Pro Mathematica: Vol. 1, No. 1, 1987

LA NOCION DE FORMAS DIFERENCIALES SOBRE $\mathbb{R}^n$ (*)

José Tola Pasquel (**)

Introducción.

Elie Cartan, en la primera edición de su obra sobre la geometría de los espacios de Riemann (1926), que siguió a sus lecciones sobre los invariantes integrales (1922), introdujo la noción de *derivada exterior de una forma diferencial*, a la que, en la segunda edición (1946) llamó, siguiendo a E.Kähler, *diferencial exterior*, adoptando entonces la notación diferencial, que consideró más satisfactoria. Han pasado ya cerca de 60 años y las formas diferenciales han ganado general aceptación en diversos campos de la matemática pura y aplicada, particularmente en la geometría diferencial y en la mecánica.

Nos proponemos exponer aquí algunas consideraciones que pueden servir de motivación a la noción de forma diferencial. Aunque sólo trataremos de las formas definidas en $\mathbb{R}^n$, la presente exposición puede servir de introducción a la definición de formas diferenciales sobre variedades diferenciables.

(*) Conferencia ofrecida por el autor en el Tercer Seminario de Matemáticas organizado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, el 10 de diciembre de 1984.

(**) Profesor Principal de la Sección Matemática - PUCP.

Los tres apéndices que aparecen al final contienen algunas demostraciones destinadas a los lectores interesados en mayores aclaraciones de algunos puntos del texto.

Convendremos, sin necesidad de nuevas indicaciones, en que todas las funciones que consideraremos serán por lo menos de clase C^1, es decir que poseen derivadas parciales de primer orden continuas en los dominios en que se les considere definidas.

En la presente exposición la noción de forma diferencial se derivará, por una parte, de las fórmulas clásicas de Stokes y las análogas, que relacionan a la integración con la diferenciación; y por otra, de la noción algebraica de funciones multilineales alternadas o formas multilineales.

Primera Parte

Las fórmulas clásicas que relacionan a la integración con la diferenciación

En esta primera parte vamos a considerar funciones definidas en subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$. Las coordenadas naturales genéricas de sus puntos, es decir las componentes de los respectivos vectores respecto de las respectivas bases canónicas [1)] serán designadas por x^1, x^2 o por x^1, x^2, x^3.

Comenzaremos por recordar a continuación cuatro fórmulas del Cálculo Clásico, cuya importancia teórica es bien conocida. La relación que existe entre ellas nos servirá de punto de partida.

1) Debe recordarse que la base canónica $\{e_i\} = \{e_1,\dots,e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ está formada por los vectores $e_i = (\delta_i^1, \delta_i^2, \dots, \delta_i^n)$, donde δ_i^j es el símbolo de Kronecker.

Señalaremos previamente que las integrales sobre curvas, superficies y volúmenes que vamos a considerar tienen el sentido que puede hallarse en cualquier texto de análisis, y que los dominios de integración poseen las propiedades que aseguran la existencia de las integrales y el cumplimiento de las fórmulas que enumeramos a continuación.

En las dos primeras fórmulas siguientes P_1, P_2 y P_3 son funciones definidas en un abierto de $\mathbb{R}^3$ que contiene a la superficie S, en el caso de la primera de ellas, y a la región V en el caso de la segunda. En la tercera fórmula P_1 y P_2 son definidas en un abierto del plano $\mathbb{R}^2$ que contiene a la región S. Finalmente, en la cuarta f es una función definida en un abierto de $\mathbb{R}^3$ que contiene a la curva C.

1. **Fórmula de Stokes.**

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial P_3}{\partial x^2} - \frac{\partial P_2}{\partial x^3}\right)dx^2 dx^3 + \left(\frac{\partial P_1}{\partial x^3} - \frac{\partial P_3}{\partial x^1}\right)dx^3 dx^1 + \left(\frac{\partial P_2}{\partial x^1} - \frac{\partial P_1}{\partial x^2}\right) dx^1 dx^2 = \right.$$

$$= \int_{\partial S}(P_1 dx^1 + P_2 dx^2 + P_3 dx^3), \quad (1)$$

en donde S es una superficie contenida en $\mathbb{R}^3$ y ∂S es la curva que constituye su borde. 1)

2. **Fórmula de Gauss en $\mathbb{R}^3$**

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P_1}{\partial x^1} + \frac{\partial P_2}{\partial x^2} + \frac{\partial P_3}{\partial x^3}\right)dx^1 dx^2 dx^3 =$$

$$= \iint_{\partial V} (P_1 dx^2 dx^3 + P_2 dx^3 dx^1 + P_3 dx^1 dx^2), \quad (2)$$

en donde V es una región de $\mathbb{R}^3$ que es limitada por una superficie ∂V que consideramos como su "borde"

1) Debe recordarse que en esta fórmula, así como en las siguientes cada uno de los dominios de integración se supone *orientado* de manera bien definida.

3. **Fórmula de Gauss en $\mathbb{R}^2$**

$$\iint_S \left(\frac{\partial P_1}{\partial x^1} + \frac{\partial P_2}{\partial x^2}\right) dx^1\, dx^2 = \int_{\partial S} (P_1\, dx^2 - P_2\, dx^1), \tag{3}$$

donde S es una región del plano $\mathbb{R}^2$ cuyo borde es la curva ∂S.

4. **Fórmula de integración de la diferencial total.**

$$\int_C \left(\frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}\right) = f(b) - f(a) \tag{4}$$

en donde C es una curva de $\mathbb{R}^3$, que tiene un determinado sentido de recorrido, y cuyos puntos inicial y final son a y b respectivamente.

La fórmula (4) podemos escribirla de manera tal que aparezca más evidente su relación con las otras tres fórmulas. Con ese fin consideremos que el "borde" de la curva C es el conjunto $\partial C = \{a, b\}$ constituidos por sus puntos inicial y final, y que la integral de f sobre ∂C, $\int_{\partial C} f$, es igual a la diferencia $f(b) - f(a)$. Con tales convenios, la fórmula (4) puede escribirse en la forma

$$\int_C \left(\frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3} dx^3\right) = \int_{\partial C} f, \tag{5}$$

en que aparece con más claridad su relación con las fórmulas precedentes.

Observemos cuáles son las circunstancias formales que establecen una relación que nos interesa destacar entre las fórmulas (1), (2), (3) y (5). En primer lugar todos los integrandos que intervienen en ellas son polinomios en dx^1, dx^2 y dx^3 que son las *diferenciales de las funciones coordenadas* o, simplemente, *diferenciales de las coordenadas*. Los coeficientes de esos polinomios son funciones definidas en abiertos que contienen a los dominios de integración, es decir funciones de las variables x^1, x^2, x^3. Cada uno de los integrandos tiene un grado respecto de las diferenciales, que es igual a la dimensión del dominio de integración o *variedad* de integración, si convenimos en denominar a las curvas, superficies, y volumenes, respectivamente, variedades de 1, 2 ó 3 dimensiones del espacio $\mathbb{R}^2$ o del espacio $\mathbb{R}^3$. En particular, el integrando del segundo miembro de la fórmula (5) lo consideramos como un polinomio de grado cero en las diferenciales, y a ∂C como una variedad de dimensión cero. Por último, en cada una de las fórmulas, la integral del primer miembro tiene lugar sobre una variedad de dimensión r, y la del segundo sobre su borde, que es una variedad de dimensión $r-1$; además el integrando del primer miembro es un polinomio de grado r en las diferenciales de las coordenadas y el del segundo es de grado $r-1$.

Hasta ahora no hemos atribuido una significación concreta a los polinomios en las diferenciales de las coordenadas, los cuales aparecen en las mencionadas fórmulas de manera puramente formal, no obstante que las integrales tienen un sentido preciso. Sin embargo, es necesario tener presente que los polinomios de primer grado tales como los integrandos de los segundos miembros de las fórmulas (1) y (3) y el primer miembro de la fórmula (5) tienen una significación que es clásica, que debemos mantener y que vamos a recordar a continuación.

En efecto, si f es una función (real) definida en un conjunto abierto de puntos de $\mathbb{R}^n$ y si designamos por x^1, $x^2, \ldots, x^n$ a las coordenadas genéricas de un punto cualquiera p de ese conjunto, se llama *diferencial de f*, y se designa por df, a una aplicación $\mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ que hace corresponder a cada punto $p \in \mathbb{R}^n$ la función lineal $df(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que aplica a cada vector $x = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$ en el número

$$df(p)(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)_p \xi^1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x^n}\right)_p \xi^n \quad , \tag{6}$$

donde $\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p$ designa a la derivada parcial de f respecto de x^i, en el punto p. Si, en particular, siguiendo la práctica tradicional, designamos por $x^1,\dots,x^n$ a las *funciones coordenadas* en $\mathbb{R}^n$, es decir a las funciones que hacen corresponder a cada punto $p \in \mathbb{R}^n$ sus coordenadas $x^1(p),\dots,x^n(p)$ respectivamente, entonces, por cuanto tales funciones son evidentemente diferenciables y sus derivadas parciales satisfacen a las relaciones

$$\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^i}\right)_p = \delta^j_i \quad ,$$

la fórmula (6) puede escribirse

$$dx^i(p)(x) = \xi^i \ . \tag{7}$$

Es decir que $dx^i(p)$ es, para todo punto p, un mismo elemento de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ que aplica al vector $x \in \mathbb{R}^n$ en su i-ésima componente relativa a la base canónica $\{e_i\}$. Por esa razón podemos escribir en adelante dx^i en vez de $dx^i(p)$, y por tanto se tiene que

$$dx^i(x) = \xi^i \ . \tag{8}$$

Por consiguiente, la fórmula (6) puede ser escrita en la forma

$$df(p)(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)_p dx^1(x) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x^n}\right)_p dx^n(x) \ , \tag{9}$$

de donde se deduce la relación

$$df(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)_p dx^1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x^n}\right)_p dx^n \tag{10}$$

entre elementos del espacio vectorial $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Si convenimos en que, dadas dos funciones P y Q definidas en un abierto de $\mathbb{R}^n$, su producto PQ es dado por la fófmula

$$(PQ)(p) = P(p).Q(p) \ ,$$

la relación (9) se podrá escribir en la forma clásica

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1}\, dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\, dx^n \tag{11}$$

que es una relación entre elementos del espacio vectorial de las aplicaciones definidas en un abierto U de $\mathbb{R}^n$ y con valores en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, cuya significación es dada por (10).

En forma más general, si

$$w = P_1 dx^1 + \dots + P_n\, dx^n \quad , \tag{12}$$

donde las funciones P_i son definidas en el abierto U de $\mathbb{R}^n$, convendremos en que $w\colon U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es tal que se cumplen las relaciones

$$w(p) = P_1(p)dx^1 + \dots + P_n(p)dx^n \ ,$$

y por tanto

$$w(p)(x) = P_1(p)\xi^1 + \dots + P_n(p)\xi^n \ ,$$

de las cuales (10) y (9) son, respectivamente, casos particulares.

Las aplicaciones definidas por la relación (12), en que las P_i son funciones diferenciables, se llaman *formas diferenciables de primer grado.*

Por ahora lo que nos interesa es señalar que la relación (11) nos permite dar a la fórmula (5) de la integración de la diferencial total la forma particularmente compacta.

$$\int_C df = \int_{\partial C} f \ . \tag{13}$$

De aquí nace la sugerencia de atribuir una significación tal a los polinomios que son los integrandos de las fórmulas (1), (2) y (3), y de definir el operador d (operador diferencial) de manera que, aplicado sobre dichos polinomios, permita expresar a cada una de dichas fórmulas en la forma general

$$\int_M dw = \int_{\partial M} w , \tag{14}$$

donde w sea un polinomio en las diferenciales de las coordenadas, M sea una variable y ∂M su borde. En cuanto a dw podemos pensarlo desde ahora como un polinomio cuyo grado es mayor que el de w en una unidad y cuya forma determinaremos después.

Un procedimiento heurístico, basado en el propósito de reducir las fórmulas (1), (2) y (3) a la forma (14), permite adoptar convenios sencillos acerca del cálculo con polinomios en las diferenciales de las coordenadas, con el objeto de alcanzar ese propósito (Ver el apéndece 1). De esa manera somos conducidos a admitir las operaciones de suma y producto de tales polinomios provistas de las reglas ordinarias del cálculo de polinomios algebraicos, a excepción de la propiedad conmutativa de la multiplicación, por cuanto, como se muestra en el apéndice 1, debemos adoptar el siguiente convenio adicional

$$dx^i\, dx^j = - dx^j\, dx^i , \tag{15}$$

consecuencia de la cual puede considerarse la siguiente relación que también adoptaremos

$$dx^i\, dx^i = 0 . \tag{16}$$

Así mismo, como se muestra en el apéndice 1, convendremos en que el operador d opera aditivamente sobre los polinomios y que se cumple la regla siguiente:

$$d(P\,dx^{i_1}\,dx^{i_2}\,\dots\,dx^{i_n}) = dP\,dx^{i_1}\,dx^{i_2}\,\dots\,dx^{i_n} \qquad (17)$$

De esa manera, y puesto que

$$dP = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial x^i}\,dx^i \ , \qquad (18)$$

es fácil reconocer que las operaciones mencionadas, realizadas con polinomios de la forma

$$w = \Sigma\ \alpha_{(i_1,\dots,i_r)}\,dx^{i_1}\,\dots\,dx^{i_r}\ , \quad (1 \leqslant i_j \leqslant n)$$

donde $r \leqslant n$ y $\alpha_{(i_1,\dots,i_r)}$ son funciones diferenciables de $x^1,\dots, x^n$, dan por resultado un nuevo polinomio de esa forma. En particular si se aplica el operador diferencial a un polinomio de grado $r < n$, resulta un polinomio de grado $r + 1$; y si se aplica a un polinomio de grado n se obtiene el polinomio nulo, por cuanto (18) da lugar a que, en cada término, haya dos factores diferenciales idénticos, lo que da lugar, en virtud de (16), a que cada término sea igual a cero.

La aplicación de las reglas precedentes permite obtener las relaciones siguientes (ver apéndice 1)

$$\left.\begin{aligned}
d(P_1 dx^1 + P_2 dx^2 + P_3 dx^3) &= \left(\frac{\partial P_3}{\partial x^2} - \frac{\partial P_2}{\partial x^3}\right)dx^2\,dx^3 + \\
&+ \left(\frac{\partial P_1}{\partial x^3} - \frac{\partial P_3}{\partial x^1}\right)dx^3\,dx^1 + \left(\frac{\partial P_2}{\partial x^1} - \frac{\partial P_1}{\partial x^2}\right)dx^1\,dx^2 \ , \\
d(P_1 dx^2 dx^3 + P_2 dx^3 dx^1 + P_3 dx^1 dx^2) &= \left(\frac{\partial P_1}{\partial x^1} + \frac{\partial P_2}{\partial x^2} + \frac{\partial P_3}{\partial x^3}\right) \\
&\qquad dx^1\,dx^2\,dx^3 \ , \\
d(P_1 dx^2 - P_2 dx^1) &= \left(\frac{\partial P_1}{\partial x^1} + \frac{\partial P_2}{\partial x^2}\right)dx^1\,dx^2 \ ,
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

con lo cual se ve inmediatamente que las fórmulas (1), (2), (3) se reducen a la forma (14). Sin embargo, salvo el caso de los polinomios de primer grado en las diferenciales, a los demás no les hemos dado aún una significación concreta.

Nos hemos limitado a señalar que algunas reglas simples de cálculo - en particular la relación (15) - y la introducción del operador diferencial d mediante la fórmula (17) permiten alcanzar el objetivo de que las fórmulas (1), (2), (3) y (5) se reduzcan a la forma común (14). Sin embargo, no hemos atribuido aún significado concreto a los polinomios en las diferenciales.

Segunda Parte

Formas lineales y formas multilineales alternadas.

En adelante, designaremos por E al espacio euclideano $\mathbb{R}^n$.

Se dice que una función $f: \underbrace{E \times \dots \times E}_{r \text{ factores}} \to \mathbb{R}$ es una *función r-lineal alternada* o también, una *r-forma* si a cada r vectores cualesquiera $x_1,\dots,x_r$ de E le hace corresponder un un número real $f(x_1,\dots,x_r)$, de manera que se cumplen las siguientes condiciones:

1ra. f es lineal respecto de cada una de las r variables x_1, $x_2,\dots,x_r$.

2da. Si σ es una permutación cualquiera de los números 1, $2,\dots,r$ y $\&(\sigma)$ designa el *signo* de dicha permutación, se cumple la relación

$$f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(r)}) = \&(\sigma)\, f(x_1,\dots,x_r) .$$

Por tanto el valor de f permanece invariable si σ es una permutación par, y cambia de signo si es impar.

El ejemplo más simple de una forma *r-lineal* alternada es la función determinante que se define como sigue: Dada una base $\{v_i\}$ de E, y los vectores

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_j^i \, v_i \quad , \quad j = 1 ,\ldots, r \, ,$$

se llama *matriz de los vectores* $x_1 ,\ldots, x_r$ *respecto de la base* $\{v_i\}$ a la matriz

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1^1 & \ldots & \xi_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^n & \ldots & \xi_r^n \end{bmatrix}$$

En el caso particular en que $r = n$, ξ es una matriz $n \times n$ y puede definirse la *función determinante* $f \colon E \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_1 ,\ldots, x_n) = det \, \xi \, .$$

Que la función f así definida es efectivamente una forma *r-lineal* alternada resulta de las propiedades de los determinantes.

Las formas *r-lineales* alternadas constituyen un espacio vectorial que vamos a designar por $A_r(E)$, con las operaciones vectoriales siguientes

$$(f_1 + f_2)(x_1,\ldots,x_r) = f_1(x_1,\ldots,x_r) + f_2(x_1,\ldots,x_r)$$

y

$$(af)(x_1 ,\ldots, x_r) = af(x_1 ,\ldots, x_r) \quad , \quad a \in \mathbb{R} \, .$$

Puede demostrarse que $A_r(E)$ tiene la dimensión

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \, (n-r)!}$$

Con ese fin vamos a construir una base de $A_r(E)$. Designaremos con $J = \{j_1 < \dots < j_r\}$ a un subconjunto ordenado cualquiera, de r elementos, del conjunto $I_n = \{1,\dots,n\}$, tales que $j_1 < \dots < j_r$. Es claro que el número de los subconjuntos J distintos entre sí es $\binom{n}{r}$. A cada uno de ellos vamos a hacerle corresponder una forma *r-lineal* alternada Φ_r^J, cuyos valores son dados por

$$\Phi_r^J(x_1, \dots, x_r) = \det \xi^J \tag{20}$$

donde ξ^J designa a la submatriz $r \times r$ de la matriz ξ de los vectores x_i respecto de la *base canónica* $\{e_i\}$ de E, cuya forma es

$$\xi^J = \begin{bmatrix} \xi_1^{j_1} & \cdots & \xi_r^{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{j_r} & \cdots & \xi_r^{j_r} \end{bmatrix}, \quad (x_j = \Sigma\, \xi_j^i e_i).$$

Si f es una forma *r-lineal* alternada cualquiera, un cálculo sencillo permite demostrar *(Apéndice 2)* que

$$f(x_1,\dots,x_r) = \sum_J f(e_{j_1},\dots,e_{j_r}) \det \xi^J$$

donde la suma se extiende a todos los subconjuntos ordenados J de I_n, formados por r números. Podemos escribir por consiguiente

$$f = \sum_J f(e_{j_1},\dots,e_{j_r})\, \Phi_r^J$$

es decir que los $\binom{n}{r}$ elementos Φ_r^J de $A_r(E)$ generan a este espacio. Puede probarse también sin dificultad *(Apéndice 2)* que esos elementos son linealmente independientes y por tanto constituyen una base de $A_r(E)$, espacio vectorial que es por tanto de dimensión $\binom{n}{r}$. Diremos en adelante que

$\{\Phi_r^J\}$ es la *base canónica* de $A_r(E)$.

Convendremos en que $A_0(E)$ es el espacio $\mathbb{R}$ de los números reales y, $A_1(E)$ es el espacio $\mathcal{L}(E)$ (dual de E) formado por las *funciones o formas lineales* definidas en E. La dimensión de $A_1(E)$ es $\binom{n}{1} = n = dim\ E$. Los conjuntos J se reducen en este último caso a $\{1\},\ldots,\{n\}$, y la base canónica correspondiente vamos a designarla por $\{\pi^1,\ldots,\pi^n\}$. Cada forma π^i es definida entonces por

$$\pi^i(x) = \xi^i \quad , \quad (x = \Sigma\ \xi^i e_i) \ , \qquad (21)$$

de modo que aplica a cada vector $x \in E$ sobre su componente ξ^i relativa a la base canónica $\{e_i\}$. En particular,

$$\pi^i(e_j) = \delta^i_j \ ,$$

por definición de la base canónica de E.

Vamos a definir ahora la operación de *producto exterior* de dos formas multilineales cualesquiera $f \in A_r(E)$ y $g \in A_s(E)$, de manera que su resultado sea una forma $(r + s)$-multilineal alternada que vamos a designar por

$$f \wedge g \ ,$$

y que definiremos a continuación.

Si $r = s = 0$ el producto exterior se reduce al producto ordinario de dos números reales, y escribimos entonces fg en vez de $f \wedge g$.

Si $r = 0$ y $s \neq 0$, en cuyo caso f es un número real, el producto exterior $f \wedge g$ se escribe en la forma fg y se define a $fg = gf$ como la forma *s-lineal* alternada tal que

$$(fg)(x_1 ,\ldots, x_s) = (gf)(x_1 ,\ldots, x_s) = fg(x_1 ,\ldots, x_s) \ .$$

Con el fin de definir $f \wedge g$ cuando r y s son diferentes de cero comenzaremos por definir el producto exterior

$$\Phi_r^J \wedge \Phi_s^K$$

de dos elementos cualesquiera de las bases canónicas de $A_r(E)$ y $A_s(E)$, respectivamente, correspondientes a

$$J = \{j_1 < \dots < j_r\} \subset I_n \quad \text{y} \quad K = \{k_1 < \dots < k_s\} \subset I_n$$

Ese producto será una forma $(r + s)$ lineal dada por

$$(\Phi_r^J \wedge \Phi_s^K)(x_1, \dots, x_{r+s}) = det\ \xi^{JK} \tag{22}$$

en donde JK designa al conjunto $\{j_1, \dots, j_r, k_1, \dots, k_s\}$ y ξ^{JK} designa a la matriz

$$\xi^{JK} = \begin{bmatrix} \xi_1^{j_1} & \dots & \xi_{r+s}^{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{j_r} & \dots & \xi_{r+s}^{j_r} \\ \xi_1^{k_1} & \dots & \xi_{r+s}^{k_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{k_s} & \dots & \xi_{r+s}^{k_s} \end{bmatrix} \qquad (x_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^j e_j)$$

Si JK no contiene elementos repetidos, designemos por σ a la permutación de sus elementos que transforma a JK en otro conjunto $(JK)'$, en que dichos elementos quedan ordenados en orden creciente.

Por tanto, para $J \cap K = \phi$ la fórmula (22) puede escribirse en la forma

$$(\Phi_r^J \wedge \Phi_s^K)(x_1, \dots, x_{r+s}) = \mathcal{E}(\sigma)\, det\ \xi^{(JK)'} =$$

$$= \&(\sigma)\ \Phi_{r+s}^{(JK)'}(x_1, \dots, x_{r+s}) \tag{23}$$

Si JK contiene elementos repetidos, en cuyo caso la matriz ξ^{JK} tiene dos lineas iguales, entonces es $det\ \xi^{JK}=0$.

Por consiguiente se tiene,

$$\Phi_r^J \wedge \Phi_s^K = \begin{cases} \&(\sigma)\ \Phi_{r+s}^{(JK)'} & \text{si } J \cap K = \phi \\ \\ 0 & \text{si } J \cap K \neq \phi \end{cases} \tag{24}$$

donde σ es la permutación que transforma al conjunto ordenado JK en el conjunto $(JK)'$ en que los elementos están ordenados en orden creciente.

Prestemos atención, en particular, al producto exterior de elementos de la base canónica $\{\pi^i\}$ de $A_1(E)$. Si $j_1 < j_2$ la fórmula (22) nos da

$$(\pi^{j_1} \wedge \pi^{j_2})(x_1, x_2) = det\ \xi^{\{j_1 < j_2\}}$$

$$= \begin{vmatrix} \xi_1^{j_1} & \xi_2^{j_2} \\ \\ \xi_1^{j_2} & \xi_2^{j_2} \end{vmatrix} = \Phi_2^{\{j_1 < j_2\}}(x_1, x_2),$$

y por tanto

$$\pi^{j_1} \wedge \pi^{j_2} = \Phi_2^{\{j_1 < j_2\}}$$

Es evidente además, que

$$\pi^{j_1} \wedge \pi^{j_2} = -\pi^{j_2} \wedge \pi^{j_1}. \tag{25}$$

De las relaciones (24) se deduce, para $j_1 < j_2 < j_3$, que

$$(\pi^{j_1} \wedge \pi^{j_2}) \wedge \pi^{j_3} = \Phi_2^{\{j_1 < j_2\}} \wedge \pi^{j_3} = \Phi_3^{\{j_1 < j_2 < j_3\}},$$

y

$$\pi^{j_1} \wedge (\pi^{j_2} \wedge \pi^{j_3}) = \pi^{j_1} \wedge \Phi_2^{\{j_2 < j_3\}} = \Phi_3^{\{j_1 < j_2 < j_3\}} .$$

Por consiguiente, tiene lugar la propiedad asociativa, y puede escribirse

$$(\pi^{j_1} \wedge \pi^{j_2}) \wedge \pi^{j_3} = \pi^{j_1} \wedge (\pi^{j_2} \wedge \pi^{j_3})$$
$$= \pi^{j_1} \wedge \pi^{j_2} \wedge \pi^{j_3} ,$$

para $j_1 < j_2 < j_3$. En general, se prueba por inducción, para $J = \{j_1 < \dots < j_r\}$, que

$$\pi^{j_1} \wedge \dots \wedge \pi^{j_r} = (\pi^{j_1} \wedge \dots \wedge \pi^{j_{r-1}}) \wedge \pi^{j_r} = \Phi_r^J ,$$

fórmula que demuestra que la base canónica de $A_r(E)$ está formada por los productos exteriores $\pi^{j_1} \wedge \dots \wedge \pi^{j_r}$ tales que $J = \{j_1 < \dots < j_r\} \subset I_n$, y por consiguiente cada forma *r-lineal* alternada se escribe de manera única en la forma

$$\sum_J \alpha_J \pi^{j_1} \wedge \dots \wedge \pi^{j_r} , \quad (\alpha_J \in \mathbb{R}).$$

Podemos definir ahora el producto exterior de la *r-forma*

$$f = \sum_J \alpha_J \Phi_r^J \in A_r(E) , \quad \alpha_J = f(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) ,$$

por la *s-forma*

$$g = \sum_K \beta_K \Phi_s^K \in A_s(E) \quad , \beta_K = g(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}),$$

mediante la fórmula

$$f \wedge g = \sum_J \sum_K \alpha_J \beta_K (\Phi_r^J \wedge \Phi_s^K) \in A_{r+s}(E) \tag{27}$$

La fórmula (26) y las propiedades ya demostradas del producto de las formas π^i permiten escribir

$$(\Phi_r^J \wedge \Phi_s^K) \wedge \Phi_t^L = \pi^{j_1} \wedge \ldots \wedge \pi^{j_r} \wedge \pi^{k_1} \wedge \ldots \wedge \pi^{k_s}$$

$$\wedge\ \pi^{l_1} \wedge \ldots \wedge \pi^{l_t}$$

$$= \Phi_r^J \wedge (\Phi_s^K \wedge \Phi_t^L).$$

Se deduce de aquí la *propiedad asociativa* del producto exterior de formas multilineales, o sea

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h) = f \wedge g \wedge h .$$

La relación (25) permite establecer que

$$\Phi_r^J \wedge \Phi_s^K = (-1)^{rs}\ \Phi_s^K \wedge \Phi_r^J \quad ,$$

de donde resulta la *propiedad anticonmutativa*

$$f \wedge g = (-1)^{rs}\ g \wedge f.$$

Por último, la definición (27) implica inmediatamente a la *propiedad distributiva*.

$$(f + g) \wedge h = f \wedge h + g \wedge h \ , \quad f,g \in A_r(E),\ h \in A_s(E).$$

Aplicación. El producto exterior de S formas lineales sobre $\mathbb{R}^n$, es dado por la fórmula

$$(f_1 \wedge \ldots \wedge f_s)(x_1,\ldots,x_s) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \ldots & f_1(x_s) \\ \vdots & & \vdots \\ f_s(x_1) & \ldots & f_s(x_s) \end{vmatrix} \quad ,$$

cuya demostración aparece en el *apéndice 3.*

Tercera Parte

Formas diferenciales

Ahora podemos relacionar las observaciones de la primera parte con los resultados de la segunda. Si comparamos la fórmula (7) con la (21) podemos observar que puede escribirse

$$dx^i(p) = \pi^i \quad , \; i = 1,\dots,n \tag{28}$$

Es decir que la diferencial dx^i hace corresponder a cada punto $p \in E$ el elemento π^i de la base canónica de $A_1(E)$. Esta observación sugiere definir el *producto exterior de las diferenciales* $dx^{j_1}, \dots, dx^{j_r}$, para $J = \{ j_1 < \dots < j_r \}$, como una aplicación

$$dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_r} : E \to A_r(E)$$

dada por la fórmula

$$\begin{aligned}(dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_r})(p) &= dx^{j_1}(p) \wedge \dots \wedge dx^{j_r}(p) \\ &= \pi^{j_1} \wedge \dots \wedge \pi^{j_r} = \Phi^J_r \;,\end{aligned}$$

de manera que, si se tiene presente la relación (20), resulta la ecuación

$$(dx^{j_1}(p) \wedge \dots \wedge dx^{j_r}(p))(x_1,\dots,x_r) = \det \xi^J \; . \tag{29}$$

En particular, se cumple que

$$(dx^i \wedge dx^j)(p) = \pi^i \wedge \pi^j \;,$$

de donde, en virtud de (26) se deduce

$$(dx^i \wedge dx^j)(p) = -(dx^j \wedge dx^i)(p) \;,$$

para todo $p \in E$; y por consiguiente

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i \tag{30}$$

resultado que es coincidente con la relación (15) que hemos asumido en la primera parte.

Podemos definir ahora, en general, a una *r-forma* diferencial.

Definición 1. Una *r-forma diferencial* o *forma diferencial de grado* r definida en un abierto U de $E = \mathbb{R}^n$ es una aplicación

$$\omega : E \rightarrow A_r(E)$$

que hace corresponder a cada punto $p \in E$ una forma *r-lineal* alternada dada por

$$\begin{aligned}
\omega(p) &= \sum_J \omega_J(p)\pi^{j_1} \wedge \ldots \wedge \pi^{j_r} \\
&= \sum_J \omega_J(p) dx^{j_1}(p) \wedge \ldots \wedge dx^{j_r}(p) \\
&= \sum_J (\omega_J dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_r})(p) \ ;
\end{aligned}$$

de modo que podemos escribir

$$\omega = \sum_J \omega_J \, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_r} \tag{31}$$

donde cada ω_J designa a una función definida y diferenciable en U. La expresión (31) de ω es su *representación canónica.*

Las formas diferenciales de grado 0 son las funciones reales definidas sobre E, y las formas diferenciales de grado 1 son las aplicaciones $\omega : E \rightarrow A_1(E) = \mathcal{L}(E)$ tales que

$$\omega(p) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \, dx^j \quad ,$$

donde las ω_j son funciones reales definidas sobre E.

La *suma* de dos *r-formas* diferenciales

$$\omega = \sum_J \omega_J \, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_r} \qquad \text{y}$$

$$\theta = \sum_J \theta_J \, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_r}$$

es la *r-forma* $\omega + \theta$ tal que

$$(\omega + \theta)(p) = \sum_I (\omega_j + \theta_J) dx^{j_1} \ldots dx^{j_r} = \omega(p) + \theta(p).$$

En este momento vamos a atribuir a los polinomios formales $\sum_J \omega_J \, dx^1 \ldots dx^r$ la siguiente significación concreta

$$\sum_J \omega_J dx^{j_1} \ldots dx^{j_r} = \sum_J \omega_J dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_r} ,$$

es decir que, en adelante, los consideraremos como *r-formas* lineales. En consecuencia podemos introducir la noción de *integral de una forma diferencial* ω, dada por su representación canónica, sobre una variedad M de dimensión r del espacio E, mediante la fórmula

$$\int_M \omega = \sum_J \int_M \omega_J \, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_r}$$

$$= \sum_J \int_M \omega_J \, dx^{j_1} \ldots dx^{j_r} ,$$

cuyo último miembro tiene, cuando r toma uno de los valores *1*, *2* o *3*, la significación clásica a que antes hemos hecho referencia. Si $r > 3$, la aplicabilidad de esa fórmula está sujeta a que se admita como ya conocida la extensión de la definición clásica de integral de una función, a la integración de una función sobre una variedad de dimensión r del espacio $I\!R^n$, que sea una generalización de las nociones de curva y de superficie.

En todo caso, de acuerdo a los acuerdos precedentes, las fórmulas (1), (2) y (3) pueden escribirse en las formas siguientes

$$\iint_S \Big[\Big(\frac{\partial P_3}{\partial x^2} - \frac{\partial P_2}{\partial x^3}\Big)dx^2 \wedge dx^3 + \Big(\frac{\partial P_1}{\partial x^3} - \frac{\partial P_3}{\partial x^1}\Big)dx^3 \wedge dx^1$$

$$+ \Big(\frac{\partial P_2}{\partial x^1} - \frac{\partial P_1}{\partial x^2}\Big)dx^1 \wedge dx^2$$

$$= \int_{\partial S} (P_1 dx^1 + P_2 dx^2 + P_3 dx^3) \qquad (32)$$

$$\iiint_V \Big(\frac{\partial P_1}{\partial x^1} + \frac{\partial P_2}{\partial x^2} + \frac{\partial P_3}{\partial x^3}\Big)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 =$$

$$= \iint_{\partial V} (P_1 dx^2 \wedge dx^3 + P_2 dx^3 \wedge dx^1 + P_3 dx^1 \wedge dx^2) \qquad (33)$$

$$\iint_S \Big(\frac{\partial P_1}{\partial x^1} + \frac{\partial P_2}{\partial x^3}\Big)dx^1 \wedge dx^2 = \int_{\partial S} (P_1 dx^2 - P_2 dx^1), \qquad (34)$$

en tanto la fórmula (5) permanece invariable.

Vamos a definir ahora el producto de dos formas diferenciales.

Definición 2. Se llama producto exterior de la *r-forma* diferencial $\omega^{(r)}$ por la *s-forma* $\omega^{(s)}$ a la *(r + s)-forma* diferencial $\omega^{(r)} \wedge \omega^{(s)}$ que se define por

$$(\omega^{(r)} \wedge \omega^{(s)})(p) = \omega^{(r)}(p) \wedge \omega^{(s)}(p).$$

Si suponemos, en particular, que $r = 0$, y escribimos f en vez de $\omega^{(0)}$, tendremos

$$(f \wedge \omega^{(s)})(p) = f(p) \wedge \omega^{(s)}(p) = f(p)\omega^{(s)}(p) \,,$$

y por tanto

$$f \wedge \omega^{(s)} = f\omega^{(s)}$$

de manera que

$$(f \wedge \omega^{(s)})(p)(x_1,\ldots,x_s) = f(p)\omega^{(s)}(p)(x_1,\ldots,x_s).$$

Semejantemente, para $s = 0$,

$$\omega^{(r)} \wedge f = \omega^{(r)}f = f\omega^{(r)}$$

Las propiedades de las operaciones con formas multilineales alternadas se extienden de inmediato a las formas diferenciales. Se tiene, por tanto

$$\begin{aligned}(\omega^{(r)} \wedge \omega^{(s)}) \wedge \omega^{(t)} &= \omega^{(r)} \wedge (\omega^{(s)} \wedge \omega^{(t)}) \\ &= \omega^{(r)} \wedge \omega^{(s)} \wedge \omega^{(t)} \,,\end{aligned}$$

$$\omega^{(r)} \wedge \omega^{(s)} = (-1)^{rs}\omega^{(s)} \wedge \omega^{(r)} \,,$$

$$(\omega_1^{(r)} + \omega_2^{(r)}) \wedge \omega^{(s)} = \omega_1^{(r)} \wedge \omega^{(s)} + \omega_2^{(r)} \wedge \omega^{(s)} \,.$$

Antes de tratar acerca de la diferenciación exterior de las formas diferenciales, a la que nos referiremos en la parte IV, vamos a detenernos en una observación que agrega una razón a favor de la definición de formas diferenciales que hemos introducido. Para esto debemos dar previamente una nueva definición.

Definición 3. Dada una *n-forma* diferencial ω definida en un conjunto *conexo* U de $E = \mathbb{R}^n$, sea U' otro abierto de E en que es definida una biyección diferenciable $\varphi\colon U' \to U$, tal que la aplicación lineal $\varphi'(p)\colon E \to E$, diferencial de φ en el punto p, es un isomorfismo para cada $p \in U'$; y por consiguiente, si $\varphi\colon (y^1,\ldots,y^n) \to (x^1,\ldots,x^n)$ es dada por las funciones

$$x^i = x^i(y^1,\ldots,y^n)$$

entonces su jacobiano

$$\frac{\partial(x^1,\ldots,x^n)}{\partial(y^1,\ldots,y^n)} = det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^j}\right) \qquad (35)$$

es diferente de cero y de signo constante en todo punto de U'.

Se llama *forma diferencial deducida de ω por el cambio de variable $\varphi\colon U' \to U$*, a la n-forma diferencial $\varphi^*\omega\colon U' \to A_n(E)$ cuyo valor en un punto cualquiera $p \in U'$ es la forma n-lineal alternada $(\varphi^*\omega)(p)$ dada por la fórmula

$$(\varphi^*\omega)(p)(y_1,\ldots,y_n) = \omega(\varphi(p))(\varphi'(p).y_1,\ldots,\varphi'(p).y_n),$$

donde $y_i = (\eta_i^1,\ldots,\eta_i^n)$, $i = 1,\ldots,n$, son n vectores cualesquiera de E, y $\varphi'(p)$ es la aplicación lineal, derivada en p de la aplicación φ. Comprobaremos a continuación que $\varphi^*\omega$ es una *n-forma* diferencial.

Sea $\omega = fdx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ donde $f\colon U \to \mathbb{R}$, la representación canónica de ω.

Tendremos entonces

$$(\varphi^*\omega)(p)(y_1,\ldots,y_n) = f(\varphi(p))(dx^1(\varphi(p)) \wedge\ldots\wedge dx^n(\varphi(p)))(\varphi'(p).y_1,\ldots,\varphi'(p)y_n)$$

Ahora bien, si $\{e_i\}$ es la base canónica de E, se tiene

$$\varphi'(p).y_k = \sum_{i,l=1}^{n} \left(\frac{\partial x^l}{\partial y^i}\right)_p \eta_k^i\, e_l \quad ,$$

por cuanto la matriz de $\varphi'(p)$ respecto de la base canónica es

$((\frac{\partial x^l}{\partial y^i})_p)$. Se deduce de aquí que la matriz del conjunto de los vectores $\{\varphi'(p).y_1, \ldots, \varphi'(p).y_n\}$, respecto de esa base, es el producto de matrices

$$\begin{bmatrix} (\frac{\partial x^1}{\partial y^1})_p & \cdots & (\frac{\partial x^1}{\partial y^n})_p \\ \vdots & & \vdots \\ (\frac{\partial x^n}{\partial y^1})_p & \cdots & (\frac{\partial x^n}{\partial y^n})_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1^1 & \cdots & \eta_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \eta_1^n & \cdots & \eta_n^n \end{bmatrix} ,$$

cuyo determinante es, en virtud de las fórmulas (35) y (29),

$$(\frac{\partial(x^1,\ldots, x^n)}{\partial(y^1,\ldots, y^n)})_p.(dy^1(p) \wedge \ldots \wedge dy^n(p))(y_1,\ldots,y_n) .$$

La fórmula (29) y el resultado precedente permiten escribir

$$(\varphi^*\omega)(p)(y_1,\ldots,y_n) =$$

$$= f(\varphi(p))(\frac{\partial(x^1,\ldots,x^n)}{\partial(y^1,\ldots,y^n)})_p(dy^1(p) \wedge \ldots \wedge dy^n(p))(y_1,\ldots,y_n) ,$$

de donde se deduce que

$$\varphi^*\omega = (f \circ \varphi)(\frac{\partial(x^1,\ldots, x^n)}{\partial(y^1,\ldots, y^n)})\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n ,$$

relación que prueba que $\varphi^*\omega$ es una forma diferencial.

La fórmula bien conocida del cambio de variables de la integral de una función f definida en un recinto U de $\mathbb{R}^n$, cuando el cambio es definido por una función $\varphi: U' \to U$

dada por las funciones $x^i = x^i(y^1,...,y^n)$ [1], puede escribirse, mediante los convenios que hemos adoptado, en la forma

$$\int_U f\,dx^1 \wedge ... \wedge dx^n = \int_{U'} (f \circ \varphi) \left| \frac{\partial(x^1,...,x^n)}{\partial(y^1,...,y^n)} \right| dy^1 \wedge ... \wedge dy^n$$

es decir

$$\int_U \omega = \epsilon \int_{U'} \varphi^* \omega ,$$

donde ϵ es igual a $+1$ o -1 según que el jacobiano de φ sea positivo o negativo, es decir según que $\varphi'(p)$ deje invariante o cambie por la opuesta la orientación de $\mathbb{R}^n$.

La forma sencilla que hemos obtenido para la fórmula de cambio de variable de las integrales múltiples es la nueva razón, a que hemos aludido anteriormente, a favor de la definición de las formas diferenciales que hemos adoptado.

Cuarta Parte

Diferencial exterior de una forma diferencial, y fórmula de Stokes generalizada

Para introducir el operador diferencial d que debe operar sobre las formas diferenciales, lo haremos teniendo presente la fórmula (17) que hemos adoptado en la parte I de manera hasta cierto punto arbitraria, si bien fue motivada en las consideraciones del apéndice 1.

---

1) Ver, por ejemplo, Apóstol, Mathematical Analysis, Addison - Wesley (1957) pág. 271.

Definición 4. Se llama *diferencial exterior* de la *r-forma* diferencial

$$\omega = \sum_J \omega_J dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_r}$$

a la *(r + 1)-forma* diferencial

$$d\omega = \sum_J d\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_r} ,$$

de donde, por cuanto $d\omega_J$ es la diferencial de la función ω_J, se deduce que

$$d\omega = \sum_J \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_J}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j} .$$

En el caso en que ω es una *0-forma*, es decir una función f, df toma la forma (11).

Es evidente que el operador d opera aditivamente sobre las formas. Puede demostrarse, además, que si las funciones ω_J tienen derivadas parciales de segundo orden continuas, se cumple que $d(d\omega) = 0$.
En efecto, se tiene

$$d(d\omega) = \sum_J \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x^i \partial x^k} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_r} .$$

Si eliminamos de la suma del segundo miembro a todos los términos para los cuales el conjunto $\{k, i, j_1, \dots, j_r\}$ contiene dos números iguales, términos que son por tanto nulos, los términos restantes pueden ser agrupados en pares de manera que a un término

$$\frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x^i \partial x^k} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_r}$$

le corresponde el término

$$\frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x^k \, \partial x^i} \, dx^i \wedge dx^k \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_r} =$$

$$= - \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x^k \, \partial x^i} \, dx^k \wedge dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_r} \, .$$

Puesto que $\dfrac{\partial^2 \omega_J}{\partial x^i \, \partial x^k} = \dfrac{\partial^2 \omega_J}{\partial x^k \, \partial x^i}$, ambos términos se cancelan, y por tanto es $d(d\omega) = 0$.

Las propiedades del producto exterior y de la diferencial exterior, y en particular la fórmula (30), permiten reconocer fácilmente que las fórmulas (32), (33), (34) y (5) se reducen a la forma

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \tag{36}$$

donde ω es en cada caso la forma diferencial que es el integrando del respectivo segundo miembro y $d\omega$ es su diferencial exterior.

Si son definidas convenientemente las variedades de dimensiones $1,2,\ldots,n$ de $\mathbb{R}^n$, generalizando las nociones de curva de superficie y de región, la fórmula (36) se cumple en forma general para cada forma diferencial ω cuyo grado es igual a la dimensión de la variedad ∂M que constituye el borde, adecuadamente definido, de una variedad M de E. La fórmula así extendida se llama *fórmula de Stokes generalizada*, la demostración de la cual excede desde luego a los propositos de esta exposición.

Agregaremos a todo lo dicho un breve comentario.

La noción de *r-forma* diferencial puede extenderse de $\mathbb{R}^n$ a espacios topológicos más generales que se llaman *varie-*

dades diferenciables, a cada uno de cuyos puntos le corresponde un espacio vectorial estrechamente vinculado a la estructura del espacio, que se llama *espacio tangente* a la variedad en el punto correspondiente. Una *r-forma* diferencial sobre una de tales variedades M es una aplicación que hace corresponder a cada punto $p \in M$ una forma *r-lineal* alternada definida sobre el espacio vectorial tangente TM_p es decir un elemento de $A_r(TM_p)$. La noción de forma diferencial que así se obtiene se reduce, en el caso en que la variedad considerada es $\mathbb{R}^n$, a la que hemos definido anteriormente, porque el espacio tangente se identifica entonces, de manera natural, con el mismo espacio $\mathbb{R}^n$. La fórmula de Stokes puede generalizarse extendiéndola a variedades diferenciables.

Apéndice 1

El operador diferencial

Vamos a tratar de definir el operador d *(operador diferencial exterior)* que debe actuar sobre los polinomios en las diferenciales, pero de manera que se cumplan las siguientes relaciones que son sugeridas por las fórmulas (1), (2) y (3), en el propósito de reducirlas a la forma (14).

$$d(P_1 dx^1 + P_2 dx^2 + P_3 dx^3) =$$

$$= \left(\frac{\partial P_3}{\partial x^2} - \frac{\partial P_2}{\partial x^3}\right) dx^2 dx^3 + \left(\frac{\partial P_1}{\partial x^3} - \frac{\partial P_3}{\partial x^1}\right) dx^3 dx^1 + \left(\frac{\partial P_2}{\partial x^1} - \frac{\partial P_1}{\partial x^2}\right) dx^1 dx^2 \tag{37}$$

$$d(P_1 dx^2 dx^3 + P_2 dx^3 dx^1 + P_3 dx^1 dx^2) =$$

$$= \left(\frac{\partial P_1}{\partial x^1} + \frac{\partial P_2}{\partial x^2} + \frac{\partial P_3}{\partial x^3}\right) dx^1 dx^2 dx^3 \tag{38}$$

$$d(P_1 dx^2 + P_2 dx^1) = (\frac{\partial P_1}{\partial x^1} - \frac{\partial P_2}{\partial x^2}) dx^1 dx^2 \qquad (39)$$

Como ya se ha señalado, emplearemos solamente, en esta ocasión, procedimientos heurísticos que luego formalizaremos.

Si suponemos en (37) que $P_2 = P_3 = 0$, resulta

$$d(P_1 dx^1) = P_{13} dx^3 dx^1 - P_{12} dx^1 dx^2 \qquad (40)$$

en donde, a fin de simplificar la escritura hemos adoptado la notación P_{ij} para designar a la derivada parcial $\partial P_i/\partial x^j$.

Por otra parte, la fórmula (11) permite escribir

$$dP_1 = P_{11} dx^1 + P_{12} dx^2 + P_{13} dx^3 \quad ,$$

y por tanto, procediendo de manera formal,

$$dP_1 dx^1 = P_{11} dx^1 dx^1 + P_{12} dx^2 dx^1 + P_{13} dx^3 dx^1 \ . \qquad (41)$$

No existe en este momento razón suficiente para suponer que los primeros miembros de (40) y (41) sean idénticos. Sin embargo, el hecho de que dx^1, como lo establece la relación (7) es una aplicación que toma en cada punto de $\mathbb{R}^3$ un valor constante perteneciente a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, nos sugiere la posibilidad de tratar a dx^1, así como a las demás diferenciales de las funciones coordenadas, como si fueran constantes en el conjunto de los polinomios que estamos considerando. En consecuencia, la clásica relación $d(cf) = cdf$, donde c es constante, nos induce a aceptar la relación

$$d(P_1 dx^1) = dP_1 dx^1 \qquad (42)$$

y todas las demás análogas a ésta. Esto supuesto, las relaciones (40) y (41) permiten escribir

$$P_{11} dx^1 dx^1 + P_{12} dx^2 dx^1 + P_{13} dx^3 dx^1 = P_{13} dx^3 dx_1 - P_{12} dx^1 dx^2 ,$$

de donde se deduce

$$P_{11}dx^1dx^1 + P_{12}(dx^2dx^1 + dx^1dx^2) = 0.$$

Puesto que esta relación debe cumplirse independientemente de los valores que puedan atribuirse a las funciones P_{11} y P_{12}, resulta natural admitir que el producto de las diferenciales, que aún no hemos definido, deba cumplir las propiedades

$$\begin{aligned} dx^1dx^1 &= 0 \\ dx^1dx^2 &= -dx^2\,dx^1 \end{aligned} \qquad (43)$$

la primera de las cuales es consecuencia de la segunda cuando, como estamos suponiendo, se admite la validez de las reglas usuales del cálculo algebraico.

Si en la relación (38) suponemos que es $P_2 = P_3 = 0$ resulta que

$$d(P_1dx^2dx^3) = (\frac{\partial P_1}{\partial x^1}dx^1)dx^2dx^3 = dP_1dx^2dx^3 . \qquad (44)$$

Por tanto debemos aceptar esta relación y las análogas que se obtienen de (38) de manera semejante. Puede observarse ya en (42) y (44) una regla de diferenciación suceptible de ser generalizada.

La aplicación de las fórmulas (42), (43) y (44) supuesto desde luego que el operador *d opera aditivamente* sobre los polinomios (es decir que el resultado de aplicarlo a una suma de polinomios es igual a la suma de los resultados de aplicarlo a cada uno de los sumandos y que se cumplen las reglas del cálculo algebraico elemental, a excepción de la conmutatividad del producto), permite comprobar fácilmente que se cumplen las relaciones (37), (38) y (39), y que, en esa forma, (1), (2) y (3) toman la forma (14).

Apéndice 2

La base del espacio $A_r(\mathbb{R}^n)$

Si f es una función *r-lineal* alternada definida en $\mathbb{R}^n$ y

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \xi_i^j e_j \ , \ i = 1,\dots,r$$

son r vectores de $\mathbb{R}^n$ cualesquiera expresados mediante la base canónica $\{e_i\}$ de ese espacio, se tiene

$$f(x_1,\dots,x_r) = f\Big(\sum_{j=1}^{n} \xi_1^j e_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} \xi_r^j e_j\Big)$$

$$= \sum_K \xi_1^{k_1} \dots \xi_r^{k_r} f(e_{k_1}, \dots, e_{k_r})$$

donde la suma se extiende a todas las r-tuplas

$$K = \{k_1,\dots,k_r\} \subset I_n \ .$$

Se puede escribir entonces

$$f(x_1,\dots,x_r) = \sum_J \sum_\sigma \xi_1^{j_{\sigma(1)}} \dots \xi_r^{j_{\sigma(r)}} f(e_{j_{\sigma(1)}}, \dots, e_{j_{\sigma(r)}}) \ ,$$

donde la primera suma se extiende a todos los subconjuntos ordenados $J = \{j_1 < \dots < j_r\} \subset I_n$, y la segunda a todas las permutaciones σ de los números $1,\dots,r$.

Si escribimos $e_{j_{\sigma(i)}} = u_i$, entonces puesto que

$$\mathcal{E}(\sigma^{-1}) = \mathcal{E}(\sigma) \ ,$$

$$f(e_{j_{\sigma(1)}}, \dots, e_{j_{\sigma(r)}}) = f(u_1,\dots,u_r) = \mathcal{E}(\sigma) f(u_{\sigma^{-1}(1)},\dots,u_{\sigma^{-1}(r)})$$

$$= \mathcal{E}(\sigma) f(e_{j_1},\dots,e_{j_r}) \ .$$

Por consiguiente, teniendo en cuenta la fórmula (20),

$$f(x_1,\dots,x_r) = \sum_J f(e_{j_1},\dots,e_{j_r})\Big(\sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\xi^{j_{\sigma(1)}} \dots \xi^{j_{\sigma(r)}}\Big)$$

$$= \sum_J f(e_{j_1},\dots, e_{j_r}) \det \xi^J$$

$$= \sum_J f(e_{j_1},\dots, e_{j_r})\, \Phi_r^J(x_1,\dots,x_r) ,$$

donde la suma se extiende a todos los conjuntos $J = \{j_1<\dots<j_r\}$ contenidos en el conjunto $I_n = \{1,\dots,n\}$. Se deduce de allí que

$$f = \sum_J f(e_{j_1},\dots, e_{j_r})\Phi_r^J .$$

Por tanto las $\binom{n}{r}$ funciones Φ_r^J generan a $A_r(\mathbb{R}^n)$. Podemos probar ahora que son linealmente independientes y que por tanto constituyen una base de dicho espacio.

Supongamos que tiene lugar la relación

$$\sum_J \lambda_J \Phi_r^J = 0 \quad , \quad \lambda_J \in \mathbb{R}.$$

La matriz $n \times r$ del conjunto de los vectores $e_{j_1},\dots, e_{j_r}$ de base canónica $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^n$ es

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta^1_{j_1} & \dots & \delta^1_{j_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta^n_{j_1} & \dots & \delta^n_{j_r} \end{bmatrix}$$

cuyos términos son símbolos de Kronecker. Se tiene entonces $\det \delta^J = 1$ y $\det \delta^K = 0$ para $K \neq J$ y por consiguiente

$$0 = \Big(\sum_K \lambda_K \Phi_r^K\Big)(e_{j_1},\dots,e_{j_r}) = \sum_J \lambda_K \Phi_r^K(e_{j_1},\dots,e_{j_r}) = \sum_K \lambda_K \det \delta^K = \lambda_J ,$$

de donde resulta que las funciones Φ_r^J son linealmente independientes. ▪

Apéndice 3

El producto exterior de formas lineales

Según vimos en la Segunda Parte, las formas lineales $\pi^1,\dots,\pi^n$ constituyen la base canónica del espacio $A_1(E) = L(\mathbb{R}^n)$ de las funciones lineales definidas sobre $E = \mathbb{R}^n$, y los elementos Φ_r^J de la base canónica de $A_r(E)$ se expresan en la forma

$$\Phi_r^J = \pi^{j_1} \wedge \dots \wedge \pi^{j_r} .$$

Por consiguiente, la fórmula (22) permite escribir

$$[(\pi^{j_1} \wedge \dots \wedge \pi^{j_r}) \wedge (\pi^{k_1} \wedge \dots \wedge \pi^{k_s})](x_1,\dots,x_{r+s}) =$$

$$= (\pi^{j_1} \wedge \dots \wedge \pi^{j_r} \wedge \pi^{k_1} \wedge \dots \wedge \pi^{k_s})(x_1, \dots, x_{r+s}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \xi_1^{j_1} & \dots & \xi_{r+s}^{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{j_r} & \dots & \xi_{r+s}^{j_r} \\ \xi_1^{k_1} & \dots & \xi_{r+s}^{k_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{k_s} & \dots & \xi_{r+s}^{k_s} \end{vmatrix}$$

Sean

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_j^{(i)} \pi^j \quad , \; i = 1,\dots,s$$

s formas lineales cualesquiera. Se tiene entonces

$$(f_1 \wedge \dots \wedge f_s)(x_1, \dots, x_s) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{(1)} \pi^j \wedge \dots \wedge \sum_{j=1}^{n} a_j^{(s)} \pi^j\right)(x_1, \dots, x_s)$$

$$\sum_{j_s=1}^{n} \dots \sum_{j_1=1}^{n} a_{j_s}^{(s)} \dots a_{j_1}^{(1)} (\pi^{j_1} \wedge \dots \wedge \pi^{j_s})(x_1, \dots, x_s) = \sum_{j_s=1}^{n} \dots \sum_{j_1=1}^{n} a_{j_s}^{(s)} \dots a_{j_1}^{(1)} \begin{vmatrix} \xi_1^{j_1} & \dots & \xi_s^{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{j_s} & \dots & \xi_s^{j_s} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_s=1}^{n} \dots \sum_{j_1=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{j_1}^{(1)} \xi_1^{j_1} & \dots & a_{j_1}^{(1)} \xi_s^{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j_s}^{(s)} \xi_1^{j_s} & \dots & a_{j_s}^{(s)} \xi_s^{j_s} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{j_1=1}^{n} a_{j_1}^{(1)} \xi_1^{j_1} & \dots & \sum_{j_1=1}^{n} a_{j_1}^{(1)} \xi_s^{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j_s=1}^{n} a_{j_s}^{(s)} \xi_1^{j_s} & \dots & \sum_{j_s=1}^{n} a_{j_s}^{(s)} \xi_s^{j_s} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_1(x_s) \\ \vdots & & \vdots \\ f_s(x_1) & \dots & f_s(x_s) \end{vmatrix}$$