Pro Mathematica: Vol. 1, No. 1, 1987

ALGEBRAS TOPOLOGICAS Y FISICA MATEMATICA

Julio Alcántara Bode (*)

An introductory survey is given of some developments in the field of topological algebras, that have been motivated by problems in Mathematical Physics.

Para estudiar sistemas cuánticos con un número finito N de grados de libertad se necesita encontrar $2N$ operadores auto-adjuntos $\{Q_k, P_k: 1 \leqslant k \leqslant N\}$ en un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ que obedezcan las relaciones de conmutación de Heisenberg *(RCH)*.

$$[Q_k, P_j] = i\delta_{kj}\ ,\ [Q_k, Q_j] = [P_k, P_j] = 0\ ,\ 1 \leqslant k,j \leqslant N$$

Vale la pena señalar que las RCH implican que los operadores $\{Q_k, P_k: 1 \leqslant k \leqslant N\}$ no pueden ser todos acotados (cuando $dim\ \mathcal{H} < \infty$ basta tomar la traza de la RCH para $k = j$).

(*) Profesor Auxiliar de la Sección Matemáticas - PUCP

Bajo ciertas hipótesis técnicas todas las representaciones irreducibles de las RCH son equivalentes (Teorema de Von Neumann). Una representación se dice que es irreducible si los únicos operadores acotados en $\mathcal{H}$ que conmutan con todos los $\{Q_k, P_k: 1 \leqslant k \leqslant N\}$ son multiplos del operador unidad. El Teorema de Von Neumann es consecuencia de la unicidad de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ (excepto por un factor de normalización, existe una única medida en $\mathbb{R}^N$ invariante bajo traslaciones).

Para sistemas infinito dimensionales el teorema de Von Neumann no se cumple. En primer lugar en espacios vectoriales infinito dimensionales no existen medidas no triviales invariantes bajo traslaciones. En segundo lugar para cierto tipo de espacios vectoriales infinito dimensionales, los llamados nucleares, existe un infinito no contable de medidas invariantes bajo traslaciones en un subespacio denso (medidas cuasi-invariantes). La prueba del teorema de Von Neumann depende solamente de la cuasi-invariancia de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$.

En la teoría de grupos de Lie el estudio de las propiedades comunes a todas las representaciones se efectua mediante algebras envolventes, que vienen a ser cuocientes de algebras tensoriales (ver [3]). Similarmente el estudio de las infinitas representaciones asociadas a sistemas infinito dimensionales se hace usando cierta clase de algebras topológicas.

Vale la pena mencionar que sistemas infinito dimensionales se estudian en Mecánica Estadística y en Teoría Cuantica de Campos. El uso de sistemas infinitos en Mecánica Estadística es una aproximación simplificativa, ya que sólo sistemas infinitos pueden sufrir transiciones de fase bien definidas. En Teoría Cuántica de Campos los sistemas infinitos son innatos.

Representaciones inequivalentes (no relacionadas por un operador unitario) se presentan en Mecánica Estadística para valores diferentes de la temperatura y/o el potencial químico, y en Teoría Cuántica de campos para valores diferentes de las cargas eléctrica, bariónica y/o leptónica.

Antes de comenzar nuestro estudio de álgebras topológicas haremos una breve digresión sobre espacios localmente convexos *elc.*

Una seminorma p en un espacio vectorial E es una aplicación $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) \quad \text{y} \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad x,y \in E \ , \quad \lambda \in C$$

un espacio vectorial E provisto de una familia de seminormas $\{p_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ que separa puntos ($\forall\ x \in E\ ,\ x \neq 0,\ \exists\ \alpha \in \Gamma$ tal que $p_\alpha(x) \neq 0$) se dice que es localmente convexo, si se le equipa con la topología menos fina para la cual todas las seminormas $\{p_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ son continuas.

Definición.- Una álgebra localmente convexa (a.l.c.) A es un *elc* en el cual están definidas dos operaciones adicionales : multiplicación e involución. La multiplicación se supone que es asociativa, distributiva con respecto a la suma y separadamente continua (las aplicaciones $g \rightarrow f \times g$ y $g \rightarrow g \times f$ son continuas $\forall\ f \in A$). También se postula que A tiene una unidad 1. La involución es continua y tiene las siguientes propiedades

$$(f + \lambda g)^* = f^* + \bar{\lambda} g^* \ ,\ (f \times g)^* = g^* \times f^* \ ,\ f^{**} = f \ , \quad f,g \in A \ ,\ \lambda \in C.$$

Introducimos una relación de orden $\leqslant$ en el conjunto $A_h = \{ f = f^* : f \in A \}$ de elementos hermitianos de A definiendo primero el cono positivo

$$A_+ = \{ \sum_{i=1}^{n} f_i^* \times f_i : f_i \in A, 1 \leqslant i \leqslant n , n \geqslant 1 \}$$

Diremos que $f \leqslant g$ si $g - f \in A_+$.

Es más conveniente trabajar con la clausura $\overline{A}_+$ de A_+ en lugar de A_+, ya que es $\overline{A}_+$ el que aparece en las condiciones necesarias y suficientes de teoremas.
Una a.l.c. A se dice que es propia si $\overline{A}_+ \cap -\overline{A}_+ = \{ 0 \}$.
Una seminorma p en una a.l.c. A se dice que es normal si $p(f + g) \geqslant p(g)$, $f,g \in A_+$. Más abajo daremos ejemplos de seminormas normales.

Teorema.- Una a.l.c. A es propia sii existe una familia de seminormas normales continuas que separan puntos.

Una funcional positiva T de una a.l.c. A es una funcional lineal continua ($T \in A'$) que toma valores no negativos en A_+ $(T(f) \geqslant 0$ si $f \in A_+)$.

Teorema.- Una a.l.c. es propia sii existe una familia de funcionales positivas que separa puntos.

Una álgebra topológica A tiene por definición las mismas propiedades que una a.l.c. excepto que su topología no proviene necesariamente de una familia de seminormas. Evidentemente conceptos y resultados para a.l.c. en los cuales la topología localmente convexa no juega ningún papel, también se aplica a álgebras topológicas.
Toda funcional positiva de una álgebra topológica A obedece la desigualdad de Cauchy-Schwarz (C.S)

$$| T(f^* \times g)|^2 \leqslant T(f^* \times f)T(g^* \times g) \qquad f,g \in A$$

De C.S. sigue que $T(1) = 0$ sii $T = 0$. Además se cumple que $T(f^*) = \overline{T(f)}$.

Las funcionales positivas normalizadas por la condición $T(1) = 1$ se denominarán estados.

A todo estado T de una algebra topológica A se le asocia una representación de A por operadores cerrables en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_T$ *(la construcción GNS, Gel'fand-Naimark– Segal)*: Si T es un estado entonces el conjunto $L_T = \{ f: T(f^* \times f) = 0, f \in A \}$ es un ideal izquierdo (usar CS). Denotando por $[f]_T$ la clase de equivalencia en $D_T \equiv A/L_T$ que contiene a f, introducimos un producto escalar en D_T por

$$([f]_T \, , \, [g]_T) \equiv T(f^* \times g).$$

Sea $\mathcal{H}_T$ el espacio de Hilbert obtenido conpletando D_T. A todo $f \in A$ asociamos un operador lineal $\pi_T(f)$ en $\mathcal{H}$ por

$$\pi_T(f)[g]_T = [f \times g]_T$$

(esta definición tiene sentido ya que por CS, $[g]_T = 0 \Rightarrow [f \times g]_T = 0$).

Los operadores $\{ \pi_T(f): f \in A \}$ son en general no acotados y por lo tanto no pueden ser definidos en todo $\mathcal{H}_T$ (teorema del grafo cerrado). Dentro de los operadores no acotados los menos patológicos resultan ser los cerrables, clase a la que pertenecen los operadores $\{ \pi_T(f): f \in A \}$: si $\{ X_\alpha \}$ es una red en D_T tal que $X_\alpha \to 0$ y $\pi_T(f)X_\alpha \to y$ entonces $y = 0$. Los operadores $\{\pi_T(f): f \in A \}$ forman una representación de A en el sentido que las siguientes igualdades se cumplen cuando se aplican a vectores en D_T

$$\pi_T(f + \lambda g) = \pi_T(f) + \lambda \pi_T(g) \; , \; \pi_T(f)\pi_T(g) = \pi_T(f \times g) \; ,$$

$$\pi_T(f^*) = \pi_T(f)^* \quad , \quad f,g \in A, \quad \lambda \in C$$

La construcción GNS muestra porque se necesita estudiar algebras topológicas cuando se tienen representaciones inequivalentes (diferentes estados dan lugar a representaciones inequivalentes y viceversa).

Si T_1 y T_2 son dos estados de una algebra topológica A entonces $T = \lambda T_1 + (1 - \lambda)T_2$ es un estado de A $\forall\ \lambda \in (0,1)$. Un estado T de una algebra topológica A se dice que es extremo si $T = \lambda T_1 + (1 - \lambda)T_2$, T_1 y T_2 estadis y $\lambda \in (0,1)$ implica que $T = T_1 = T_2$.

Antes de proseguir conviene recordar las definiciones de espacios nucleares y tonelados.

Un *elc* E se dice que es nuclear si para toda seminorma continua p existe una sucesión sumable de números positivos $\{\lambda_n\}_{n \geqslant 1}$ y una sucesión equicontinua de funcionales lineales $\{T_n\}$ $(|T_n(f)| \leqslant q(f))$ tal que

$$p(f) \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \lambda_n\ |T_n(f)| \qquad \forall\ f \in E.$$

Un *elc* E se dice que es tonelado si toda seminorma que es semicontinua inferiormente es continua.

Teorema.- Si A es una a.l.c. nuclear y T es un estado en A, entonces $\mathcal{H}_T$ es separable.

Teorema.- Si A es una a.l.c tonelada entonces

$$f \quad \to T(f^* \times f)^{1/2}$$

es una seminorma continua para todo estado T .
Por un argumento de polarización es posible mostrar que la aplicación $f \quad \to f^* \times f$ es continua sii la multiplicación

en A es conjuntamente continua $((f,g) \rightarrow f \times g$ es continua$)$. Más abajo daremos ejemplos que violan esta condición.

Teorema.- Sea A una a.l.c nuclear tal que para todo estado T, $f \rightarrow T(f^* \times f)^{1/2}$ es una seminorma continua. Entonces para todo estado T existe una aplicación débilmente medible de $[0,1]$ a los estados extremos de A, $\lambda \rightarrow T_\lambda$ y una medida de probabilidad $d\mu(\lambda)$ en $[0,1]$ tal que

$$T = \int T_\lambda \, d\mu \, (\lambda).$$

Esta descomposición no es en general única.

Una seminorma p de una álgebra topológica A se dice que es una seminorma C^* si

$$p(f^* \times f) = p(f)^2 \quad \text{y} \quad p(f \times g) \leqslant p(f)p(g)$$

Teorema.- Toda seminorma C^* es una seminorma normal (el concepto de seminorma normal tiene sentido para álgebras topológicas).

Una a.l.c. A se dice que es una álgebra C^* si su topología esta definida por una única seminorma C^* y es completa.

Un estado T de una álgebra topológica A se dice que es acotado si los operadores $\{\pi_T(f): f \in A\}$ de la representación GNS asociada son acotados. Si T es un estado acotado de una algebra topológica A entonces $f \rightarrow \|\pi_T(f)\|$, donde

$$\|\pi_T(f)\| = \sup_{g \in A} \, [T(g^* \times f^* \times f \times g)^{1/2} / T(g^* \times g)^{1/2}]$$

es una seminorma C^* en A,

Una seminorma p en una álgebra topológica A se dice que es multiplicativa si $p(f \times g) \leqslant p(f)p(g)$. Toda seminor–

ma C^* es multiplicativa.

Teorema.- Todo estado T de una álgebra topológica A dominado por una seminorma multiplicativa p

$$(|T(f)| \leqslant cp(f) \quad \forall f \in A)$$

es acotado.

Un estado T de una álgebra topológica A se dice que es un carácter si $dim\ \mathcal{H}_T = 1$.

Teorema.- Todo caracter de una algebra topológica es extremo y acotado.

Una álgebra topológica A se dice que es conmutativa o abeliana si $f \times g = g \times f \quad \forall f,g \in A$.

Teorema.- Todo estado extremo de una algebra C^* abeliana es un carácter.

Más tarde daremos ejemplos de álgebras abelianas que tienen estados extremos que no son caracteres. Para estos estados se tiene necesariamente que $dim\ \mathcal{H}_T = \infty$ y no son acotados.

Antes de introducir las álgebras usadas en teoría cuántica de campos y Mecánica Estadística necesitamos hacer una breve digresión sobre productos tensoriales topológicos.

Si E_1 y E_2 son dos *elc* es posible definir en $E_1 \otimes E_2$ por lo menos 5 topologias localmente convexas diferentes.

$$E_1 \otimes_\epsilon E_2 \leqslant E_1 \otimes_\pi E_2 \leqslant E_1 \otimes_\alpha E_2 \leqslant E_1 \otimes_\beta E_2 \leqslant E_1 \otimes_\iota E_2$$

($\leqslant$ significa que la topología en la derecha es más fina que la de la izquierda). En ciertos casos algunas de estas topologias coinciden.

$E_1 \otimes_\epsilon E_2 = E_1 \otimes_\pi E_2$ si E_1 y E_2 son nucleares.

$E_1 \otimes_\alpha E_2 = E_1 \otimes_\beta E_2 = E_1 \otimes_\iota E_2$. Si E_1 y E_2 son tonelados.

$E_1 \otimes_\pi E_2 = E_1 \otimes_2 E_2$. Si E_1 y E_2 son metrizables.

Un *elc* se dice que es Fréchet si es metrizable y completo. Todo espacio de Fréchet es tonelado. Para espacios de Fréchet nucleares las cinco topologías mencionadas arriba coinciden. Esta es una de las razones por la cual las álgebras que consideraremos se construirán en base a este tipo de espacio.

Un *elc* E se dice que es LF (respectivamente LB) si es la unión creciente de una sucesión de espacios de Fréchet (respectivamente de Banach)

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots , \qquad E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n ,$$

donde E_{n+1} induce la topología original en E_n y E esta equipado con la topologia más fina que induce en cada E la topología original.

Si E es un espacio LF- nuclear equipado con una involución continua definimos el álgebra BU (Borchers, Uhlmann) basada en E como

$$\underline{E} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \overline{\otimes}^n E$$

donde $\overline{\otimes}^n E$ es la compleción de $\otimes_\iota^n E$ y por convención $\overline{\otimes}^o E = C$. Los elementos de $\underline{E}$ son cadenas infinitas

$$\underline{f} = (f_o , f_1 , \ldots , f_n , 0, 0 , \ldots)$$

donde a lo más un número finito de entradas son no nulas. La multiplicación en $\underline{E}$ está definida por

$$\underline{f} \times \underline{g} = (f_o g_o, f_o g_1 + f_1 g_o, \ldots, \sum_{k=0}^{l} f_k \otimes g_{l-k}, \ldots, f_n \otimes g_m, 0, \ldots)$$

$$(\underline{g} = (g_o, g_1, \ldots , g_m, 0,0,\ldots))$$

La involución está definida en $\otimes^n E$ por

$$(f^1 \otimes ... \otimes f^n)^* = f^{n*} \otimes ... \otimes f^{1*}$$

y se extiende por linealidad y continuidad a todo $\underline{E}$

$$\underline{f}^* = (\overline{f_o}\ , f_1^*\ , f_2^*\ ,...,\ f_n^*\ , 0,\ 0,\ ...\ )$$

Una álgebra I^*A es una a.l.c. que tiene una topología nuclear LF y cuyo cono positivo $\overline{A}_+$ es propio

$$(\overline{A}_+ \cap -\overline{A}_+ = \{0\}\ )$$

Teorema.- Toda álgebra BU es una álgebra I^* propia.

Teorema.- La multiplicación en una álgebra BU $\underline{E}$ es conjuntamente continua sii E es un espacio LB.

Teorema.- Toda algebra I^* es el cuociente de una álgebra BU por un ideal $*$ invariante positivo

$$(\ \sum_{i=1}^{n} \underline{f}_i^* \times \underline{f}_i \in I \Rightarrow \underline{f}_i \in I\ ,\ 1 \leqslant i \leqslant n\ )$$

Ejemplos.

a) Cuando $E = S(\mathbb{R}^n)$ y $f^*(x) \equiv \overline{f(x)}$, $\underline{E}$ es usada para formular la Teoría Cuántica de Campos de Wightman de un campo escalar neutro en un espacio $-$tiempo de dimensión n.

b) Cuando $E = D(\mathbb{R}^n) \oplus D(\mathbb{R}^n)$ y $(f,g)^* = (\overline{g}\ ,\ \overline{f})$, $\underline{E}$ es usada para formular la Mecánica Estadística Cuántica de un número infinito de bosones o fermiones en un espacio n-dimensional.

Propiedades de álgebras BU

$\overline{\underline{E}}_+ = \{\ \sum_{i=1}^{\infty} \underline{f}_i^* \times \underline{f}_i\ :\ \underline{f}_i \in \underline{E}\ \}$. Este resultado es no trivial ya que una álgebra BU es nunca metrizable. Los intervalos de orden $[g,f] = \{h: g \leqslant h \leqslant f,\ g,h,f \in \underline{E}_h\}$ son compactos.

$\underline{\overline{E}}_+$ es la cápsula convexa cerrada de sus rayos extremos (en infinitas dimensiones existen conos que no tienen rayos extremos).

Una funcional positiva T se dice que es estrictamente positiva si $T(f) > 0 \quad \forall f \in \overline{A}_+ \quad , f \neq 0$. Una álgebra BU $\underline{E}$ tiene una funcional estrictamente positiva sii E tiene una norma continua (una norma es una seminorma que sólo se se anula en el vector nulo) (ver [1] , [2]).

Sea I el más pequeño ideal cerrado generado por todos los conmutadores de una álgebra BU. Entonces $\underline{E}/I$ es una álgebra I^* propia abeliana, la denominada álgebra tensorial simétrica $\underline{E}_S$.

Si $dim\ E \geqslant 2$, $\underline{E}_S$ tiene estados extremos que no son caracteres. Esto se debe a que existen polinomios positivos en dos o más variables que no son la suma de cuadrados de otros polinomios (polinomios de Hilbert), por ejemplo

$$x^2y^2(x^2 + y^2 - 1) + 1.$$

Los caracteres de $\underline{E}_S$ están en correspondencia biunívoca con los elementos de E'.

En Teoría Cuántica de Campos mediante un proceso de continuación analítica a todo estado de $\underline{S(\mathbb{R}^n)}$ que obedece los axiomas de Wightman se le asocia cierto tipo de funcional lineal en $\underline{S(\mathbb{R}^n)}_S$, no necesariamente positivo y viceversa. Si la funcional positiva en $\underline{S(\mathbb{R}^n)}_S$ es de la forma

$$\int_{S(\mathbb{R}^n)'} x\, d\mu(x)$$

donde $d\mu(x)$ es una medida positiva en el conjunto de caractéres $S(\mathbb{R}^n)$ entonces se puede usar métodos de la Mecánica Estadística Clásica para construir funcionales positivas en $\underline{S}(\mathbb{R}^n)$ que obedecen los axiomas de Wightman ($n = 2,3$, Teoría Constructiva de Campos) (ver [4]).

La teoría que uno recobre en $\underline{S}(\mathbb{R}^n)$ si la medida es positiva es invariante bajo la inversión temporal, que como se sabe no es una ley de la Naturaleza. Por esta razón para el estudio del denominado problema de momentos nucleares uno busca condiciones necesarias y suficientes para que una funcional lineal $\underline{S}_s(\mathbb{R})$ sea una integral sobre caractéres.

Una condición necesaria y suficiente es que la funcional lineal debe de ser contínua con respecto a una topología estrictamente menos fina que la original. Esta es la topología más fina dentro de las menos finas que la original, para las cuales la multiplicación es conjuntamente continua. Además la medida es positiva sii la funcional lineal es positiva en todos los polinomios positivos.

En mecánica Estadística la dinámica se obtiene especificando una derivación * - antisimétrica δ en una cierta a.l.c. A, es decir una aplicación lineal $\delta: A \to A$ tal que

$$\delta(f \times g) = \delta(f) \times g + f \times \delta(g) , \quad \delta(f)^* = -\delta(f^*)$$

Por simplicidad suponemos que $dom\ \delta = A$ y que δ es continua; resultados análogos se obtienen para derivaciones cerrables densamente definidas.

Un estado T de A se dice que es δ estacionario si

$$T(\delta(f)) = 0 \qquad \forall f \in A$$

Teorema.- Si T es un estado δ estacionario en A entonces existe un operador simétrico H_T en $\mathcal{H}_T$ con dominio igual a D_T tal que

$$\pi_T[\delta(f)][g]_T = [H_T, \pi_T(f)][g]_T \quad \forall f \in A, \forall [g]_T \in D_T$$

Dentro de los estados estacionarios los de interés para la Mecánica Estadística de equilibrio son los que obedecen la desigualdad de Sewell

$$-\beta T(\delta(f^*) \times f) \geqslant T(f^* \times f) ln [T(f^* \times f)/T(f \times f^*)] \quad \forall f \in A$$

donde $\beta = (k \times \text{temperatura absoluta})^{-1}$

k = constante de Boltzmann

Referencias

[1] *J. Alcántara,* "Order Properties of a Class of Tensor Algebras" Publ. RIMS, Kyoto Univ. 18 (1982) 539-550

[2] *J. Alcántara , D. A. Dubin,* "I*-Algebras and their Applications", Publ. RIMS, Kyoto Univ. 17 (1981) 179-199.

[3] *J. Dixmier,* "Algèbres Enveloppantes", (Gauthier-Villars, Paris, 1974).

[4] *J. Glimm & A. Jaffe,* "Quantum Physics", (Springer, New York, 1981).