Pro Mathematica: Vol. 1, No. 1, 1987

REPRESENTACION DE RETICULOS BOOLEANOS

Teódulo I. Verástegui Ch. (*)

Introducción.

En el libro de Burton ([5]) se demuestra el Teorema de Representación de Stone, estableciendo un isomorfismo entre un anillo booleano y un sub anillo del anillo de subconjuntos de un conjunto dado. Sin embargo, en Atiyah ([1]) se plantea como ejercicio demostrar otra versión de este teorema, estableciendo un isomorfismo entre un retículo booleano y el retículo de los subconjuntos abiertos y cerrados de algún espacio topológico de Hausdorff (a construir). En este artículo presento la solución de tal problema en base a ejercicios anteriores planteados en [1].

Definición 1. Sea A un anillo con unidad 1. Se dice que A es un *anillo booleano* si todos sus elementos son idempotentes; es decir, $\forall\, a \in A,\ a^2 = a$.

De la definición anterior, si A es un anillo booleano, para a y b en A se tiene: $(a + b)^2 = a + b$. De aquí: $ab + ba = 0$. Pero $a + a = (a + a)^2 = a + a + a + a$; osea: $a + a = 0$. Luego: $a = -a,\ \forall\, a \in A$. Por lo tanto, de $ab + ba = 0$ se tiene: $ab = ba,\ \forall\, a$ y b en A; es decir: un anillo booleano A es conmutativo.

(*) Profesor Asociado de la Sección Matemáticas - PUCP

Existen diversas propiedades que caracterizan a los anillos booleanos. Entre otras tenemos:

Proposición 1. Si A es un anillo booleano e I es un ideal de A, se cumplen:

i) Si I es finitamente generado, entonces I es un ideal principal.

ii) I es un ideal primo $\Leftrightarrow$ I es un ideal maximal
$\Leftrightarrow$ $\forall\, a \in A$, $a \in I$ ó $1 + a \in I$, una y sólo una.

Demostración.

i) Sea I un ideal finitamente generado por $a_1, a_2, \ldots, a_r$ en A; o sea: $I = \langle a_1, a_2, \ldots, a_r \rangle$

Considerando inducción sobre r:

Para $r = 2$, $I = \langle a_1, a_2 \rangle$. Luego: $a_1 + a_2 + a_1a_2 \in I$, es decir: $\langle a_1 + a_2 + a_1a_2 \rangle \subset I$. También se tienen:

$$a_1(a_1 + a_2 + a_1a_2) \in \langle a_1 + a_2 + a_1a_2 \rangle \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned} a_1(a_1 + a_2 + a_1a_2) &= a_1^2 + a_1a_2 + a_1^2a_2 \\ &= a_1 + a_1a_2 + a_1a_2 = a_1, \end{aligned}$$

pues A es anillo booleano. Por lo tanto:

$$a_1 \in \langle a_1 + a_2 + a_1a_2 \rangle.$$

Análogamente se tiene que $a_2 \in \langle a_1 + a_2 + a_1a_2 \rangle$. Luego:

$$\langle a_1, a_2 \rangle \subset \langle a_1 + a_2 + a_1a_2 \rangle \text{ ; es decir:}$$

$I = \langle a_1 + a_2 + a_1a_2 \rangle$ es un ideal principal generado por $a = a_1 + a_2 + a_1a_2$.

Si para $r > 2$, supongamos que $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{r-1} \rangle = \langle b \rangle$ para algún $b \in A$.

Si $I = \langle a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_r \rangle$ se tiene:

$$\alpha \in I \Leftrightarrow \alpha = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_i \ , \text{ con } \alpha_i \in A \text{ para } i = 1,2,\ldots,r$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i a_i + \alpha_r a_r = \beta b + \alpha_r a_r \ , \text{ con } \beta \in A$$

$$\Leftrightarrow \alpha \in \langle b \ , a_r \rangle \ , \text{ pues } \beta b \in \langle a_1, a_2,\ldots,a_{r-1} \rangle \ .$$

Luego, considerando el caso inicial $r = 2$, si $I = \langle b, a_r \rangle$ se tiene: $I = \langle c \rangle$, para algún $c \in A$. Por lo tanto: I es ideal principal.

ii) Sea I un ideal primo de A. Para un ideal J de A tal que $I \subsetneq J \subset A$, existe $a \in J$ y $a \notin I$, con $a \neq 0$. Como $1-a \in A$, se tiene que $a(1 - a) = a - a^2 = 0 \in I$, pues A es un anillo booleano. Por ser I un ideal primo y $a \notin I$, de $a(1-a) \in I$, se tiene que $1 - a \in I \subset J$. Luego $a+(1-a) = 1 \in J$; es decir: $J = A$. De aqui: I es un ideal de A.

Considerando I un ideal maximal de A, sea $a \in A$. Si $a = 0$ entonces $a \in I$ y $1 + a = 1 \notin I$. Si $a \neq 0$, suponiendo que $a \in I$ y $1 + a \in I$. Entonces $a + (1 + a) = 1 \in I$, o sea $I = A$, que contradice a que I es ideal maximal de A. Luego, para $a \in A$, se cumple: $a \in I$ o $1 + a \in I$, pero no ambos.

Finalmente, si para $a \in A$ e I un ideal de A se cumple una y sólo una de: $a \in I$ o $1 + a \in I$. Es suficiente mostrar que I es un ideal maximal de A para asegurar que I es un ideal primo de A, pues por ser A un anillo booleano, A es un anillo conmutativo y tiene unidad.

En efecto: si $a \in I$ y $1 + a \notin I$, sea $M = \langle I, 1 + a \rangle$ el menor ideal que contiene a I y $1 + a$. Entonces:

$$a + (1 + a) = 1 \in M, \text{ o sea : } M = A;$$

por lo que I es un ideal maximal de A.

También, si $a \notin I$ y $1 + a \in I$, sea $M' = \langle I, a \rangle$. Entonces: $(1 + a) + a = 1 \in M'$.

De aquí: $M' = A$. Luego, I es un ideal maximal de A.

Definición. 2.- Sea L un conjunto parcialmente ordenado por $\leqslant$. Se dice que L es un *retículo* si para a y b en L existen el ínfimo y el supremo de dichos elementos, que denotamos por

$$Inf\ \{a, b\} = a \wedge b \quad \text{y} \quad sup\ \{a, b\} = a \vee b\ ,$$

respectivamente.

Si además se cumplen:

i) L admite elemento máximo y elemento mínimo, que denotamos por 1 y 0, respectivamente;

ii) Para cada $a \in L$ existe un único $a' \in L$, llamado el complemento de a, tal que:

$$a \vee a' = 1 \quad \text{y} \quad a \wedge a' = 0\ ; \quad \text{y}$$

iii) Para a, b y c en L, se cumplen:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \qquad \text{y}$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)\ ,$$

se dice que L es un *retículo booleano.*

Un resultado que relaciona a los anillos booleanos y a los retículos booleanos, es el siguiente:

Teorema 1. Todo anillo booleano es un retículo booleano, y recíprocamente.

Demostración.

Sea A un anillo booleano. En A definimos la relación $\leqslant$ por:

$$a \leqslant b \Leftrightarrow ab = a.$$

Veamos que A, con el orden parcial $\leqslant$, es un retículo booleano:

a) $\leqslant$ es un orden parcial en A:

i) Como $aa = a$, $\forall a \in A$, se tiene: $a \leqslant a$, $\forall a \in A$.

ii) Si $a \leqslant b$ y $b \leqslant a$, entonces: $ab = a$ y $ba = b$, y siendo A un anillo conmutativo, se tiene que $a = b$.

iii) Si $a \leqslant b$ y $b \leqslant c$. Entonces: $ab = a$ y $bc = b$. Luego:

$$ac = (ab)c = a(bc) = ab = a \;;$$

es decir: $a \leqslant c$.

b) En A definimos:

$$a \vee b = a + b + ab \;,\; a \wedge b = ab \quad \text{y} \quad a' = 1 - a \,.$$

Entonces: para $\leqslant$ en A, $sup\ \{a,\ b\} = a \vee b$,

$Inf\ \{a,\ b\} = a \wedge b$,

$a \vee a' = máx\ (A)$ y

$a \wedge a' = mín\ (A)$.

En efecto:

$$a(a \vee b) = a(a + b + ab) = a + ab + ab = a;$$

es decir: $a \leqslant a \vee b$. Análogamente se tiene que

$$b \leqslant a \vee b,.$$

Además, si $c \in A$ es tal que $a \leqslant c$ y $b \leqslant c$, o sea $ac = a$ y $bc = b$, se tiene:

$$(a \vee b)c = (a + b + ab)c = ac + bc + abc$$
$$= a + b + ab = a \vee b \;;$$

es decir $a \vee b \leqslant c$. Luego: $a \vee b = sup\ \{a,\ b\}$.

Por un proceso similar se tiene:

$$a \wedge b \leqslant a \quad , \quad a \wedge b \leqslant b,$$

y si $d \in A$ tal que $d \leqslant a$ y $d \leqslant b$, entonces

$$d \leqslant a \wedge b;$$

es decir: $a \wedge b = Inf\ \{a,\ b\}$.

También, para $a' = 1 - a$, se tiene:

$$a \vee a' = a + a' + aa' = a + (1 - a) + a(1 - a)$$
$$= 1 + a - a^2 = 1 \in A;$$
$$a \wedge a' = aa' = a(1 - a) = a - a^2 = 0 \in A .$$

Además, como $a.1 = a$ y $a.0 = 0$; $\forall a \in A$, se tiene: $a \leqslant 1$ y $0 \leqslant a$; es decir:

$$1 = \text{máx } A \quad \text{y} \quad 0 = \text{mín } A \text{ , para } \leqslant .$$

Finalmente:

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a + b + ab)(a + c + ac)$$
$$= a^2 + ac + a^2c + ba + bc$$
$$+ bac + aba + abc + abac$$
$$= a + bc + abc = a \vee (b \wedge c);$$

y también: $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c)$.

En consecuencia, A con el orden $\leqslant$ es un retículo booleano.

Recíprocamente: Sea L un retículo booleano, con un orden parcial $\leqslant$, tal que para a y b en L existen

$$a \vee b \text{ , } a \wedge b \text{ y } a' .$$

En L definimos las operaciones $+$ y $\cdot$ por:

$$a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b) \quad \text{y} \quad a.b = a \wedge b.$$

Entonces: L con $+$ y $\cdot$ es una anillo booleano; en donde si $0 = \text{mín } L$ y $1 = \text{máx } L$ se tiene:

$$a.1 = a \wedge 1 = a \text{ , } \forall a \in L \quad \text{y}$$
$$a + 0 = (a \wedge 0') \vee (a' \wedge 0) = (a \wedge 1) \vee 0$$
$$= a \wedge 1 = a \text{ ; } \forall a \in L.$$

Además: $\forall a \in A$, $a + a = (a \wedge a') \vee (a' \wedge a)$
$$= 0 \vee 0 = 0;$$

es decir: $a = -a$;

$a(bc) = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = (ab)c$, para a, b y c en L.

$$
\begin{aligned}
ab + ac &= (a \wedge b) + (a \wedge c) \\
&= [(a \wedge b) \wedge (a \wedge c)'] \vee [(a \wedge b)' \wedge (a \wedge c)] \\
&= [(a \wedge b) \wedge (a' \vee c')] \vee [(a' \vee b') \wedge (a \wedge c)] \\
&= [(a \wedge b \wedge a') \vee (a \wedge b \wedge c')] \vee [(a' \wedge a \wedge c) \vee (b' \wedge a \wedge c)] \\
&= [0 \vee (a \wedge b \wedge c')] \vee [0 \vee (b' \wedge a \wedge c)] \\
&= (a \wedge b \wedge c') \vee (b' \wedge a \wedge c) \\
&= a \wedge [(b \wedge c') \vee (b' \wedge c)] \\
&= a(b + c) \; ; \text{ y}
\end{aligned}
$$

$\forall\ a \in A,\ a^2 = aa = a \wedge a = a$.

En consecuencia: L con $+$ y $\cdot$ es un anillo booleano.

El Teorema anterior permite identificar, unívocamente , un anillo booleano con un retículo booleano. Para esta - blecer el isomorfismo entre un retículo booleano, que es un anillo booleano, y el retículo de los subconjuntos abiertos y cerrados de un espacio topológico de Hausdorff , hay que definir a dicho espacio topológico. Para esto:

Dada un anillo A , conmutativo y con unidad, conside- remos el conjunto de todos los ideales primos P de A, con $P \neq A$:

$$Spec\ (A) = \{P \ / \ P \text{ es ideal primo de } A\}$$

al que llamaremos el *Espectro Primo de A;* y para $E \subset A$, se define el subconjunto $V(E)$ de $Spec\ (A)$, por:

$$V(E) = \{P \in Spec\ (A) \ / \ E \subset P\}.$$

El conjunto $Spec\ (A)$ constituye un *Espacio topológico,* cuya topología está definida por los subconjuntos $V(E)$, para $E \subset A$, que satisfacen las condiciones de *conjuntos cerrados* para $Spec\ (A)$, como veremos a continuación:

Lema 1. Sea A un anillo conmutativo con unidad. Para $E \subset A$, sea $I = < E >$ el ideal de A generado por E. Entonces:

$$V(E) = V(I)$$

Demostración.

Sea $P \in V(I)$. Entonces: $I \subset P$. Como $I = < E >$, se tiene $E \subset I \subset P$, o sea: $E \subset P$. Luego: $P \in V(E)$. Por tanto:

$$V(I) \subset V(E) \ .$$

Recíprocamente, si $P \in V(E)$ se tiene $E \subset P$, y por ser

$$I = < E >$$

el menor ideal de A que contiene a E y como P es un ideal de A tal que $E \subset P$, se concluye que $I \subset P$; es decir:

$$P \in V(I) \ .$$

Luego: $\qquad V(E) \subset V(I)$.

En consecuencia $\qquad V(I) = V(E)$

Proposición 2. Para un anillo conmutativo con unidad 1, A; los subconjuntos $V(E)$ de $Spec\ (A)$, para $E \subset A$ satisfacen las condiciones de conjuntos cerrados para una topología sobre $Spec\ (A)$; es decir, se cumplen:

i) $Spec\ (A)$ y ϕ son conjuntos cerrados de la topología;

ii) La intersección de una familia cualquiera de cerrados, es cerrado; y

iii) La reunión finita de cerrados, es cerrado.

Demostración.

i) Para todo ideal primo P de A se tiene $\{0\} \subset P$. De aquí:

$\forall P \in Spec\ (A)$, $\{0\} \subset P$; es decir $P \in V(\{0\})$. Luego: $V(\{0\}) = Spec\ (A)$; o sea: $Spec\ (A)$ es un conjunto cerrado. También, como $P \neq A$, $\forall\ P \in Spec\ (A)$, se tiene que $1 \notin P$. Luego: $V(\{1\}) = \phi$; es decir: ϕ es un conjunto cerrado;

ii) Sea $\{E_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de subconjuntos de A; o sea: $E_\alpha \subset A$, $\forall \alpha \in J$. Se afirma:

$$V\left(\bigcup_{\alpha \in J} E_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in J} V(E_\alpha) .$$

En efecto: $P \in V(\bigcup_{\alpha \in J} E_\alpha) \Leftrightarrow \bigcup_{\alpha \in J} E_\alpha \subset P$

$$\Leftrightarrow E_\alpha \subset P\ ;\ \forall \alpha \in J$$

$$\Leftrightarrow P \in V(E_\alpha)\ ,\ \forall\ \alpha \in J$$

$$\Leftrightarrow P \in \bigcap_{\alpha \in J} V(E_\alpha)$$

De aquí: la intersección cualquiera de conjuntos cerrados $\bigcap_{\alpha \in J} V(E_\alpha)$, es un conjunto cerrado $V(\bigcup_{\alpha \in J} E_\alpha)$.

iii) Por el Lema 1, es suficiente considerar los conjuntos $V(I)$ y $V(J)$, para I y J ideales de A. Se afirma:

$$V(I) \cup V(J) = V(I \cap J).$$

En efecto: $I \cap J \subset I$ y $I \cap J \subset J$. Luego:

$$V(I) \subset V(I \cap J) \quad \text{y} \quad V(J) \subset V(I \cap J) .$$

Por lo que: $V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J)$.

Por otro lado, si $V(I \cap J) \not\subset V(I) \cup V(J)$, entonces existe $P \in Spec\ (A)$ tal que

$$P \in V(I \cap J) \quad \text{y} \quad P \notin V(I) \cup V(J)\ ;$$

es decir: $I \cap J \subset P$, $I \not\subset P$ y $J \not\subset P$. Luego existen $a \in I$ tal que $a \notin P$ y $b \in J$ tal que $b \notin P$; y como P es ideal primo de A se tiene que $ab \notin P$ y $ab \in I \cap J$; que contradice a que $I \cap J \subset P$.

Luego: $V(I \cap J) \subset V(I) \cup V(J)$

$$\therefore \ V(I) \cup V(J) = V(I \cap J) .$$

De la proposición anterior, formalizamos la siguiente:

Definición 3.- La topología definida por los conjuntos cerrados $V(E)$, para $E \subset A$, siendo A un anillo conmutativo con unidad, sobre $Spec\ (A)$, se llama la *Topología de Zariski* o *Topología Espectral sobre* A.

En la topología Espectral sobre A, los *conjuntos abiertos* son los complementos de los cerrados $V(E)$, para $E \subset A$. Según esto, para $a \in A$, el subconjunto:

$$X_a = Spec\ (A) - V(\{a\}) = \{P \in Spec\ (A)\ /\ a \notin P\}$$

es un conjunto abierto de la topología espectral. Estos con - juntos abiertos, para cada $a \in A$, satisfacen la siguiente:

Proposición 3.- La familia $\mathcal{B} = \{ X_a \ /\ a \in A \}$ constituye una *base* de conjuntos abiertos para la topología espectral sobre A; es decir:

i) $\phi \in \mathcal{B}$

ii) Si U es un abierto de $Spec\ (A)$ y $P \in U$, entonces existe $a_o \in A$ tal que $P \in X_{a_o}$ y $X_{a_o} \subset U$.

De aquí: Para $a \in A$, los conjuntos X_a se llaman *abiertos básicos ó abiertos distinguidos* de $Spec\ (A)$.

Demostración.

i) Como $V(\{0\}) = Spec\ (A)$, se tiene:

$$\phi = Spec\ (A) - V(\{0\}) = X_o \in \mathcal{B}$$

ii) Sea U un abierto de $Spec\ (A)$. Luego $Spec\ (A) - U$ es cerrado, o sea existe $E \subset A$ tal que

$$V(E) = Spec\,(A) - U \text{ . Pero } V(E) = V(\bigcup_{a \in E} \{a\})$$

$$= \bigcap_{a \in E} V(\{a\})$$

$$\subset V(\{a\}),\ \forall a \in E.$$

Si $P \in U$, entonces $P \notin V(E) = \bigcap_{a \in E} V(\{a\})$; o sea:

$P \notin V(\{a_0\})$, para algún $a_0 \in E$. De aquí: $P \in X_{a_0}$ y

$$V(E) \subset V(\{a_0\}) .$$

Como $V(E) = Spec\,(A) - U \subset V(\{a_0\})$, se tiene:

$$Spec\,(A) - V(\{a_0\}) \subset U;$$

. o sea: $X_{a_0} \subset U$; lo que completa la demostración.

ıa propiedad topológica de los conjuntos abiertos básicos y l propio espacio $Spec\,(A)$, siendo A un anillo conmutativo n unidad, es la cuasi-compacidad. Para presentar este resul- lo, consideremos:

ma 2.- Para I y J ideales de A, se cumplen:

$V(I) = V(r(I))$, donde $r(I) = \{x \in A \mid x^n \in I$ para $n \geq 1$ en $Z\}$ es el radical de I, que es la intersección de los ideales primos de A que contienen a I

$V(I) = V(J) \Leftrightarrow r(I) = r(J)$.

motración.

Como $I \subset r(I)$, para $n = 1$, se tiene: $V(r(I)) \subset V(I)$. También si $P \in V(I)$ entonces $I \subset P$. Siendo P ideal primo de A y como $r(I)$ es la intersección de los ideales primos de A que contienen a I, se tiene que $r(I) \subset P$, es decir: $P \in V(r(I))$. Luego: $V(I) \subset V(r(I))$.

Por lo tanto: $V(I) = V(r(I))$

ii) Si $r(I) \neq r(J)$, entonces existe $P \in Spec\,(A)$ tal que

$$I \subset P \quad \text{y} \quad J \not\subset P \quad \text{ó} \quad J \subset P \quad \text{y} \quad I \not\subset P.$$

De aquí se tiene: $V(I) \neq V(J)$.

Por otro lado, si $r(I) = r(J)$, por i) se tiene que

$$V(I) = V(J).$$

Proposición 4.- Si A es un anillo conmutativo con unidad, para cada $a \in A$, el conjunto abierto básico X_a, es cuasi-compacto; es decir, todo cubrimiento de abiertos para X_a admite un subcubrimiento finito. De aquí, como $1 \in A$, se tiene que $Spec\,(A) = X_1$ es cuasi-compacto.

Demostración.

Sea $\{U_j\}_{j \in J}$ un cubrimiento de abiertos para X_a, con $a \in A$ y cada U_j es conjunto abierto de $Spec\,(A)$. Como

$$\mathcal{B} = \{X_b \;/\; b \in A\}$$

es una base de conjuntos abiertos para la topología espectral, para cada $j \in J$ existe una familia

$$\{X_{a_\beta} \;/\; a_\beta \in A\}_{\beta \in I_j}$$

tal que $U_j = \bigcup_{\beta \in I_j} X_{a_\beta}$. Luego:

$$\bigcup_{j \in J} U_j = \bigcup_{j \in J} \Big(\bigcup_{\beta \in I_j} X_{a_\beta} \Big) = \bigcup_{\beta \in \bigcup_{j \in J} I_j} X_{a_\beta} \quad ; \text{ y como}$$

$X_a \subset \bigcup_{j \in J} U_j$, se tiene: $Spec\,(A) - \bigcup_{\beta \in \bigcup_{j \in J} I_j} X_{a_\beta} = Spec\,(A) - X_a$.

De aquí:

$$\bigcap_{\beta \in \bigcup_{j \in J} I_j} V(a_\beta) \subset V(\{a\})$$

Por ii) de la proposición 2 se tiene:

$$\bigcap_{\beta \in \bigcup_{j \in J} I_j} V(a_\beta) = V(\bigcup_{\beta \in \bigcup_{j \in J} I_j} \{a_\beta\}) = V(r(<\bigcup_{\beta \in \bigcup_{j \in J} I_j} \{a_\beta\}>))$$

$\subset V(r(<a>))$, según i) de Lema 2,

De aquí: $r(<a>) \subset r(<\bigcup_{\beta \in \bigcup_{j \in J} I_j} \{a_\beta\}>)$, o sea:

$$a \in r(<\bigcup_{\beta \in \bigcup_{j \in J} I_j} \{a_\beta\}>).$$

Luego, existe $n \geqslant 1$ en Z tal que $a^n \in <\bigcup_{\beta \in \bigcup_{j \in J} I_j} \{a_\beta\}>$; es decir, existe un conjunto finito $K \subset \bigcup_{j \in J} I_j$ tal que $a^n = \sum_{\beta \in K} b_\beta a_\beta$ con $b_\beta \in A$. Además se tiene:

$$\bigcap_{\beta \in K} V(a_\beta) = V(\bigcup_{\beta \in K} \{a_\beta\}) = V(<\bigcup_{\beta \in K} \{a_\beta\}>) \subset V(\{a^n\})$$
$$= V(\{a\}).$$

Por lo tanto: $X_a \subset \bigcup_{\beta \in K} X_{a_\beta}$, siendo K un conjunto finito.

Si para cada $\beta \in K$, sea U_β del cubrimiento dado tal que $X_{a_\beta} \subset U_\beta$, entonces: $X_a \subset \bigcup_{\beta \in K} U_\beta$; es decir $\{U_\beta\}_{\beta \in K}$ es un cubrimiento finito de X_a; o sea X_a es cuasi-compacto.

En particular, para $a = 1 \in A$, se tiene que $X_1 = Spec\ (A)$ es cuasi-compacto.

Considerando los resultados anteriores para un anillo booleano A, se tiene que todos los conjuntos abiertos de $Spec\ (A)$ son los básicos y éstos son también cerrados ; y

Spec (A) es un espacio de Hausdorff. Estos hechos están dados en la siguiente:

Proposición 5.- Para un anillo booleano A, se cumplen:

i) Si $a_1, a_2, \ldots, a_r$ son elementos de A, entonces existe $a_o \in A$ tal que $X_{a_1} \cup X_{a_2} \cup \ldots \cup X_{a_r} = X_{a_o}$

ii) Para cada $a \in A$, X_a es abierto y cerrado para la topología espectral de *Spec (A)*; y los X_a son los únicos abiertos y cerrados de *Spec (A)*.

iii) *Spec (A)* es un espacio topologíco de Hausdorff.

Demostración.

i) Como A es un anillo boolenao, por i) de la proposición 1, se tiene:

$$I = \langle a_1, a_2, \ldots, a_r \rangle = \langle a_o \rangle, \text{ para algún } a_o \in A.$$

De aquí, por Lema 1 y ii) de proposición 2, se cumple:

$$V(\{a_o\}) = V(I) = \bigcap_{i=1}^{r} V(a_i) = \bigcap_{i=1}^{r} (Spec\ (A) - X_{a_i})$$

$$= Spec\ (A) - \bigcup_{i=1}^{r} X_{a_i} .$$

Luego: $X_{a_1} \cup X_{a_2} \cup \ldots \cup X_{a_r} = X_{a_o}$.

ii) Para $a \in A$ se cumple: $a^2 = a$, o sea:

$$0 = a - a^2 = a(1 - a) \in P , \forall\ P \in Spec\ (A) .$$

Como P es ideal primo de A, por ii) de la proposición 1, se cumple:

$$a \in P \quad ó \quad 1 - a \in P, \text{ pero no ambos. Luego:}$$

$$P \in X_a \Leftrightarrow a \notin P \Leftrightarrow 1 - a \in P \Leftrightarrow P \in V(\{1 - a\}) \text{ , es decir:}$$

$$X_a = V(\{1 - a\}) .$$

Por lo que X_a es un conjunto abierto y cerrado en $Spec(A)$

Por otro lado, sea $W \subset Spec\ (A)$ un conjunto abierto y cerrado. Por ser abierto: $W = \bigcup_{a \in M} X_a$, para algún $M \subset A$; y por ser cerrado y como $Spec\ (A)$ es un espacio cuasi-compacto, se tiene que W es también cuasi-compacto. Luego existen $a_1, a_2, \ldots, a_r$ en A tal que $\{X_{a_i}\}_{i=1,2,\ldots,r}$ es un cubrimiento finito de W; es decir, $W = \bigcup_{i=1}^{r} X_{a_i}$; y por la parte i) existe $a_o \in A$ tal que $\bigcup_{i=1}^{r} X_{a_i} = X_{a_o}$; o sea: $W = X_{a_o}$, para algún $a_o \in A$. De aquí, los únicos abiertos y cerrados de $Spec(A)$ son los conjuntos X_a, para $a \in A$.

iii) Se tiene que $Spec\ (A)$ es un espacio cuasi-compacto. Falta ver que $Spec\ (A)$ sea un espacio separable por abiertos; es decir, cada par de puntos diferentes se separan por conjuntos abiertos disjuntos.

En efecto: Sean $P \neq Q$ en $Spec\ (A)$. Como P y Q son ideales primos de A, existe $a \in A$ tal que $a \in P$ y $a \notin Q$ (o $a \in Q$ y $a \notin P$). De aquí: $P \notin X_a$ y $Q \in X_a$ (o $Q \notin X_a$ y $P \in X_a$), además, por ser X_a abierto y cerrado de $Spec(A)$ tal que $Q \in X_a$, se tiene que CX_a es también abierto y cerrado de $Spec\ (A)$ tal que $P \in CX_a$, y $X_a \cap CX_a = \phi$. Por lo tanto, para $P \neq Q$ en $Spec\ (A)$, existe $a \in A$ tal que $P \in CX_a$ y $Q \in X_a$, siendo X_a y CX_a abiertos y disjuntos, por lo que $Spec\ (A)$ es un espacio de Hausdorff.

Con los resultados anteriores, se está en condiciones de establecer una caracterización de un retículo booleano con el retículo de los conjuntos abiertos y cerrados de un espacio topológico de Hausdorff. Para esto tenemos el siguiente:

Teorema 2.- *(Teorema de Representación de Stone).* Todo retículo booleano es isomorfo al retículo de los subconjuntos abiertos y cerrados de un espacio topológico de Hausdorff.

Demostración.

Por el Teorema 1, todo retículo booleano es definido por un anillo booleano A con un orden $\leqslant$ dado por:

$$a \leqslant b \Leftrightarrow ab = a.$$

De aquí, A con $\leqslant$ es un retículo booleano.
Por otro lado, dado el anillo booleano A, el espacio $Spec\ (A)$ es un espacio topológico de Hausdorff y los conjuntos básicos abiertos X_a son también cerrados, según ii) y iii) de la proposición 5.

Sea $B_A = \{ X_a \ / \ a \in A \}$ el conjunto de abiertos y cerrados del espacio $Spec\ (A)$. Entonces: B_A, como conjunto con la diferencia simétrica Δ y la intersección $\cap$ de conjuntos, es un anillo booleano cuya unidad es $X_1 = Spec\ (A)$. Además, en B_A se define la relación $\leqslant$ por:

$$X_a \leqslant X_b \Leftrightarrow X_a \cap X_b = X_a .$$

Entonces: $\leqslant$ es un orden parcial y B_A, con $\leqslant$, es un retículo booleano, en donde: $X_a \wedge X_b = X_a \cap X_b$,

$$X_a \vee X_b = X_a \ \Delta \ X_b \ \Delta \ X_{ab} \ , \ X'_a = V(\{a\}),$$

el elemento máximo de $Spec\ (A)$ es el mismo $Spec\ (A)$ y el elemento mínimo de $Spec\ (A)$ es ϕ, para $\leqslant$; que resultan del Teorema 1.

Para completar, como retículo booleanos A y B_A son isomorfos. Pues, considerando la función $\varphi : A \rightarrow B_A$ tal que $\varphi(a) = X_a$, $\forall a \in A$, se tiene:

i) φ es un homomorfismo de retículos ; es decir, φ es un homomorfismo de anillos y φ preserva: orden, supremo, ínfimo, complemento, máximo y mínimo. Para ésto, sean a y b en A. Entonces:

a) $\varphi(ab) = \varphi(a) \cap \varphi(b)$ y $\varphi(a + b) = \varphi(a) \Delta \varphi(b)$; pues como $X_a = \varphi(a)$ y $X_b = \varphi(b)$, se tiene:

$$P \in X_{ab} \Leftrightarrow ab \notin P \Leftrightarrow a \notin P \text{ y } b \notin P$$

$$\Leftrightarrow P \in X_a \text{ y } P \in X_b \Leftrightarrow P \in X_a \cap X_b ,$$

siendo P un ideal primo de A. De aquí:

$$X_{ab} = X_a \cap X_b .$$

Análogamente se tiene: $X_{a+b} = X_a \Delta X_b$.

b) Si $a \leqslant b$ en A, se tiene: $ab = a$, del Teorema 1. De aquí:

$$\varphi(ab) = \varphi(a) \cap \varphi(b) = \varphi(a) ;$$

o sea: $\varphi(a) \leqslant \varphi(b)$.

c) $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$, $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$ y $\varphi(a') = \varphi(a)'$; pues:

$$\varphi(a \vee b) = \varphi(a + b + ab) = \varphi(a) \Delta \varphi(b) \Delta \varphi(ab)$$

$$= \varphi(a) \Delta \varphi(b) \Delta \varphi(a) \cap \varphi(b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$$

$\varphi(a \wedge b) = \varphi(ab) = \varphi(a) \cap \varphi(b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$; y

como $a' = 1 + a$, entonces:

$$\varphi(a') = \varphi(1 + a) = \varphi(1) \Delta \varphi(a) = X_1 - X_a$$

$$= Spec\ (A) - X_a = X'_a = \varphi(a)' .$$

d) $\varphi(máx\ A) = máx\ \mathcal{B}_A$ y $\varphi(mín\ A) = mín\ \mathcal{B}_A$; pues:

como $máx\ A = 1$, se tiene: $\varphi(1) = X_1 = Spec\ (A)$
$= máx\ \mathcal{B}_A$, y

como $mín\ A = 0$, se tiene: $\varphi(0) = X_o = \phi = mín\ \mathcal{B}_A$.

Por consiguiente, φ es un homomorfismo de retículos.

ii) φ es inyectiva: Sea $a \in Ker(\varphi)$; o sea: $\varphi(a) = X_a = \phi$.
Afirmamos que: $X_a = \phi \Leftrightarrow a$ es un elemento nilpotente de A.

En efecto: Como $X_0 = \phi$ y por el Lema 2, se tiene: $X_a = X_0$ si y sólo si $r(<a>) = r(<0>)$; es decir:

$$r(<a>) \text{ es el nilradical de } A,$$

que es la intersección de todos los ideales primos y que está conformado por los elementos nilpotentes de A. Luego: $X_a = \phi \Leftrightarrow a \in P \quad \forall P \in Spec(A) \Leftrightarrow a$ es elemento nilpotente de A. Pero como A es anillo booleano se tiene que $a^n = a$, $\forall a \in A$ y $n \geqslant 1$. Luego: a es elemento nilpotente de A si y sólo si $a = 0$. De aquí: Si

$$\varphi(a) = \phi, \text{ entonces } a = 0;$$

es decir: $Ker(\varphi) = \{0\}$, lo que asegura la inyectividad de φ.

iii) φ es suryectiva: si $U \in \mathcal{B}_A$, entonces U es abierto y cerrado de $Spec(A)$. Por la proposición 5, ii) se tiene: $U = X_a$, para algún $a \in A$. Luego: $\varphi(a) = X_a = U$.

En consecuencia, de i), ii) y iii) se concluye que φ es un isomorfismo de retículos booleanos.

Referencias.

[1] M.F. Atiyah y I.G. Macdonald.- Introduction to Commutative Algebra.- Addisson Wesley Pub. Co. 1969. Gran Bretaña.

[2] I.G. Macdonald.- Algebraic Geometry (Introduction to Schemes).- W.A. Benjamin Inc. 1968.- New York.

[3] N. Bourbaki.- Elements de Mathematique. Fascicule XXVII Hermann- Paris.- 1961.

[4] D. Mumford.- Introduction to Algebraic Geometry. Chapter two: Preschemes.

[5] D.M. Burton.- A Frist Course in Rings and Ideals.- Addison Wesley Pub. Co. 1970. Massachusetts.

Lima, 1986.