Pro Mathematica: Vol. I, No. 2, 1987

ACERCA DE UN TEOREMA DE OLECH SOBRE R–CONVEXIDAD

Alfredo POIRIER SCHMITZ (*)

La presente exposición tiene por objeto demostrar una proposición usada en el artículo de Frankowska–Olech [1] sobre R–convexidad, cuya referencia no está a nuestro alcance y que es indispensable para el artículo mencionado.

Los conceptos vertidos sobre correspondencias e integrales de las mismas pueden encontrarse detalladamente en Ioffe–Tihomirov [2] o en Poirier [3].

El presente trabajo, que puede considerarse una demostración original del teorema, demuestra una vez más la relación existente entre los problemas lineales de control óptimo y el teorema de la medida vectorial de Liapunov.

(*) Profesor Auxiliar de la Sección Matemática de la PUCP.

Correspondencias y otras definiciones.

Dados dos conjuntos T, X, llamamos correspondencia a cualquier función de la forma $F : T \to P(X)$; por ser en este caso el conjunto X en referencia más "manejable" que P (X), tomamos la notación: $F : T \Rightarrow X$ para denotar una correspondencia de T en X.

Definición: Sea $R^s \supset T$ μ–medible, $F : T \Rightarrow R^n$ una correspondencia. Llamamos integral de F al conjunto:

$$\int_T F(t)\, d\mu(t) = \{x \in R^n : x = \int_T f(t)\, d\mu(t) \text{ con } f(t) \in F(t) \text{ c.t.p } \text{ y } f(.) \in L^1{}_{R^n}(T)\}$$

Ejemplo: Sea $R^n \supset H$, tenemos que la integral de la correspondencia constante $H : T \Rightarrow H$ es:

$$\int_T H\, d\mu(t) = \{x \in R^n : x = \int_T h(t)\, d\mu(t),\ h(t) \in H\}$$

$$h(.) \in L^1{}_{R^n}(T)$$

Del teorema de la medida de Liapunov se deduce el teorema de Aumann para correspondencias (Ioffe–Tihomirov pág. 334), que en el caso de correspondencias constantes puede enunciarse así:

Teorema de Aumann: Sea T de medida μ–finita

Sea $R^n \supset H$ compacto, entonces: $\int_T H\, d\mu(t) = \int_T \mathrm{Conv}\, H\, d\mu(t)$

donde H, Conv H son las correspondencias constantes que a cada punto le asignan los conjuntos H, Conv H (cápsula convexa de H) respectivamente.

Colorario: Sea $H \subset R^n$ compacto, T medible, $\alpha(.) \in L^1(T)$, consideremos:

$$F: T \Rightarrow F(t) = \alpha(t)H = \{x \in R^n : x = \alpha(t)h, h \in H\}$$

entonces: $\int_T F(t)\,dt = \int_T \operatorname{Conv} F(t)\,dt$

Demostración: Tenemos:

$$\int_T F(t)\,dt = \int_T \alpha(t)H\,dt = \int_T H\,d\mu(t)$$

donde $d\mu(t) = \alpha(t)\,dt$; como $\alpha(.) \in L^1$ tenemos $\mu(T) < \infty$ y por lo tanto es aplicable el teorema de Aumann

$$\int_T H\,d\mu(t) = \int_T \operatorname{Conv} H\,d\mu(t) = \int_T \alpha(t) \operatorname{Conv} H\,dt = \int_T \operatorname{Conv} F(t)\,dt$$

Sobre algunas relaciones en la circunferencia unitaria.

Lema: Sean $p, q, x \in \overline{B}(1)$ con $|p| = 1$ entonces:
$<p-x, q> \leq \sqrt{2} <p-x, p>^{1/2}$ ... (1)

Demostración: Obsérvese que: $<p-x, p> \geq 0$ ya que $<p, x> \leq 1$

Sea para p, q fijos $M_q = \{x \in \overline{B}(1) : <p-x, q> = 0\}$. Tomando $x \in M_q$, la relación (1) se cumple trivialmente.

Como $<p-x, q>^2 \leq |p-x|^2 |q|^2 \leq |p-x|^2$ tenemos fuera de M_q

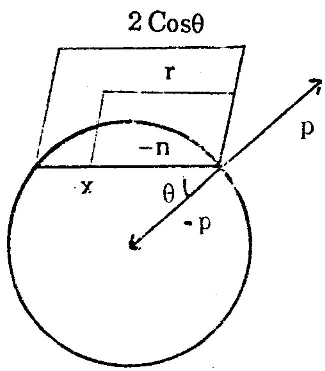
$$\frac{<p-x, p>}{|p-x|^2} \leq \frac{<p-x, p>}{<p-x, q>^2}$$

Haciendo $p - x = r\vec{n}$ con $|\vec{n}| = 1, r > 0$ tenemos:

$$o < \frac{\langle \vec{n}, p \rangle}{r} = \frac{\langle p - x, p \rangle}{|p - x|^2} \qquad \text{si } x \neq p$$

Pero de relaciones elementales en la circunferencia

$$\frac{\langle \vec{n}, p \rangle}{r} \geq \frac{\text{Cos}\theta}{2\,\text{Cos}\theta} \geq \frac{1}{2}$$



Por lo tanto:

$$\langle p - x, q \rangle^2 \leq 2 \langle p - x, p \rangle.$$

Antes de pasar al resultado principal, sean X_E la función característica de E   T; f, g: T $\to$ R^n. Podemos definir así:

$$h = f\, X_E + g\, X_{T \setminus E} = f + (g - f)\, X_{T \setminus E} \qquad \text{por}$$

$$h(y) = \begin{cases} f(y) & \text{si} \quad y \in E \\ g(y) & \text{si} \quad y \in T \setminus E \end{cases}$$

El resultado principal

Teorema: Sea $T = [a, b]$ con $0 < b - a < \infty$, $U: T \Rightarrow R^n$ una correspondencia con $U(t)$ cerrado, $I = \int_T U(t)\, dt$.

Sea $\mu(.)$ medible, selección de U (i.e. $\mu(t) \in U(t)$ c.t.p.). Supongamos que $I \subset \overline{B}\,(R, \int_T \mu(t)\, dt - p\, R)$ con $p \in R^n \wedge |p| = 1$, $R > 0$. Entonces $\exists L > 0$ tal que si $v(.)$ es selección medible de U, se tiene:

$$\|\mu - v\|_1 = \int_T |\mu(t) - v(t)|\, dt \leq L < \int_T \mu(t) - v(t), p>^{1/2}$$

Demostración:

Haciendo una traslación por $pR\,/(b - a)$, tomando luego una escala de R unidades, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $p = \int_T \mu(t)\, dt = \tilde{\mu}$ y $R = 1$; observemos que de esta forma el L real quedará dividido en $R^{1/2}$; además $I \subset \overline{B}\,(1,0)$.

En primer lugar tenemos que en c.t.p. $<\mu(t) - v(t), p> \geq 0$ ya que en caso contrario $< v(t) - \mu(t), p> > 0$ en A con $\mu(A) > 0$ y por lo tanto $< \int_A v(t) - \mu(t), p> > 0$.

Definamos $w(t) = (v(t) - \mu(t))X_A + \mu(t) = v(t)X_A + \mu(t)X_{T\setminus A} \in U(t)$, por lo tanto $<\int_T w(t), p> = <\int_A v(t) - \mu(t), p> + < \int_T \mu(t), p > 1$; lo que significa que $\int_T w(t) \notin I$, lo que es una contradicción.

En segundo lugar observamos que para $A \subset T$ medible

(1) $< \int_T \mu(t) - v(t), p> \geq < \int_A \mu(t) - v(t), p>$

Por lo tanto haciendo $\tilde{v} = \int_T v(t)\,dt$, tenemos por el lema anterior: $<\tilde{\mu} - \tilde{v}, q> \leq \sqrt{2} <\tilde{\mu} - \tilde{v}, \tilde{\mu}>^{1/2}$ para cualquier $q \in \overline{B}(1)$. En particular si $A \subset T$ es medible, definiendo $w = X_A v + X_{T \setminus A}$ tenemos:

(2) $\tilde{w} = \int_T w(t)\,dt \in I \quad \overline{B}(1)$

Y por lo tanto como de (1) se tiene $<\int_A \mu(t) - v(t), \mu> \leq <\tilde{\mu} - \tilde{v}, \tilde{\mu}>$

(3) $<\int_A \mu(t)\text{-}v(t), q> = <\tilde{\mu}\text{-}\tilde{w}, q> \leq \sqrt{2} <\tilde{\mu}\text{-}\tilde{w}, \tilde{\mu}>^{1/2} \leq \sqrt{2} <\tilde{\mu}\text{-}\tilde{v}, \tilde{\mu}>^{1/2}$

Sea $H(t) = \{0, 1\}$ una correspondencia constante.

Ahora sea $\mu(t) - v(t) = (\mu_1(t) - v_1(t), \ldots, \mu_n(t) - v_n(t))$; por el corolario al teorema de Aumann, tenemos para todo $i = 1, \ldots, n$:

$\int_T (\mu_i - v_1)\, H = \int_T \mu_i(t) - v_i(t)\, \mathrm{Conv}\, H(t)\, dt$, y por lo tanto:

$\mathrm{Sup}\, \{\int_T (\mu_i - v_i)\, \mathrm{Conv}\, H\} = \mathrm{Sup}\, \{\int_T (\mu_i - v_i)\, H\} =$

$\mathrm{Sup}_{A \subset T}\, \{\int_A (\mu_i - v_i)dt\} =$

$\mathrm{Sup}_{A \subset T}\, \{\int_A <\mu - v, e_i>dt\} \leq \sqrt{2} <\tilde{\mu} - \tilde{v}, \tilde{\mu}>^{1/2}$ por (3)

Tomando $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t) \in \mathrm{Conv}\, H(t)$, tenemos:

$\Sigma_i \int_T (\mu_i - v_i)\alpha_i \leq \Sigma_i\ \sup\{\int_T (\mu_i - v_i)\, \mathrm{Conv}\, H\} \leq n\sqrt{2} <\tilde{\mu} - \tilde{v}, \tilde{\mu})^{1/2}$

Haciendo $B(L^{\infty}_{R^n}) = \{x(.) \in L^{\infty}_{R^n}: \mathrm{Ess\,Sup}\ \Sigma\, x_i^2(t) \leq 1\}$

tenemos si $\alpha(.) \in (\alpha_1(.), \ldots, \alpha_n(.) \in B(L^{\infty}_{R^n})$ entonces:

$$\alpha_i(t) \in \mathrm{Conv}\, H$$

Finalmente como $L^1_{R^n}$ está contenido en el dual de $L^{\infty}_{R^n}$, se tiene

$$||\mu-v||_1 = \sup_{\alpha(.)\in B(L^{\infty}_{R^n})} \int_T <\mu(t)-v(t), \alpha(t)dt \leq n\sqrt{2} <\tilde{\mu}-\tilde{v}, \tilde{\mu})^{1/2}$$

Referencias:

[1] *Frankowska-Olech.* Boundary solutions of differential Inclusions
J: Diff. Eq 44, 156–165 (1982)

[2] *Ioffe - Thihomirov.* Theory of Extremal Problems
North Holland 1979

[3] *Poirier* Teoría de correspondencias
Tesis, Lima 1985