólica. Atas 28° Seminario Brasileiro de Análise. Rio de Janeiro, 1988.

[4] *Ferreira, J. - Perla Menzala,G.* Decay of solutions of a system of nonlinear Klein Gordon equations, Atas 21 SBA, Brasilia, May 1985.

[5] *Glasey, R.T.* "Blow-up" theorems for nonlinear wave equations. Math. Z. 132 (1973), 183-203.

[6] *Lions, J.L.* Quelques Méthodes de Résolution de Problémes aux limítes non Lineares. Dunod,París (1969).

[7] *Medeiros,L.A.- Perla Menzala,G.* On a mixed problem for a class of nonlinear Klein-Gordon equa tions. Atas 21 SBA / Brasilia, May 1985.

[8] *Medeiros,L.A.- Milla Miranda,M.,* Weak solutions for a system of nonlinear Klein-Gordon equation. Annali de Mat. Pura ed Appl. 146 (1987).

[9] *Milla Miranda,L.A.- Medeiros,L.A.,* On the existence of Global solutions of a coupled nonlinear Klein-Gordon Equations. Funkcialaj Ekvacioj. Vol.30. No.1 (1987), 147-161.

[10] *Pazy, A.,* Semi - groups of linear operator and applications to partial differential equations. Dep. of Math., Univ. of Maryland,Lectures notes No. 10, 1974.

[11] *Segal, I.,* "Non-linear Semi-Groups" Ann. Math, 78 (1963), 339-364.