Pro Mathematica: Vol. I, No. 2, 1987

ESPACIOS SEUDOEUCLIDEANOS, ESPACIOS DE MINKOWSKI Y TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

José TOLA PASQUEL (*)

Esta nota trata acerca de los espacios vectoriales sobre el campo de los números reales, asociados a formas cuadráticas no degeneradas, es decir acerca de los espacios cuadráticos regulares; y tiene, además, el propósito de mostrar cómo dichos espacios tienen aplicación en la teoría especial de la relatividad, razón por la cual la nomenclatura se inspira en esa aplicación. Así, por ejemplo, se llama aquí vectores lumínicos a los que, en contexto estrictamente algebraico se denomina vectores isotrópicos.

(*) Profesor Principal de la Sección Matemáticas de la PUCP.

1. Espacios Seudoeuclideanos.

1.1 Definición del espacio seudoeuclideano.

Definición 1.1.1 Un espacio seudoeuclideano **E** es un espacio vectorial real de dimensión finita n, en que es definida una función real bilineal simétrica Φ que tiene las propiedades siguientes:

1.– Es *no degenerada*, es decir que si para un elemento $x \in E$, cualquiera dado se cumple, para todo $y \in E$, que $\Phi(x, y)$ es igual a 0, entonces x es igual al vector nulo de E que designamos también por 0.

2.– Es *indefinida*, o sea que la forma cuadrática $x \to \Phi(x, x)$ toma valores positivos y negativos. Es decir que existe algún vector para el cual es $\Phi(x, x) > 0$ y algún otro para el que es $\Phi(x, x) < 0$.

Φ se llama *producto interno del espacio seudoeuclideano E*. $\Phi(x, y)$ es el *producto interno de x e y*, y se designa también por $(x \mid y)$. Se dice que dos vectores son *ortogonales* si su producto interno es nulo. Se llama **seudonorma** de un vector x al número positivo.

$$\|x\| = +\sqrt{|(x \mid x)|}$$

Si $\|x\| = 1$ se dice que x es un **vector unitario.**

Para representar a $\Phi(x, x)$ podremos emplear en adelante, simplemente, la notación $\Phi(x)$.

1.2 Descomposición de un espacio seudoeuclideano en suma directa de dos espacios euclideanos mutuamente ortogonales.

Si E es un espacio seudoeuclideano, su producto interno, que es una función bilineal no degenerada, puede considerarse como un producto escalar [1], respecto del cual E resulta ser dual consigo mismo. Por consiguiente, a cada subespacio E_1 de E le corresponde el subespacio complemento ortogonal de E_1, que se designa por $(E_1)^\perp$, que está formado por los vectores de E que son ortogonales a todos los vectores de E_1. Puesto que E es de dimensión finita se tiene [2],

$$dim\, E_1 + dim\, (E_1)^\perp = dim\, E, \qquad (1.2.1)$$

relación que se expresa diciendo que un subespacio y su complemento ortogonal tienen *dimensiones complementarias*.

En general, dado un subespacio E_1 de E, no siempre éste es suma directa del primero y de su complemento ortogonal, lo que sí tiene lugar en el caso en que E es un espacio euclideano [3], pues entonces se cumple que $E_1 \cap (E_1)^\perp = \{0\}$, de modo que (1.2.1) implica que E es suma directa de E_1 y $(E_1)^\perp$. Esto no ocurre en un espacio seudoeuclideano, porque puede elegirse en él (ver la sección 1.2) un vector $\ell \neq 0$; y el subespacio E_1 de dimensión 1 generado por ℓ está contenido en $(E_1)^\perp$, y por tanto es $E_1 \cap (E_1)^\perp \neq \{0\}$.

Pero podemos establecer el siguiente lema:

Lema 1.2.1 Dado un subespacio E_1 del espacio seudoeuclideano E, para que se cumpla la ecuación:

$$E_1 \oplus (E_1)^\perp = E \qquad (1.2.2)$$

es necesario y suficiente que la restricción del producto interno al subespacio E_1 no sea degenerada.

---

1) Tola, Algebra lineal y multilineal I, P.U.C.P. (1978), sección 4.2.
2) Tola, loc. cit., teorema 5.4.1.
3) Tola, loc. cit., pág. 290.

Demostración. Supongamos primero que se cumple la condición del enunciado. Si x_1 es un vector de $E_1 \cap (E_1)^{\perp}$, entonces se tendrá que:

$$(x_1 | y_1) = 0 \quad \text{para todo vector } y_1 \text{ de } E_1$$

y por consiguiente será $x_1 = 0$; es decir que $E_1 \cap (E_1)^{\perp} = \{0\}$, y por tanto existe la suma directa $E_1 \oplus (E_1)^{\perp}$. Se cumple entonces (1.2.2) porque E_1 y $(E_1)^{\perp}$ tienen dimensiones complementarias.

Si, inversamente, suponemos que se cumple (1.2.2), podemos deducir que el producto interno no es degenerado en E_1. En efecto, supongamos que exista $x_1 \in E_1$ tal que:

$$(x_1 | y_1) = 0 \quad \text{para todo vector } y_1 \text{ de } E_1.$$

La relación (1.2.2) nos permite escribir cada vector $y \in E$ en la forma:

$$y = y_1 + y^{\perp}, \qquad y_1 \in E_1, \qquad y^1 \in E^{\perp}$$

Se tiene entonces:

$$(x_1 | y) = (x_1 | y_1) + (x_1 | y^{\perp}) = 0 \quad \text{para todo vector } y \in E$$

de donde se deduce, por cuanto el producto interno es no degenerado en E, que $x_1 = 0$, y por consiguiente el producto interno es no degenerado en E_1. ♦

Las proposiciones que demostraremos a continuación requieren emplear algunas definiciones relativas a las funciones bilineales simétricas, que son aplicables en particular al producto interno de un espacio seudoeuclideano.

Definición 1.2.2 Una función bilineal simétrica Φ definida sobre un espacio vectorial se dice que es **definida positiva (definida negativa)** si se cumple la condición $\Phi(x) > 0$ (resp. $\Phi(x) < 0$) para todo vector $x \neq 0$; y que es **semidefinida positiva (semidefinida negativa)** si para todo x es $\Phi(x) \geq 0$ (resp. $\Phi(x) \leq 0$), pero para algún $x \neq 0$ es $\Phi(x) = 0$.

Debe recordarse que si Φ es definida o semidefinida (positiva o negativa) se cumple la **desigualdad de Schwarz** [1], es decir la relación:

$$\Phi(x, y)^2 \leq \Phi(x)\,\Phi(y)$$

para cada par de vectores x, y.

Sea M^+ el conjunto de todos los subespacios no triviales del espacio seudoeuclideano E en los cuales Φ es *definida positiva.* El conjunto M^+ es no vacío, pues si $z \in$ E es tal que $\Phi(z) > 0$, el subespacio de dimensión 1 generado por z pertenece evidentemente a M^+.

El *máximo* de las dimensiones de los subespacios pertenecientes a M^+ se llama **índice de la función Φ o índice del espacio seudoeuclideano** y será designado en adelante por s.

Además, es claro que cada elemento de M^+ es un espacio *euclideano* con un producto interno que es la restricción de Φ.

En forma semejante, el conjunto M^- de los subespacios no

---

1) La desigualdad de Schwarz se prueba ordinariamente con la suposición de que $\Phi(x) \geq 0$ para todo x. En el caso en que es $\Phi \leq 0$ basta aplicar la desigualdad a la función bilineal simétrica $-\Phi$ definida por $(-\Phi)(x, y) = -\Phi(x, y)$.

triviales de E en los cuales Φ es ***definida negativa*** es no vacío; contiene, por ejemplo, al subespacio generado por un vector z tal que es $\Phi(z) < 0$; y el ***máximo*** de las dimensiones de los subespacios que le pertenecen será designado por s'. Además, cada elemento de M^- es un espacio ***euclideano*** con un producto interno que es la restricción de la función $-\Phi$ tal que $(-\Phi)(x, y) = -\Phi(x, y)$.

Proposición 1.2.3. Se cumplen los siguientes enunciados:

(a) Dado en el espacio seudoeuclideano E un subespacio E_1 en el que la restricción del producto interno es o bien ***definida positiva*** o bien ***definida negativa,*** el espacio E es suma directa de E_1 y de su complemento ortogonal $(E_1)^{\perp}$.

(b) Entre los subespacios del conjunto M^+ que tienen la dimensión máxima s y los del conjunto M^- que tiene la dimensión máxima s' existe una correspondencia biunívoca: a cada subespacio E^+ de los primeros le corresponde un subespacio E^-, bien determinado, de los segundos, de manera que se cumplen las relaciones.

$$E = E^+ \oplus E^- \ , \ E^- = (E^+)^{\perp},$$

y se tiene por tanto que:

$$s + s' = n.$$

Por último, según ya hemos señalado, E^+ y E^- son espacios ***euclideanos*** con productos internos que son las restricciones de Φ y $-\Phi$ respectivamente.

Demostración:

a) Si hubiera en E_1 un vector no nulo x_1 tal que $(x_1 | y) = 0$ para todo $y \in E_1$, se tendría que $(x_1 | x_1) = 0$, y resultaría una contradicción con la hipótesis. Luego la restricción de Φ a E_1 es no degenerada y se cumple la condición del lema 1.2.1.

b) Sea E^+ un elemento del conjunto M^+ que tiene la dimensión máxima *s*. En virtud de la parte (a) se cumple que:

$$E = E^+ \oplus (E^+)^\perp. \qquad (1.2.3)$$

Probaremos ahora que Φ es definida negativa en el espacio $(E^+)^\perp$. Sea $z \neq 0$ un vector cualquiera de dicho espacio. Consideremos el espacio E_2 generado por E^+ y z. Un elemento x cualquiera de E_2 puede expresarse en la forma.

$$x = y + \alpha z, \qquad y \in E^+, \alpha \text{ real};$$

y por lo tanto se tiene que

$$\Phi(x) = \Phi(y + \alpha z, y + \alpha z) = \Phi(y) + \alpha^2 \Phi(z).$$

Si fuera $\Phi(z) > 0$ resultaría $\Phi(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ de E_2 y Φ sería definida positiva en dicho espacio, cuya dimensión es mayor que la de E^+, con lo cual resultaría una contradicción. Debe ser por tanto.

$$\Phi(z) \leq 0$$

Para todo $z \in (E^+)^\perp$. Para probar que Φ es ***definida negativa*** en ese espacio deberemos probar que si $z_1 \in (E^+)^\perp$ es tal que $\Phi(z_1) = 0$ entonces es $z_1 = 0$. Con ese objeto apliquemos la desigualdad de Schwarz a z_1 y al elemento z cualquiera de $(E^+)^\perp$. Tendremos entonces:

$$\Phi(z_1, z)^2 \leq \Phi(z_1)\, \Phi(z).$$

Si fuera $\Phi(z_1) = 0$ resultaría $\Phi(z_1, z) = 0$ para todo $z \in (E^+)^\perp$. Ahora bien, cada vector $x \in E$ puede expresarse en la forma

$$x = y + z, \qquad y \in E^+, \ z \in (E^+)^\perp;$$

luego

$$\Phi(z_1, x) = \Phi(z_1, y+z) = \Phi(z_1, y) = \Phi(z_1, y) + \Phi(z_1, z) = 0$$

pues $\Phi(z_1, y) = 0$. Dado que Φ es no degenerada se deduce que $z_1 = 0$ y por consiguiente Φ es definida negativa.

Falta probar por último que todo subespacio $E_3 \in M^-$ tiene dimensión no mayor que la del espacio $(E^+)^\perp$. En efecto, es evidente que $E^+ \cap E_3 = \{0\}$; luego existe la suma directa $E^+ \oplus E_3 \subset E$, y se tiene

$$\dim E^+ + \dim E_3 \leq \dim E,$$

y por tanto

$$\dim E_3 \leq \dim E - \dim E^+.$$

Puesto que de (1.2.3) se sigue que

$$\dim (E^+)^\perp = \dim E - \dim E^+,$$

resulta que

$$\dim E_3 \leq \dim (E^+)^\perp.$$

Basta ahora con designar por E^- al espacio $(E^+)^\perp$ para que se cumpla la relación $E = E^+ \oplus E^-$.

Para demostrar que la correspondencia $E^+ \mapsto E^-$ es biunívoca puede aplicarse el resultado que acabamos de establecer, sustituyendo en el espacio seudoeclideano E el producto interno Φ por $-\Phi$. De esa manera los conjuntos M^+ y M^- intercambian sus papeles y se obtiene el resultado deseado.

Sean E^+ y E^- dos subespacios que se corresponden de la manera que fue establecida en la proposición 1.2.3, parte (b). Dichos espacios admiten, como entonces se señaló, estructuras de espacios euclideanos con los productos internos Φ y $-\Phi$ respectivamente; por consiguiente poseen bases ortonormales, es decir tales que cada uno de sus elementos es unitario y cada dos de ellos son ortogonales entre sí ***respecto de los correspondientes productos internos.*** Sean pues $\{e_1, \ldots, e_s\}$ y $\{e_{s+1}, \ldots, e_n\}$ bases ortonormales de E^+ y de E respectivamente. Dado que E^+ y E^- son mutuamente ortogonales se cumplen entonces las relaciones.

$$
\begin{array}{ll}
(e_i \mid e_j) = 0 & para\ (i, j = 1, \ldots, n, \quad i \neq j); \\
(e_i \mid e_j) = 1, & para\ (i = 1, \ldots, s); \\
(e_i \mid e_j) = -1, & para\ (j = s+1, \ldots, n);
\end{array}
\tag{1.2.4}
$$

y se dice que la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E es una **base ortonormal** del espacio seudoeuclideano E.

Dados dos vectores x e y, cuyas expresiones respecto de dicha *base son* $x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} \eta^j e_j$, *su producto interno es*

$$\Phi(x, y) = (x \mid y) = \sum_{i=1}^{s} \xi^i \eta_i - \sum_{i=s+1}^{n} \xi^j \eta_j , \tag{1.2.5}$$

y por consiguiente

$$\Phi(x) = (x \mid x) = \sum_{i=1}^{s} (\xi^i)^2 - \sum_{i=s+1}^{n} (\xi^i)^2 ; \tag{1.2.6}$$

expresión de la cual resulta en particular, que cada vector $\ell = e_i + e_j$, donde $i \in \{1, \ldots, s\}$ y $j \in \{s+1, \ldots, n\}$ cumple la condición $(\ell \mid \ell) = 0$ y es por tanto un vector lumínico. Por consiguiente puede establecerse:

Proposición 1.2.5. El número de términos positivos de la expresión de $(x|x)$ mediante las componentes de x relativas a una base ortonormal, es igual al índice s de Φ o sea del espacio seudoeuclideano E; y las expresiones de $\Phi(x, y)$ y $\Phi(x)$ son dadas por las fórmulas (1.2.5) y (1.2.6).

Definición 1.2.6. Un vector $x \neq 0$ del espacio seudoeuclideano E se llama **vector espacial si $(x|x) < 0$, vector temporal si $(x|x) > 0$ y vector lumínico si $(x|x) = 0$.**

Si λ es un número cualquiera no nulo, λx es un vector espacial, temporal o lumínico al mismo tiempo que x.

Si x es espacial o temporal, $x/\|x\|$ es un vector unitario espacial o temporal respectivamente.

Se llama **cono de luz** al conjunto de todos los vectores lumínicos, es decir aquellos cuyas componentes, referidas a una base ortonormal $\{e_i\}$, satisfacen a la ecuación.

$$\sum_{i=1}^{s}(\xi^i)^2 - \sum_{i=s+1}^{n}(\xi^i)^2 = 0,$$

a la que llamaremos **ecuación del cono de luz.**

Las precedentes denominaciones tienen su origen en que el concepto de espacio seudoeuclideano, a cuyas propiedades algebraicas dedicamos preferentemente esta nota, tiene una importante aplicación en la teoría especial de la relatividad, como señalaremos después.

1.3 Funciones determinantes sobre un espacio seudoeuclideano.

Sea Δ_0 una función determinante cualquiera [1], no idénticamente nula definida sobre E. Puesto que, como ya hemos señalado, E es dual consigo mismo, podemos escribir la ecuación.

$$\Delta_0(x_1, \ldots, x_n)\ \Delta_0(y_1, \ldots, y_n) = \alpha \det((x_i \mid y_j)), \tag{1.3.1}$$

donde a es un número real diferente de cero.

En particular, aplicando esta fórmula para $x_i = y_i = e_i$, donde $\{e_i\}$ es una base ortonormal de E, resulta.

$$\Delta_0(e_1, \ldots, e_n)^2 = \alpha\ (-1)^{n-s}, \tag{1.3.2}$$

pues $((e_i \mid e_j))$ es una matriz diagonal cuya diagonal principal está formada por n términos, s de los cuales son iguales a 1 y los restantes $n-s$ son iguales a -1.

Resulta de (1.3.2) que

$$\alpha\ (-1)^{n-s} > 0.$$

La función determinante

$$\Delta = \frac{\Delta_0}{\sqrt{\alpha\ (-1)^{n-s}}} \tag{1.3.3.}$$

satisface a la relación

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n)\ \Delta(y_1, \ldots, y_n) = (-1)^{n-s} \det((x_i \mid y_j)), \tag{1.3.4}$$

---

1) Tola, **Algebra lineal, II (Algebra exterior)**, Universidad Nacional de Ingeniería, Instituto de Matemáticas Puras y Aplicadas (1968), capítulo 2. En particular, sección 2.5, (2.5.1).

que se expresa diciendo que Δ es una **función determinante normada.**

Es evidente que la función determinante $-\Delta$ satisface a la misma relación y por tanto es también una función determinante normada. Podemos ver de inmediato que Δ y $-\Delta$ son las únicas funciones determinantes que tienen esa propiedad. En efecto, si Δ^* es una función determinante cualquiera que satisface a la relación (1.3.4), puesto que existe un escalar μ tal que $\Delta^* = \mu\Delta$, se tiene para $x_i = y_i = e_i$,

$$\Delta(e_1, \ldots, e_n)^2 = \mu^2 \Delta(e_1, \ldots, e_n)^2$$

de donde resulta que $\mu = \pm 1$ y por tanto $\Delta^* = \pm\Delta$.

Ejemplo: Consideremos el espacio seudoeuclideano E tal que $n = 2$ y $s = 1$ y sea $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal. La función determinante Δ definida, para $x = \xi e_1 + \eta e_2$, $x' = \xi' e_1 + \eta' e_2$, mediante la fórmula.

$$\Delta(x, x') = \begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \xi' & \eta' \end{vmatrix} = \xi\eta' - \xi'\eta \ ,$$

satisface, como se comprueba con un cálculo directo, a la relación.

$$\Delta(x,x').\ \Delta(y,y') = - \begin{vmatrix} (x\,|\,y) & (x\,|\,y') \\ (x'\,|\,y) & (x'\,|\,y') \end{vmatrix}$$

es decir a la relación (1.3.4), y es por consiguiente una función determinante normada.

1.4 El plano seudoeuclideano.

Se llama **plano seudoeuclideano** o **plano hiperbólico** al espacio seudoclideano E de dimensión n=2 e índice s=1. Sea $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de E. Se tiene.

$$(e_1 | e_1) = 1 \;, (e_1 | e_2) = 0 \;, (e_2 | e_2) = -1.$$

Cada elemento de E se expresa entonces en la forma $\xi^1 e_1 + \xi^2 e_2$, y puede ser representado, referido a un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, por el punto (ξ^1, ξ^2). La ecuación del cono de luz es

$$(\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 = 0,$$

y por tanto se representa por las dos rectas que contienen a todos los vectores tales que $\xi^1 = \xi^2$ y $\xi^1 = -\xi^2$ *(fig. 1)*.

Puede verse que los vectores

$$\ell_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \;(e_2 + e_1) \text{ y } \ell_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \;(e_2 - e_1),$$

constituyen una base tal que se cumplen las relaciones

$$(\ell_1 | \ell_1) = (\ell_2 | \ell_2) = 0 \;, \; (\ell_1 | \ell_2) = -1.$$

Dado un vector $x = \zeta^1 \ell_1 + \zeta^2 \ell_2$,
se tiene $(x | x) = -2\zeta^1 \zeta^2$.

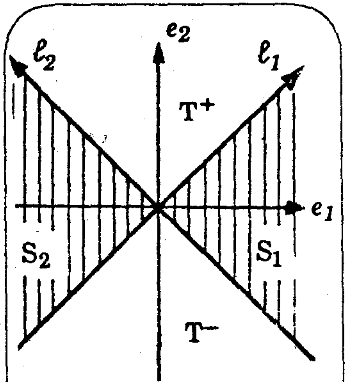

figura 1

Por consiguiente:

x es un vector espacial si $\zeta^1 \zeta^2 < 0$
x es un vector temporal si $\zeta^1 \zeta^2 > 0$
x es un vector lumínico si $\zeta^1 \zeta^2 = 0$

En el primer caso ζ^1 y ζ^2 son de signos opuestos, luego los vectores espaciales están en los sectores S_1 y S_2 *(fig. 1)*. En el segundo caso ζ^1 y ζ^2 son del mismo signo, luego los vectores temporales están en los sectores T^+ y T^-.

El producto interno de dos vectores

$$x = \zeta^1 \ell_1 + \zeta^2 \ell_2 \ , \ y = \theta^1 \ell_1 + \theta^2 \ell_2$$

es

$$(x \mid y) = -(\zeta^1 \theta^2 + \zeta^2 \theta_1).$$

Proposición 1.4.1. Dados dos vectores espaciales x e y, su producto interno $(x \mid y)$ es positivo si y sólo si ambos están en S_1 o en S_2.

Demostración: Por cuanto x e y son espaciales se cumple que

$$\zeta^1\zeta^2 < 0 \ \text{ y } \ \theta^1\theta^2 < 0.$$

Si x e y están en distinto sector se tiene que $\zeta^1\theta^1 < 0$ y $\zeta^2\theta^2 < 0$; luego, $\zeta^1 (\zeta^2)^2\theta^2 > 0$ y $z^2 (\theta^2)^2\theta^1 > 0$, y por tanto $\zeta^1\theta^2 > 0$ y $\zeta^2\theta^1 > 0$, es decir que $(x \mid y) < 0$.

Si x e y están en el mismo sector entonces es $\zeta^1\theta^1 > 0$ y $\zeta^2\theta^2 > 0$; luego $\zeta^1 (\theta^1)2\, \theta^2 < 0$ y $\zeta^2 (\theta^2)^2 \zeta^1 < 0$, y por tanto $\zeta^1\theta^2 < 0$ y $\zeta^2\theta^1 < 0$, es decir que $(x \mid y) > 0$. ♦

La siguiente proposición se prueba en forma semejante a la anterior.

Proposición 1.4.2. Dados dos vectores temporales x e y, su producto interno $(x \mid y)$ es negativo si y sólo si ambos están en T^+ o en T^-.

En el plano seudoeuclideano, como en todo espacio vectorial de dimensión finita puede ser introducida una orientación [1] me-

---

1) Tola, Algebra lineal, II, (Algebra exterior), Universidad de Ingeniería, Instituto de Matemáticas Puras y Aplicadas (1968), sección 2.1.

diante la elección de una de las dos clases de equivalencia en las que se dividen las funciones determinantes. Vamos a elegir la orientación a la que pertenece la función determinante normada Δ que satisface a la ecuación (1.3.4). Se tiene entonces, por cuanto es ahora $n=2$ y $s=1$, haciendo $x_1=y_1=x$ y $x_2=y_2=y$,

$$(x \mid y)^2 - \Delta(x,y)^2 = (x \mid x)(y \mid y). \tag{1.4.2}$$

Se deduce de aquí, ***supuesto que (x | x) e (y) son diferentes de cero.***

$$\frac{(x \mid y)^2}{(x \mid x)(y \mid y)} - \frac{\Delta(x,y)^2}{(x \mid x)(y \mid y)} = 1. \tag{1.4.3}$$

Las conocidas propiedades de las funciones hiperbólicas aseguran la existencia de un sólo número real θ tal que

$$\cosh\theta = \frac{|(x \mid y)|}{\| x \| . \| y \|} \quad y \quad \operatorname{senh}\theta = \frac{\Delta(x,y)}{\| x \|.\| y \|}. \tag{1.4.4}$$

Definición 1.4.3. El número θ definido por las fórmulas (1.4.4) se llama **ángulo seudoeuclideano** de los vectores x e y tales que $\| x \|$ y $\| y \|$ son diferentes de cero, relativo a la orientación del plano seudoeuclideano determinada por la función determinante normada Δ. Debe notarse que θ cambia de signo cuando se permutan x e y.

1.5 Espacios seudoeuclideanos de dimensión n e índice n–1.

El plano seudoeuclideano es un caso particular de los espacios seudoeuclideanos de dimensión n e índice $s=n-1$ acerca de los cuales vamos a tratar ahora. Previamente introduciremos nuevos conceptos que emplearemos a continuación.

Definición 1.5.1. Se llama **núcleo** de una función bilineal simétrica Ψ definida sobre un espacio vectorial V al subespacio K dennido por

$$K = \{y \in V \mid \Psi(x,y) = 0, \text{ para todo } x \in V\}.$$

Se llama **rango** de Ψ a la diferencia entre la dimensiones de V v de K.

En esta sección supondremos que E es un espacio seudoeuclideano de dimensión n e índice $n-1$, es decir que $s=n-1$ y $s'=1$.

Dado un vector ***temporal unitario cualquiera z***, la restricción de Φ al subespacio de dimensión 1 generado por z es, evidentemente, definida negativa; y, por cuanto s' es igual a 1, ***dicho subespacio puede representarse por*** E^- ***en la presente sección,*** haciendo uso de la notación introducida en el enunciado de la proposición 1.2.3. En virtud de dicha proposición cada vector $x \in E$ puede expresarse ***de una única manera*** en la forma

$$x = \lambda z + y, \quad [(z \mid z) = -1, \ \ (z \mid y) = 0, \ \ (y \mid y) \geq 0\,]. \tag{1.5.1}$$

donde y pertenece al subespacio $(E^-)^\perp$, que podemos designar ahora por E^+, subespacio en que la restricción de Φ es definida positiva; y por consiguiente es $(y \mid y) >$ salvo el caso en que $y = 0$, en el cual, por ser $x = \lambda z$, x es necesariamente temporal o nulo. ***En particular es*** $(x \mid y) > 0$ ***si x es lumínico o espacial.*** Se sigue de (1.5.1) que

$$(x \mid x) = (\lambda z + y \mid \lambda z + y) = -\lambda^2 + (y \mid y),$$

de donde resulta que

$$\begin{aligned} &\text{Si } x \text{ es espacial, es } \lambda^2 < (y \mid y) \\ &\text{Si } x \text{ es temporal, es } \lambda^2 > (y \mid y) \\ &\text{Si } x \text{ es lumínico, es } \lambda^2 = (y \mid y). \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

Proposición 1.5.2. Se cumplen las propiedades siguientes:

(1) dos vectores temporales nunca son ortogonales,

(2) un vector temporal nunca es ortogonal a un vector lumínico,

(3) dos vectores lumínicos son ortogonales si y sólo si son linealmente dependientes,

(4) El complemento ortogonal de un vector lumínico es un subespacio $(n-1)$ – dimensional E_1 de E en que la restricción del producto interno es una función ***semidefinida positiva*** cuyo ***rango*** es igual a $n-2$.

Demostración. Sea z un vector temporal unitario cualquiera da

(1) Para demostrar la primera parte basta probar, evidentemente, que si z_1 es un vector temporal entonces es $(z_1 | z) \neq 0$. En virtud de (1.5.1) podemos escribir

$$z_1 = \lambda z + y_1, \quad [(z | z) = -1, \quad (z | y_1) = 0, (y_1 | y_1) \geq 0\,]. \tag{1.5.3}$$

Ahora bien, por (1.5.2), se tiene $\lambda^2 > (y_1 | y_1) \geq 0$; por consiguiente es $\lambda \neq 0$, y resulta

$$(z_1 | z) = \lambda (z | z) \neq 0.$$

(2) Debe demostrarse ahora que si l es un vector lumínico cualquiera, no puede ser ortogonal al vector temporal unitario z. La ecuación (1.5.1) y la observación que le sigue nos permite escribir

$$l = \lambda z + y, \qquad [(z | z) = -1, \quad (z | y) = 0, \qquad (y | y) > 0\,];$$

y puesto que de (1.5.2) se deduce que $\lambda^2 = (y | y) > 0$ y por consiguiente $l \neq 0$, resulta que

$$(l | z) = \lambda (z | z) \neq 0.$$

(3) Sean l_1 y l_2 dos vectores lumínicos ortogonales. Podemos escribir ahora,

$$l_1 = \lambda_1 z + y_1 \ , \ l_2 = \lambda_2 z + y_2$$

$$[(z \mid z) = -1, \quad (z \mid y_1) = (z \mid y_2) = 0 \ , \ (y_1 \mid y_1) > 0, \ (y_2 \mid y_2) > 0 \,].$$

Se obtiene entonces

$$(l_1 \mid l_2) = (\lambda_1 z + y_1 \mid \lambda_2 z + y_2) = \lambda_1 \lambda_2 (z \mid z) + (y_1 \mid y_2),$$

y por tanto, en virtud de la hipótesis,

$$-\lambda_1 \lambda_2 + (y_1 \mid y_2) = 0; \tag{1.5.4}$$

y por la misma razón se tiene

$$(l_1 \mid l_1) = (\lambda_1 z + y_1 \mid \lambda_1 z + y_1) = -(\lambda_1)^2 + (y_1 \mid y_1) = 0,$$

de donde se deduce que $(\lambda_1)^2 = (y_1 \mid y_1)$. Y, semejantemente se comprueba que $(\lambda_2)^2 = (y_2 \mid y_2)$. Ahora bien, de (1.5.4) resulta que

$$(\lambda_1)^2 (\lambda_2)^2 = (y_1 \mid y_2)^2,$$

y por tanto

$$(y_1 \mid y_1)(y_2 \mid y_2) = (y_1 \mid y_2)^2. \tag{1.5.5}$$

Los vectores y_1, y_2 pertenecen al complemento ortogonal de z, espacio en el que el producto interno es definido positivo, y (1.5.5) muestra que, para dichos vectores, la desigualdad de Schwarz se reduce a una igualdad, luego, según es sabido, y_1 e y_2 son linealmente dependientes, y por tanto es $y_2 = \lambda y_1$; luego (1.5.4) toma la forma

$$-\lambda_1 \lambda_2 + (y_1 \mid \lambda y_1) = -\lambda_1 \lambda_2 + \lambda (y_1 \mid y_2) = 0,$$

de donde se deduce que

$$\lambda_1\lambda_2 = \lambda(\lambda_1)^2,$$

y por consiguiente

$$\lambda_2 = \lambda\lambda_1.$$

Podemos escribir finalmente

$$l_2 = \lambda\lambda_1 z + \lambda y_1 = \lambda l_1,$$

es decir que l_1 y l_2 son linealmente dependientes.

Recíprocamente, si $l_2 = \lambda l_1$, se tiene

$$(l_1 \mid l_2) = (l_1 \mid \lambda l_1) = \lambda(l_1 \mid l_1) = 0.$$

(4) Si l es un vector lumínico cualquiera se tiene

$$l = \lambda_1 z + y_1, \quad [(z \mid z) = -1, \ (z \mid y) = 0, \ (y_1 \mid y_1) > 0].$$

Además es

$$(l \mid l) = -(\lambda_1)^2 + (y_1 \mid y_1) = 0,$$

y por tanto $\lambda_1 = \pm\sqrt{(y_1 \mid y_1)}$. Luego el vector lumínico l puede expresarse en una de las formas

$$l = \sqrt{(y_1 \mid y_1)}.\, z + y_1 \quad \text{o bien} \quad l' = -\sqrt{(y_1 \mid y_1)}.\, z + y_1, \qquad (1.5.6)$$

donde $(z \mid z) = -1$, $(z \mid y_1) = 0$; además, se observa inmediatamente que cada vector de una de esas dos formas es un vector lumínico. Probaremos en primer lugar que el conjunto de los vectores de E que son ortogonales a un vector lumínico dado de una de las dos referidas formas (1.5.6), constituye un subespacio E_1 de dimensión $n-1$.

Consideremos un vector lumínico l de la primera forma. Si x es un vector cualquiera de E ortogonal a l, que mediante (1.5.1) se expresa en la forma $\lambda z+y$, donde $(z\,|\,y) = 0$, se tiene

$$(x\,|\,l) = -\lambda\sqrt{(y_1\,|\,y_1)} + (y\,|\,y_1) = 0,$$

y por consiguiente es

$$\lambda = \frac{(y\,|\,y_1)}{\sqrt{(y_1\,|\,y_1)}}$$

Es decir que todo vector x ortogonal a l se expresa en la forma

$$x = \frac{(y\,|\,y_1)}{\sqrt{(y_1\,|\,y_1)}}\,z + y, \qquad\qquad y \in E^+.$$

Inversamente, se cumprueba inmediatamente que todos los vectores x de esta forma son ortogonales a l, y constituyen por tanto el subespacio vectorial E_1 de los vectores ortogonales a l. La aplicación

$$y \in E+ \to \frac{(y\,|\,y_1)}{\sqrt{(y_1\,|\,y_1)}}\,z + y$$

del subespacio E^+ en E_1 es inyectiva porque de la igualdad

$$\frac{(y\,|\,y_1)}{\sqrt{(y_1\,|\,y_1)}}\,z + y = \frac{(y'\,|\,y_1)}{\sqrt{(y_1\,|\,y_1)}}\,z + y, \tag{1.5.7}$$

donde $(z\,|\,y) = (z\,|\,y') = 0$, se deduce, llevando a cabo el producto interno de ambos miembros por z, que $(y\,|\,y) = (y\,|\,y')$, y por tanto resulta de (1.5.7) que $y = y'$. Se ve de inmediato que dicha aplicación es un isomorfismo de E^+ sobre E_1. Luego E_1 es de la misma dimensión que E^+ o sea $n\text{–}1$.

Una demostración semejante puede hacerse en el caso de un vector lumínico l' de la segunda forma (1.5.6).

Para demostrar finalmente que la restricción del producto interno al espacio E_1 tiene rango $n-2$ basta demostrar que la dimensión de su núcleo es 1.

Sea y_1 un vector del núcleo de la restricción de Φ a E_1, tal, por tanto, que

$$(y_1 | y) = 0 \text{ para todo } y \in E_1.$$

Esta última condición implica, por cuanto $y_1 \in E_1$, que $(y_1 | y_1) = 0$, o sea que y es un vector lumínico. Según la propiedad (3), ya demostrada, puesto que l e y_1 son vectores lumínicos ortogonales, y_1 debe ser linealmente dependiente de l. Dado que y_1 es un elemento cualquiera del núcleo resulta que éste es el subespacio de E_1 de dimensión 1 generado por l.

1.6. Conos del futuro y conos del pasado. Seguiremos considerando aquí un espacio seudoeuclideano E de dimensión n e índice $n-1$.

El conjunto T de sus vectores temporales, o sea de aquellos vectores z para los cuales es $(z | z) < 0$ se descompone en dos subconjuntos T^+ y T^- de la manera siguiente. Definamos en T una relación de equivalencia de la manera siguiente: Dos elementos z_1 y z_2 de T son equivalentes si

$$(z_1 | z_2) < 0.$$

Las propiedades de simetría y reflexividad de esta relación son evidentes. Demostraremos la transitividad. Sean z_1, z_2, z_3 tres vectores temporales tales que $(z_1 | z_2) < 0$ y $(z_2 | z_3) < 0$. Debemos probar que es $(z_1 | z_3) < 0$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que z_2 es un vector unitario, es decir que $(z_2 | z_2) = -1$. Según (1.5.1) puede escribirse para i = 1, 3,

$$z_i = \lambda_i z_2 + y_i, \quad \text{donde} \quad \lambda_i = -(z_i | z_2) \tag{1.6.1}$$

e y_1, y_3 están en el complemento ortogonal F de z_2. Resulta de aquí que

$$(z_i | z_i) = -(\lambda_i)^2 + (y_i | y_i), \tag{1.6.2}$$

y

$$(z_1 | z_3) = (\lambda_1 z_2 + y_1 \mid \lambda_3 z_2 + y_3) = -\lambda_1 \lambda_3 + (y_1 | y_3) \tag{1.6.3}$$

De (1.6.2) se sigue, puesto que z_1 y z_2 son temporales, que

$$(y_i | y_i) < (\lambda_i)^2 \ , \ i = 1,3. \tag{1.6.4}$$

Ahora bien, sabemos que la restricción del producto interno es definida positiva en el espacio F; luego puede ser aplicada la desigualdad de Schwarz a los vectores y_1 e y_3, y se obtiene

$$(y_1 | y_3)^2 \leq (y_1 | y_1)(y_3 | y_3) \leq (\lambda_1)^2 (\lambda_3)^2,$$

y por tanto

$$|(y_1 | y_3)| \leq |\lambda_1 \lambda_3|.$$

Se deduce de aquí que el signo de $(z_1 | z_3)$, que es el del último miembro de la ecuación (1.6.3), es el signo de $-\lambda_1\lambda_3$, o sea negativo, por cuanto, según (1.6.1), es $\lambda_i = -(z_i | z_2) > 0$ para $i = 1, 3$. Con lo cual queda establecida la propiedad transitiva de nuestra relación.

La relación de equivalencia que hemos introducido entre los vectores temporales permite dividir al conjunto de todos ellos en dos subconjuntos disjuntos que son las clases de equivalencia. Dado un vector temporal z_1 arbitrario, si z es cualquier otro vector temporal, o bien es $(z_1|z) < 0$, y entonces z pertenece a la misma clase que z_1, o bien es $(z_1|-z) < 0$, y entonces z pertenece a la misma clase que $-z_1$. Son esos subconjuntos los que llamaremos T^+ y T^-.

Los subconjuntos T^+ y T^- son convexos, pues si z_1 y z_2 pertenecen a uno de ellos, y por tanto es $(z_1|z_2) < 0$, entonces para $0 \leq t \leq 1$ se tiene

$$(tz_2 + (1-t)\,z_1 \,|\, tz_2 + (1-t)z_1) = t^2\,(z_2|z_2) + 2t\,(1-t)\,(z_2|z_1) \\ + (1-t)^2\,(z_1|z_1) < 0$$

y por tanto $tz_1 + (1-t)z_2$ es un vector temporal; el cual, por cuanto es

$$(tz_2 + (1-t)z_1 \,|\, z_1) = t\,(z_2|z_1) + (1-t)\,(z_1|z_1) < 0,$$

pertenece a la misma clase que z_1 y z_2.

Es claro que el conjunto T de los vectores temporales no es convexo, porque si z_1 y z_2 son vectores que pertenecen a clases disjuntas, es decir tales que $(z_1|z_2) > 0$, entonces la función continua

$$t \mapsto (tz_2 + (1-t)z_1 \,|\, z_1) \qquad\qquad (0 \leq t \leq 1),$$

que toma el valor $(z_1|z_1) < 0$ para $t = 0$, toma el valor $(z_2|z_1) > 0$ para $t=1$. Por consiguiente existe un valor t_o $(0 \leq t_o \leq 1)$ para el cual es

$$(t_o z_2 + (1-t_o)z_1) = 0,$$

lo que prueba que T no es convexo.

1.7 Rotaciones del plano seudoeuclideano.

Definición 1.7.1. Se llama **rotación del espacio seudoeuclideano** E a una transformación lineal φ de E en sí mismo – tal que

$$(\varphi x \mid \varphi y) = (x \mid y), \tag{1.7.1}$$

es decir que conserva el producto interno. φ es sobreyectiva porque si fuera $\varphi x = \varphi y$ se tendría

$$(x-y,z) = (\varphi(x-y) \mid \varphi z) = (\varphi(x) - \varphi(y) \mid \varphi z) = 0,$$

para todo z de E; de donde resulta que $x = y$. Por cuanto E es de dimensión finita, φ es entonces un automorfismo. Es evidente, además, que transforma a los vectores espaciales, temporales y lumínicos en vectores de la misma naturaleza respectivamente.

Supongamos ahora que E es el ***plano euclideano*** y que φ es una rotación del mismo. Vamos a suponer en adelante que se cumple la condición

$$det\ \varphi > 0, \tag{1.7.2}$$

lo cual implica que φ trasforma a cada base de E en otra de la misma orientación [1].

Según hemos visto en la sección 1.4, el cono de luz se reduce a dos rectas engendradas por dos vectores lumínicos l_1 y l_2 que constituyen una base, tales que $(l_1 \mid l_1) = 0, (l_2 \mid l_2) = 0, (l_1 \mid l_2) = -1$.

Puesto que $(x \mid x) = 0$ implica que $(\varphi x \mid \varphi x) = 0$, cada vector lumínico se transforma en otro vector lumínico. Resulta, en parti-

---

1) Tola, Algebra lineal II (Algebra exterior). IMUNI (1968), corolario 1 de la proposición 2.3.1.

cular, que las rectas engendradas por l_1 y l_2, o bien se transforma cada una en sí misma o bien cada una de ellas se transforma en la otra. Si este último fuera el caso se tendría que $\varphi l_1 = \lambda_1 l_2$ y $\varphi l_2 = \lambda_2 l_1$, por tanto φ transformaría a la base $\{l_1, l_2\}$ en la base $\{\lambda_1 l_2, \lambda_2 l_1\}$ que pertenece a la orientación opuesta, en contradicción con la suposición (1.7.2.). Por consiguiente deben cumplirse relaciones de la forma $\varphi l_1 = \lambda_1 l_1$ y $\lambda l_2 = \lambda_2 l_2$. Se deduce entonces que

$$-\lambda_1\lambda_2 = \lambda_1\lambda_2 (l_1 \mid l_2) = (\varphi l_1 \mid \varphi l_2) = (l_1 \mid l_2) = -1,$$

y por consiguiente $\lambda_1\lambda_2 = 1$. Si escribimos $\lambda_1 = \lambda$, tendremos que $\lambda_2 = 1/\lambda$, y por tanto

$$\varphi l_1 = \lambda l_1 \qquad y \qquad \varphi l_2 = \frac{l_2}{\lambda}. \tag{1.7.3}$$

Dados dos números cualesquiera a y c, diferentes de cero, se comprueba mediante un sencillo cálculo que los vectores

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (l_1 - a^2 l_2) \quad , \; e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\frac{c}{a}) l_1 + acl_2], \tag{1.7.4}$$

constituyen una base de E tal que para cada vector $\xi = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ se cumple la relación

$$(x \mid x) = a^2 \xi_1{}^2 - c^2 \xi_2^2.$$

De (1.7.4) se deduce

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1 + \frac{a}{c}\, e_2), \qquad l_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\frac{e_2}{ac} - \frac{e_1}{a^2}). \tag{1.7.5}$$

Empleando las fórmulas (1.7.3) resulta

$$x' = \varphi x = \left[\frac{1}{2}\ (\lambda + \frac{1}{\lambda}\ )\ \xi_1 + \ \frac{c}{2a}\ (\lambda - \frac{1}{\lambda}\ )\ \xi_2\right] e_1$$

$$+ \left[\frac{1}{2}\ (\ \frac{a}{c}\ (\lambda - \ \frac{1}{\lambda})\xi_1 + \ \frac{1}{2}\ \ (\lambda + \frac{1}{\lambda}\ )\ \xi_2\right] e_2.$$

Si designamos ahora por ξ_1' y ξ_2' a las componentes de $\xi' = \varphi x$ respecto de la base $\{e_1, e_2\}$, se obtienen las ***fórmulas de transformación***

$$\xi_1' = \quad \left[\frac{1}{2}\ (\lambda + \frac{1}{\lambda})\xi_1 + \ \frac{c}{2a}\ \ (\lambda - \frac{1}{\lambda}\ )\ \xi_2\right] e_1\ ,$$

$$\xi_2' = \quad \left[\frac{1}{2}\ \ (\ \frac{a}{c}\ \ (\lambda - \ \frac{1}{\lambda}\ \ )\ \xi_1 + \frac{1}{2}\ (\lambda + \ \frac{1}{\lambda}\ )\ \xi_2\right] e_2\ ;$$

y si v es el número definido por la relación

$$\lambda = \left[\frac{c - v}{c + v}\right]^{1/2}$$

puede escribirse

$$\xi_1' = \frac{\xi_1 - \ \dfrac{v}{a}\ \xi_2}{\left[1 - \ \dfrac{v^2}{c^2}\right]^{1/2}}\ , \qquad \xi_2' = \frac{-\ \dfrac{a}{c^2}\ v\xi_1 + \xi_2}{\left[1 - \ \dfrac{v^2}{c^2}\right]^{1/2}} \qquad (1.7.6)$$

En el caso particular en que es

$$(x|x) = \xi_1^2 - c^2\xi_2^2,$$

es decir en que a=1, y en que la base (1.7.4) se reduce por tanto a

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(l_1 - l_2) \quad , e_2 \;=\; \frac{c}{\sqrt{2}}\,(l_1 + l_2)\,,$$

las fórmulas anteriores toman la forma

$$\xi_1' = \frac{\xi_1 - v\xi_2}{\left[1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right]^{1/2}} \quad , \xi_2' = \frac{-\dfrac{v}{c^2}\,\xi_1 + \xi_2}{\left[1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right]^{1/2}} \quad ,(1.7.6)$$

las cuales desempeñan un papel de capital importancia en la teoría de la relatividad, en la que, como veremos en el parágrafo siguiente toman el nombre de ***fórmulas de transformación de Lorentz.***

Consideremos ahora una nueva base formada por los vectores e_1 y $(1/c)e_2$, que seguiremos designando por e_1 y e_2 respectivamente. Dicha base, como es fácil comprobar, es ***ortonormal.*** Respecto de ella las componentes del vector x, que designaremos por ξ y η, son dadas por $\xi = \xi_1$ y $\eta = c\xi_2$; y las de x', que designaremos por ξ' y η', son $\xi' = \xi_1'$ y $\eta' = c\xi_2'$, de modo que las fórmulas (1.7.6) cambian en

$$\xi' = \frac{\xi - \frac{v}{c}\eta}{\left[1 - \frac{c^2}{c^2}\right]^{1/2}}, \quad \eta' = \frac{-\frac{v}{c}\xi + \eta}{\left[1 - \frac{v_2}{c^2}\right]^{1/2}};$$

y si definimos a θ de modo que

$$\cosh \theta = \frac{1}{\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{1/2}}, \quad \operatorname{senh} \theta = \frac{-\frac{v}{c}}{\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{1/2}},$$

las fórmulas toman la forma

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi \cosh \theta + \eta \operatorname{senh} \theta \\ \eta' &= \xi \operatorname{senh} \theta + \eta \cosh \theta \end{aligned} \tag{1.7.7}$$

que presentan evidente analogía con las fórmulas de rotación del plano euclideano y corresponden a una ***rotación del plano seudo-euclideano en el ángulo seudoeuclideano*** θ.

Puede observarse que se cumple la relación

$$(\xi')^2 - (\eta')^2 = \xi^2 - \eta^2, \tag{1.7.8}$$

y por tanto, que $\| x \| = \| x' \|$. Se tiene además que $| \xi^2 - \eta^2 | = \| x \| \; \| x' \|$.

De (1.7.7) resulta que

$$(x|x') = \xi\xi' - \eta\eta' = (\xi^2 - \eta^2) \cosh \theta,$$

y puesto que $\cosh \theta > 0$, se deduce que $(x|x')$ y $\xi^2 - \eta^2$ tienen el mismo signo. Las proposiciones 1.4.1 y 1.4.2 implican entoncces que si x es un vector espacial, en cuyo caso x' también lo es, ambos están en uno de los sectores S_1 o S_2; y si x es temporal, en cuyo caso también lo es x', ambos están en uno de los sectores T^+ o T^-.

Se deduce también de (1.7.7), supuesto que x es espacial o temporal, y teniendo en cuenta las observaciones precedentes y el ejemplo de la sección 1.3

$$\cosh \theta = \frac{(x|x')}{\xi^2 - \eta^2} = \frac{|(x|x')|}{|x| \,.\, |x'|}, \text{ y}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\xi\eta' - \xi'\eta}{\xi^2 - \eta^2} = \frac{\Delta(x,y)}{|x| \,.\, |x'|}$$

es decir que ***si x es un vector cualquiera, temporal o espacial, θ es el ángulo seudoeuclideano constante que hace con su imagen x'.***

Las fórmulas (1.7.7) puede interpretarse también, como es sabido, como ecuaciones de cambio de la base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ en una nueva base $\{e_1', e_2'\}$, que es también ortonormal, dada por las fórmulas

$$e_1' = e_1 \cosh \theta - e_2 \operatorname{senh} \theta$$
$$e_2' = e_1 \operatorname{senh} \theta - e_2 \cosh \theta$$

e_1' y e_1 son ambos espaciales. Se tiene que $(e_1|e_1') = \cosh \theta > 0$, luego ambos vectores están en el mismo sector S_1 o S_2. El ángulo θ' que hacen es tal que

$$\cosh \theta' = (e_1 | e_1') = \cosh \theta,$$

$$\operatorname{senh} \theta' = \Delta(e_1, e_1') = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cosh \theta & -\operatorname{senh} \theta \end{vmatrix} = -\operatorname{senh} \theta.$$

Por tanto e_1 y e_1' hacen un ángulo igual a $-\theta$.

e_2 y e_2' son temporales. Se tiene $(e_2 | e_2') = -\cosh \theta < 0$, luego ambos vectores están en el mismo sector T^+ o T^-. El ángulo θ'' que hacen es tal que

$$\cosh \theta'' = (e_2 | e_2') = \cosh \theta,$$

$$\operatorname{senh} \theta'' = \Delta(e_2, e_2') = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \operatorname{senh} \theta & -\cosh \theta \end{vmatrix} = -\operatorname{senh} \theta.$$

Luego el ángulo de e_2 y e_2' es también $-\theta$.

Podemos establecer por consiguiente que ***las ecuaciones (1.7.7), y por tanto las ecuaciones (1.7.6) son las ecuaciones de cambio de la base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ por la base ortonormal $\{e_1', e_2'\}$ mediante una rotación seudoeuclideana de ángulo $-\theta$.***

2. El espacio de Minkowski y la transformación de Lorentz

2.1. Introducción. Nuestro propósito en este parágrafo es mostrar la forma cómo el concepto algebraico de espacio seudoeuclideano tiene aplicación en la teoría de la relatividad especial. No nos detendremos, por esa razón, en los aspectos físicos, sino en cuanto sea estrictamente necesario para cumplir nuestro objetivo. Es así como, por ejemplo, no intentaremos justificar la utilización de funciones lineales para expresar las transformaciones de que trataremos. Tal justificación se funda en hipótesis físicas acerca de la homogeneidad e isotropía del espacio, y puede encontrarse en las obras dedicadas a la teoría de la relatividad. Tampoco nos ocuparemos en probar que esas funciones lineales pueden reducirse a la forma simple (2.2.1) debido a razones semejantes. Menos aún podremos detenernos en las complejas consideraciones experimentales y teóricas que condujeron a Albert Einstein a establecer los principios en que se funda la teoría de la relatividad especial. De esa manera, por cuanto el propósito de esta nota es principalmente de orden matemático, haremos uso de un procedimiento en el que, si bien prestamos muy escasa atención a las razones de orden físico, hacemos uso de un lenguaje que trata de no desconocer la significación física de la cuestión que nos interesa examinar.

2.2. El universo de la teoría de la relatividad especial. Definiciones I: Universo y sistemas inerciales.

Llamaremos **universo** al par formado por:

1) ***Un espacio afín real* U *de 4 dimensiones,*** que está asociado a un espacio vectorial V, que es por tanto también de 4 dimensiones. Cada punto de U se llama ***suceso del universo*** o simplemente ***suceso.***

2) ***Un conjunto infinito de elementos:*** S, S', S" ..., llamados ***sistemas inerciales*** que cumplen las siguientes condiciones:

Dado un sistema inercial S, si S' es otro sistema inercial cualquiera, existen en U los referenciales

$$R(S) = (0; \{e_1, e_2, e_3, \theta\}),$$

y $$R(S,S') = (0; \{e'_1, e'_2, e'_3, \theta'\})$$

y es determinado un número positivo $v = v$ (S, S') que se llama **velocidad del sistema S' respecto del sistema S.** Si (x, y, z, t) y (x', y', z', t') designan a las coordenadas de un suceso cualquiera respecto de R(S) y R(S, S') respectivamente, las ecuaciones de cambio de coordenadas entre esos referenciales tienen la forma

$$\begin{aligned} x' &= A(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= Bx + Ct \end{aligned}$$

El determinante $A(C + Bv)$ de este sistema de ecuaciones lineales es, según se sabe, diferente de cero. ***Supondremos además que A y C son positivos,*** de manera que, para $t = 0$, x y x' tienen el mismo signo, y que t' es creciente al mismo tiempo que t.

Diremos que (x, y, z, t) y (x', y', z', t') son las ***coordenadas espacio-temporales*** del suceso considerado, para los respectivos sistemas y referenciales. Los tres primeros ejes se llaman ***ejes espaciales*** y las correspondientes coordenadas se llaman **coordenadas espaciales;** y el cuarto eje se llama ***eje temporal*** y la correspondiente coordenada se llama ***coordenada temporal.*** Diremos entonces que el suceso tiene lugar, o bien que ocurre, en el ***punto*** (x, y, z) y en el ***instante*** t, para el sistema S, y en el punto (x', y', z') y el instante t' para el sistema S'. Diremos también que los referenciales R(S) y R(S, S') son ***referenciales acordados*** de los sistemas S y S', que al referencial R(S) de S le corresponde el referencial R(S, S') de S' acordado con él, y que el referencial R(S) pertenece al sistema S y el referencial R(S, S') al sistema S'.

La inversión del sistema (2.2.1) conduce a las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
x &= (Cx' + Avt')/A\,(C+Bv) \\
y &= y' \\
z &= z' \\
t &= (-Bx' + At')/A(C+Bv)
\end{aligned}
\qquad (2.2.2)
$$

De los sistemas (2.2.1) y (2.2.2) se deduce que las bases de V, $\{e_1, e_2, e_3, \theta\}$ y $\{e_1', e_2', e_3', \theta'\}$, asociadas a los referenciales R(S) y R(S, S') están relacionadas por las ecuaciones de cambios de base

$$
e_1 = Ae_1' + B\theta' \ , e_2 = e_2' \ , e_3 = e_3' \ , \theta = Be_1' + C\theta' \qquad (2.2.3)
$$

y

$$
e_1' = \frac{Ce_1 - B\theta}{A(C+Bv)} \ , \ e_2' = e_2 \ , \ e_3' = e_3 \ , \qquad \theta' = \frac{ve_1 + \theta}{C+Bv} \ . \qquad (2.2.4)
$$

Definiciones II: Trayectorias y velocidad de la luz.

Dado un sistema referencial cualquiera S, sean *(x, y, z, t)* las coordenadas de un suceso referido al referencial R(S). Se llama ***trayectoria en el sistema S*** u observada en dicho sistema, a una curva diferenciable del espacio *xyz* definida por las ecuaciones paramétricas.

$$
x = x[t] \ , \ y = y[t] \ , \ z = z[t] \ , \ a \le t \le b.
$$

Una trayectoria define por tanto a un conjunto de sucesos *(x, y, z, t)*; y la ***velocidad*** en cada uno de sus puntos se define de la manera que es usual en el análisis, es decir como el vector cuyas componentes son las derivadas $x'[t], y'[t], z'[t]$.

Si introducimos en las ecuaciones paramétricas escritas anteriormente las fórmulas (2.2.2), se obtienen las relaciones

$$(Cx' + Avt')/A(C + Bv) = x[(-Bx' + At')/A(C + Bv)],$$
$$y' = y[(-Bx' + At')/A(C + Bv)],$$
$$z' = z[(-Bx' + At')/A(C + Bv)],$$

Si la primera de estas ecuaciones admite una solución $x' = x'[t']$ para $a' \leq t' \leq b'$ diremos que las ecuaciones

$$x' = x'[t'],$$
$$y' = y[(-Bx'[t'] + At'/A(C + Bv)] = y'[t'],$$
$$z' = z[(-Bx'[t'] + At'/A(C + Bv) = z'[t'],$$

representan, en el sistema S', a la parte de la trayectoria correspondiente al intervalo de la variable t comprendido entre los ins tantes de los sucesos cuyas coordenadas en el referencial R(S, S') son

$$(x'[a'], y'[a'], z'[a'], a') \text{ y } (x'[b'], y'[b'], z'[b'], b').$$

Consideremos ahora en el sistema S' una **trayectoria rectilinea** de velocidad constante, es decir dada por ecuaciones de la forma

$$x' = \alpha t' + \beta \ , \ y' = \gamma t' + \delta \ , \ z' = \quad t' + \zeta \ , \ (a' \leq t' \leq b'). \tag{2.2.5}$$

Las ecuaciones de la trayectoria en el sistema S se obtienen de las relaciones

$$Ax - Avt = \alpha(Bx + Ct) + \beta$$
$$y = \gamma(Bx + Ct) + \delta$$
$$z = \varepsilon\,(Bx + Ct) + \zeta$$

Si admitimos que se cumple la condición.

$$A - B\alpha \neq 0, \tag{2.2.6}$$

resulta de la primera de las tres ecuaciones anteriores que

$$x = \frac{(C\alpha + Av)t + \beta}{A - B\alpha} ;$$

luego, sustituyendo este valor en las otras dos se pueden obtener las ecuaciones de la trayectoria y se ve que las componentes del vector velocidad para cualquier valor de t es

$$\frac{C\alpha + Av}{A - B\alpha}, \quad \frac{C + Bv}{A - B\alpha} A\gamma , \quad \frac{C + B}{A - B\alpha} A . \tag{2.2.7}$$

Se ve de esta manera que para el sistema S la trayectoria es también rectilínea y de velocidad constante.

Si consideramos, en particular, en el sistema S', la trayectoria de velocidad nula de ecuaciones paramétricas

$$x' = x_o' \ , \ y' = y_o' \ , \ z' = z_o',$$

formada por sucesos que tienen coordenadas espaciales idénticas, sus ecuaciones en el sistema S son

$$x = vt + (1/A)x_o' \ , \ y = y_o' \ , \ z = z_o'.$$

Es pues una trayectoria rectilínea de velocidad constante. Es decir que el conjunto de todos los sucesos cuyas coordenadas espaciales relativas al referencial R(S, S') son números constantes x_o', y_o', z_o' determina en el sistema S, una trayectoria rectilínea paralela al eje x, de velocidad constante v. En este sentido ***podemos considerar justificada la denominación de velocidad del sistema S' relativa al sistema S que hemos dado al número v, y añadir que esa velocidad es paralela al eje x.***

El siguiente es uno de los postulados fundamentales de teoría de la relatividad especial.

Postulado de Einstein de la teoría de la relatividad especial:

Cada trayectoria rectilínea de velocidad constante igual al número c –que se llama velocidad de la luz–, dada en un sistema inercial S, es también una trayectoria rectilínea de velocidad constante c en cualquier otro sistema inercial S'.

Consideremos en S' una trayectoria (2.2.5) situada en el plano xy, tal, por consiguiente, que es $\varepsilon = \zeta = 0$. Si la velocidad de esa trayectoria es la velocidad c de la luz, se tendrá que

$$\alpha^2 + \gamma^2 = c^2.$$

Las componentes de la velocidad de esa trayectoria para el sistema S son dadas por (2.2.7), y se reducen a

$$\frac{C\alpha + v}{A - B\alpha}, \quad \frac{AC + Bv}{A - B\alpha}\gamma, \quad 0.$$

Según el postulado anterior, cualquiera que sea α se deberá tener

$$(C\alpha + Av)^2 + (C + Bv)^2 A^2 (c^2 - \alpha^2) - c^2 (A - B\alpha)^2 = 0,$$

y por tanto deben cumplirse las relaciones

$$C^2 - A^2 (C + Bv)^2 - B^2 c^2 = 0, \qquad (2.2.8)$$

$$ACv + ABc^2 = 0, \qquad (2.2.9)$$

$$A^2 v^2 + A^2 (C + Bv)^2 c^2 - A^2 c^2 = 0. \qquad (2.2.10)$$

la solución de este sistema de ecuaciones en las incógnitas A^2, B^2,

C^2 es dada por

$$A^2 = C^2 = \frac{1}{1-v^2/c^2} \quad , \; B^2 = \frac{v^2/c^4}{1-v^2/c^2}$$

Como ya hemos señalado, A y C son positivos; luego se tiene que

$$A = C = \frac{1}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}$$

Además, de (2.2.9) se sigue que $B = -Cv/c^2$; por tanto

$$B = \frac{-v/c^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}$$

Por consiguiente las fórmulas de transformación, llamadas **fórmulas de transformación de Lorentz,** tienen la forma

$$x' = \frac{x-vt}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}, y' = y, \; z' = z \; , \; t' = \frac{(-v/c^2)x + t}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \; . \qquad (2.2.11)$$

Las fórmulas de la transformación inversa son entonces las siguientes

$$x = \frac{x'+vt'}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}, y = y' \; , \; z = z' \; , \; t = \frac{(v/c^2)x' + t'}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \; , \qquad (2.2.12)$$

que tienen forma enteramente semejante a las anteriores salvo el cambio de v por $-v$

Puesto que las coordenadas espacio-temporales de un suceso cualquiera del universo deben ser reales para todo sistema inercial, las fórmulas anteriores implican que ***la velocidad de un sistema inercial cualquiera respecto de otro no puede ser***

mayor que la velocidad c de la luz, lo cual constituye una con secuencia notable de la teoría de la relatividad especial.

Si representamos por ρ a la expresión $\dfrac{1}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}$, la fórmulas (2.2.3) y (2.2.4) que dan las relaciones entre las bases asociadas a los referenciales R(S) y R(S, S') se escriben en la forma

$$e_1 = \rho(e_1' + (v/c^2)\theta') \ , \ \ \theta = \rho(ve_1' + \theta'), \tag{2.2.13}$$

y

$$e_1' = \rho(e_1 + (v/c^2)\theta) \ , \ \ \theta' = \rho(ve_1 + \theta). \tag{2.2.14}$$

2.3 Invariantes de la teoría de la relatividad especial.

Supongamos que es dado un sistema inercial S. Sean (x,y,z,t) y (x',y',z',t') las coordenadas de un suceso cualquiera P respecto de dos referenciales acordados R(S) y R(S, S') donde S' es un sistema inercial arbitrario. Las fórmulas (2.2.12) permiten establecer, mediante un sencillo cálculo que se cumple la igualdad

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2.$$

Esta relación prueba que dado un sistema inercial S ***la expresión $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ tiene un valor invariante para cada suceso, cualquiera que sea el sistema inercial en el que sean determinadas sus coordenadas espacio–temporales.*** En forma abreviada se dice simplemente que dicha expresión es **un invariante** de la teoría de la relatividad especial.

Dados dos sucesos cualesquiera P_1 y P_2, cuyas coordenadas respecto de dos sistemas inerciales son

$$(x_i, y_i, z_i, t_i) \quad \text{y} \quad (x_i', y_i', z_i', t_i'), \qquad (i=1,2),$$

se cumple que

$$c^2(t_2'-t_1')^2-(x_2'-x_1')^2=c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2.$$

es decir que la expresión $c^2\,(t_2-t_1)^2-(x_2-t_1)^2$ es un invariante que podemos considerar como la **distancia** espacio–temporal entre los sucesos P_1 y P_2.

2.4 Espacio de Minkowski.

Nos proponemos ahora introducir en el espacio vectorial V una estructura de espacio seudoeuclideano de dimensión 4 e índice 3, que guarde relación con la estructura del universo, a cuyo fin debemos probar que podemos definir en él, adecuadamente, una función bilineal simétrica no degenerada e indefinida.

Partimos, como en la sección anterior, de la consideración de un sistema inercial cualquiera S dado. Definamos en V la función bilineal, simétrica y no degenerada Φ tal que, dados los vectores cualesquiera

$$v_1=x_1e_1+y_1e_2+z_1e_3+t_1\theta \quad \text{y} \quad v_2=x_2e_1+y_2e_2+z_2e_3+t_2\theta$$

donde $\{e_1, e_2, e_3, \theta\}$ es la base de U asociada al referencial R(S), se tiene

$$\Phi(v_1, v_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2-c^2t_1t_2. \qquad (2.3.1)$$

Según hemos establecido en la sección precedente, el segundo miembro de (2.3.1) tiene el mismo valor cualquiera que sea el sistema inercial que se considere, por cuanto (x_i, y_i, z_i, t_i), $i=1,2$, son las coordenadas del suceso P_i tal que v_i es el vector que corresponde al par de puntos $(0, P_i)$ del espacio afín U.

El espacio V, provisto del producto interno dado por la fórmula

$$(v_1 | v_2) = \Phi(v_1, v_2),$$

es evidentemente un espacio vectorial seudoeuclideano de dimensión 4 e índice 3 que se llama **espacio de Minkowski,** y por tanto el espacio U es un espacio afín asociado al espacio de Minkowski, al cual, siempre que no haya lugar a confusión, llamaremos también espacio de Minkowski, y constituye una representación del universo relativa a un sistema inercial cualquiera S al que se distingue como sistema **en estado de reposo.**

Si designamos por φ a la aplicación del espacio seudoeuclideano V sobre sí mismo que hace corresponder a los vectores

$$v_1 = x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3 + t_1\theta \quad \text{y} \quad v_2 = x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3 + t_2\theta$$

los vectores

$$v_1' = x_1'e_1 + y_1'e_2 + z_1e_3 + t_1'\theta \quad \text{y} \quad v_2' = x_2'e_1 + y_2'e_2' + z_2'e_3 + t_2'\theta$$

respectivamente, de modo que los componentes se transformen mediante las fórmulas (2.2.11), se puede comprobar de inmediato que se cumple la relación

$$(v_1 | v_2) = (v_1' | v_2') = (\varphi v_1 | \varphi v_2),$$

y por tanto φ es una rotación seudoeuclideana del espacio V, lo cual puede deducirse también por simple comparación de las fórmulas (2.2.11) con las fórmulas (1.7.6).

Sin embargo, para nuestros fines, las fórmulas (2.2.11) pueden ser interpretadas, según ya señalamos, como correspondientes al cambio de la base $\{e_1, e_2, e_3, \theta\}$ asociada al referencial R(S) por la base $\{e_1', e_2', e_3', \theta'\}$ asociada al referencial R(S, S'), resultante de una rotación no euclideana en que los vectores e_2 y e_3 quedan invariables y los vectores e_2 y e_3 cambian en los vectores e_1' y θ'.

2.5 Composición de velocidades. Como único ejemplo de aplicación de las fórmulas de Lorentz nos limitaremos aquí a probar la célebre fórmula de Einstein de la suma de velocidades.

Consideremos los sistemas inerciales S y S' referidos a sus referenciales R(S) y R(S, S'). Si suponemos en S' un móvil que se desplaza paralelamente al eje x' con velocidad constante u', sus sucesivas posiciones en el espacio U constituyen sucesos que dan lugar a una trayectoria rectilínea cuyas ecuaciones en el sistema S' son

$$x' = u't, \quad y' = y'_o, \quad z' = z'_o.$$

Para obtener las ecuaciones de esta trayectoria en el sistema S debemos sustituir x', y', z' y t' por sus valores en (2.2.11). Se obtiene

$$\frac{x - vt}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = u' \frac{(-v/c^2)x + t}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad , \; y = y'_o \; , \; z = z'_o.$$

Las ecuaciones de la trayectoria son por consiguiente

$$x = \left[\frac{u' + v}{1 - \dfrac{u'v}{c^2}} \right] .t \; , \; y = y'_o \; , \; z = z'_o.$$

La velocidad de esta trayectoria es la velocidad del móvil respecto del sistema S, y su valor es

$$u = \left[\frac{u' + v}{1 - \dfrac{u'v}{c^2}} \right] ,$$

que es la ***fórmula de Einstein de suma de las velocidades.***

3. REPRESENTACION GRAFICA DE LAS FORMULAS DE TRANSFORMACION DE LORENZ..

En este parágrafo vamos a tratar acerca de una manera de representar gráficamente las fórmulas de Lorentz con el objeto de mostrar en qué forma el espacio de Minkowski permite expresar algunas propiedades del universo físico que resultan de la teoría de la relatividad especial.

3.1 La representación gráfica. Consideremos un sistema inercial S en el que es dado un referencial R(S) respecto del cual las coordenadas de un suceso genérico son (x, y, z, t). Para cada otro sistema inercial S' se da un referencial R(S, S') concordado con R(S, S'), respecto del cual las coordenadas del mismo suceso son (x', y', z', t') que están relacionadas con las precedentes por las ecuaciones de transformación de Lorentz (2.2.11), de las cuales sólo nos interesa considerar la primera y la cuarta. Dichas fórmulas pueden ser escritas de manera simétrica, adecuada a nuestro fin, si introducimos la notación

$$\beta = \frac{v}{c} ,$$

y, además, sustituímos la variables t y t' del tiempo por las nuevas variables

$$w = ct \quad y \quad w' = ct$$

respectivamente. Entonces las ecuaciones de Lorentz toman la forma

$$x' = \frac{x - \beta w}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad w' = \frac{w - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (3.2.1)$$

Para representar gráficamente la relación que existe entre las variables *(x, w)* y *(x', w')* consideremos en el plano un sitema de coordenadas cartesianas ortogonales xw, en cuyos dos ejes adoptamos la misma unidad de longitud. Cada suceso puede representarse entonces, en dicho plano, mediante un punto P cuyas coordenadas *(x, w)* son las que corresponden al suceso, respecto del referencial del sistema inercial S. En ocasiones designaremos por P al suceso que corresponde a dicho punto.

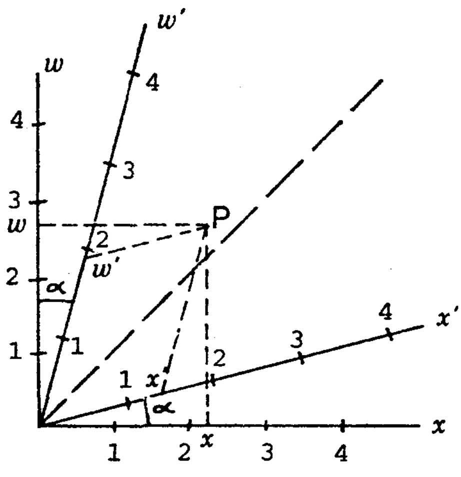

figura 2

Las ecuaciones (3.2.1) pueden interpretarse como fórmulas de cambio del sistema de coordenadas xw en el sistema $x'w'$, la posición de cuyos ejes vamos a determinar.

El sistema de ecuaciones (3.2.1) tiene una inversa que es dada por las fórmulas

$$x = \frac{x' + \beta w'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \qquad w = \frac{w' + \beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \qquad (3.2.2)$$

Para determinar los ejes x' y w' podemos proceder como sigue: El eje x' está formado por los puntos para los cuales es $w' = 0$; luego se deduce de la segunda fórmula (3.2.1) que su ecuación respecto del sistema de coordenadas xw es

$$w = \beta x,$$

y por tanto es la recta que pasa por el origen y hace con el eje x un ángulo α tal que tg $\alpha = \beta$. Puesto que la velocidad v es menor que la velocidad c de la luz en valor absoluto, debe ser $|\beta| < 1$; es decir que el eje x', cuyo coeficiente angular depende de v, hace con el eje x un ángulo menor de 45 grados.

Semejantemente, la ecuación del eje w', cuyos puntos cumplen la condición $x' = 0$, es

$$x = \beta w.$$

Por tanto dicho eje es la recta que pasa por el origen y hace con el eje w el ángulo α. Resulta así que la bisectriz del ángulo que forman los ejes x' y w' coincide con la bisectriz del primer cuadrante.

Para determinar las unidades de longitud sobre los ejes x' y w' basta que determinemos las coordenadas x y w de los puntos para los cuales las coordenadas en el sistema $x'w'$ son (1, 0) y (0, 1). Las del primero son

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , \qquad w = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , \qquad (3.2.3)$$

y las del segundo son

$$x = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , \qquad w = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (3.2.4)$$

Luego, en ambos ejes la unidad de longitud de la escala es igual a

$$\sqrt{x^2+w^2} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}} > 1.$$

Un suceso cualquiera P *(figura 2)* cuyas coordenadas espacio–temporales para el sistema S son *(x,t)* es representado por el punto cuyas coordenadas en el plano xw son x y w = ct. Si las coordenadas del mismo punto relativas al sistema de coordenadas $x'w'$ son (x', w'), medidas con la escala que corresponde a esos ejes, entonces sus coordenadas espacio–temporales para el sistema S' son x' y $t' = w'/c$.

La determinación de la unidad de la escala de los ejes x' y w' que corresponden a un determinado valor de β puede llevarse a cabo gráficamente de la manera siguiente. La ecuación, relativa al sistema de coordenadas xw, del lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas son (1, 0), respecto de alguno de los sistemas $x'w'$ que corresponden a los diversos valores de β, se obtienen eliminando a β entre las dos ecuaciones (3.2.3). Resulta así la ecuación

$$x^2 - w^2 = 1,$$

de la hipérbola equilátera equilátera cuyo eje transverso es el eje x, y cuyas asíntotas son las bisectrices del par de ejex x y w

(figura 3). Semejantemente, eliminando β entre las dos ecuaciones (3.2.4) se obtiene la ecuación, relativa al sistema de coordenada *xw*, del lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas respecto cada uno de los sistemas *x'w'* que corresponden a los diversos valores de β, son (0, 1). Se obtiene así la ecuación

$$w^2 - x^2 = 1,$$

de las hipérbola equilátera cuyo eje transverso es el eje w y cuyas asíntotas son las bisectrices del par de ejes x y w.

Si, dado un valor de β, se trazan lo ejes x' y w' que hacen con los ejes x y w, respectivamente, ángulos iguales a α = arctg β, sus intersecciones con las ramas derecha y superior de esas hipérbolas dan los puntos (1,0) y (0, 1), respectivamente, en el sistema x' w'; y sus intersecciones con las ramas izquierda e inferior dan los puntos (–1, 0) y (0, –1).

La precedente representación gráfica de las fórmulas de transformación de Lorentz facilita la deducción de ciertas consecuencias sencillas de la teoría de la relatividad especial. Nos limitaremos aquí, como ilustración, a referirnos a algunas pocas de ellas.

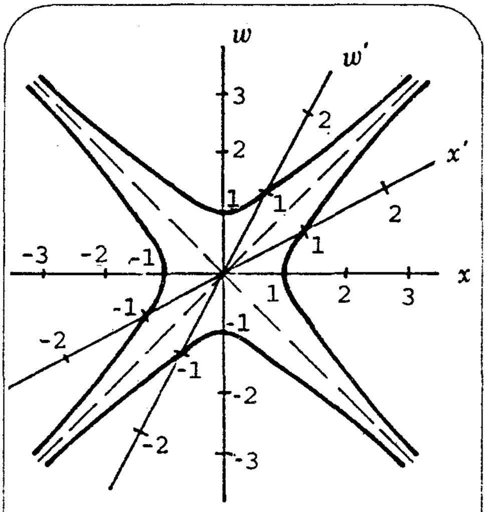

figura 3

Las sucesivas posiciones de un móvil que se desplaza en el espacio

U, sobre el eje x del referencial R(S), con una velocidad constante u, constituyen otros tantos sucesos que, en nuestra representación gráfica, son representados por puntos cada uno de los cuales tiene por abscisa x el valor de la abscisa que corresponde a la posición del móvil en el instante t que se considere y por ordenada w a ct. Por tanto, si suponemos para abreviar que para $t = 0$ es $x = 0$, la posición del móvil en el instante t es representada por el punto cuyas coordenadas respecto del sistema xw son $x = ut$ y $w = ct$; y por consiguiente la sucesión de las posiciones del móvil es representada por la recta de ecuación

$$x = \frac{u}{c} \quad w = \beta w,$$

que pasa por el origen y cuyo coeficiente angular respecto del eje w es igual a β. Puesto que es $|\beta| < 1$, esa recta se encuentra situada dentro de la zona que aparece rayada en la *figura 4*, es decir en dos de los sectores determinados por las bisectrices de los cuadrantes en que el plano xw es dividido por los ejes.

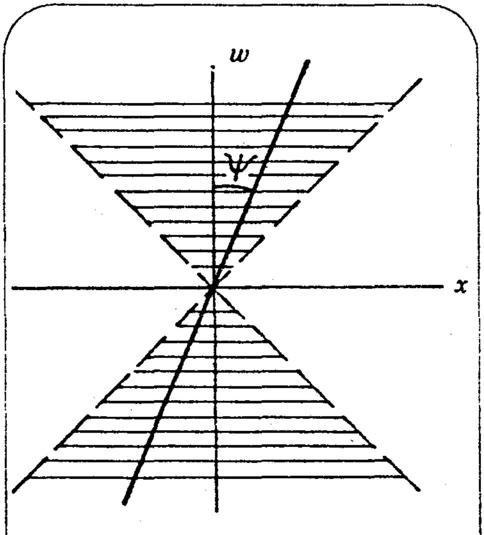

figura 4

Si, en forma más general, suponemos que el móvil se mueve de una manera cualquiera sobre el eje x del referencial del sistema S, de manera que sus posiciones sobre dicho eje son dadas en cada instante t por la función

$$x = f(t),$$

la curva que las representan en el plano xw tiene la ecuación

$$x = f(w/c) = g(w), \tag{3.2.5}$$

cuya tangente en el punto (x, w) tiene, respecto del eje w, el coeficiente angular

$$g'(w) = \frac{dx}{dw} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dw} = \frac{u}{c} \quad ,$$

donde $u = dx/dt$ es la velocidad del móvil en el instante t, la cual es menor que la velocidad c de la luz. Por consiguiente el ángulo de inclinación de la tangente a la curva con respecto al eje w es menor de 45° *(figura 5).*

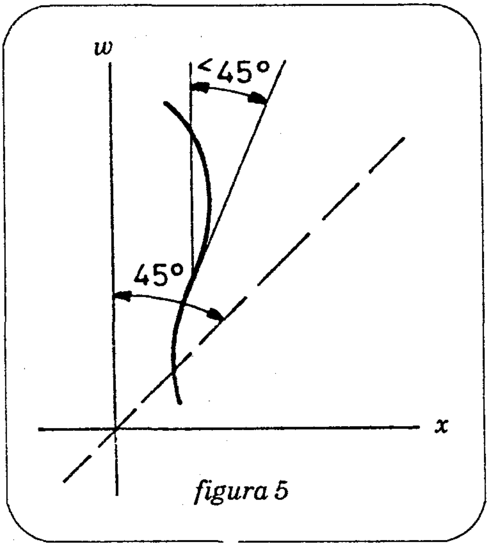

figura 5

La curva de ecuación (3.2.5) se llama ***línea del universo*** correspondiente al móvil considerado.

Las bisectrices de lo dos cuadrantes del sistema de coordenadas xw son representativas de las posiciones de un móvil que se desplaza con la velocidad de la luz. Es por tanto la línea del universo de las sucesivas posiciones de un rayo de luz. De allí la denominación de ***vectores lumínicos*** que tienen los vectores l de componentes x, w tales que

$$(l \mid l) = x^2 - w^2 = 0.$$

La línea del universo de un punto que está fijo en el sistema inercial S es una recta paralela al eje w.

Terminaremos refiriéndonos a algunas consecuencias sencillas de la teoría de la relatividad especial que se deducen de manera muy sencilla de la representación gráfica.

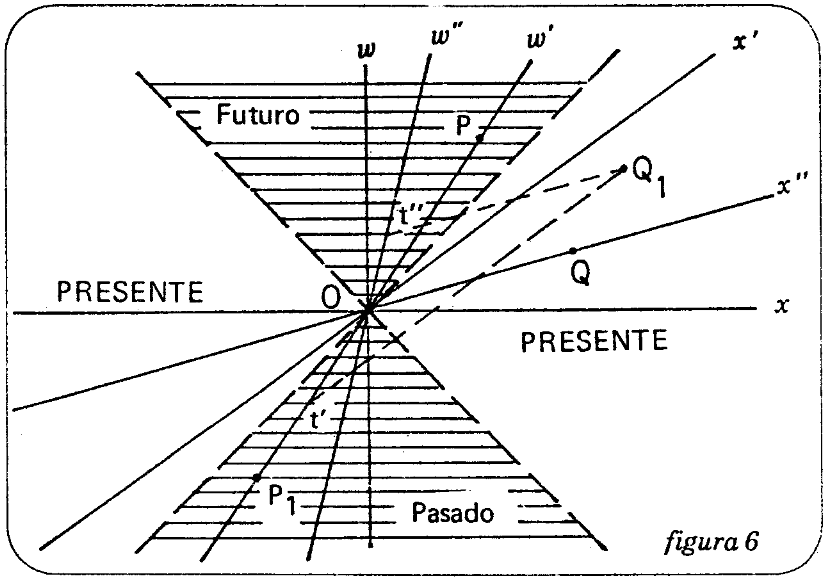

figura 6

Si consideramos un punto cualquiera P del sector superior de la zona del plano xw que parece rayada en la *figura 6,* existe un sistema inercial S' en movimiento rectilíneo uniforme respecto el sistema S, con velocidad tal respecto del sistema S que el eje w' que le corresponde pasa por el punto P. Las coordenadas relativas al eje x' de los puntos O y P son ambas nulas, pero sus coordenadas relativas al eje w' son distintas entre sí. Luego los sucesos que corresponden a dichos puntos ocurren en un mismo lugar del sistema S' pero en tiempos distintos. Todos los sucesos que coresponden a puntos que, como P, están en la parte superior de la zona rayada, ocurren en instantes t mayores que 0, razón por la cual dicha parte se llama ***cono del futuro*** para el observador que en el instante $t=0$ se encuentra en el origen del referencial R(S). Por una razón análoga, la parte inferior de la zona rayada se llama ***cono del pasado*** para el mismo observador. Los sucesos que corresponden a la zona rayada siempre tienen, por consiguiente, un orden definido en el tiempo respecto del suceso O, pues para cualquier sistema inercial ocurren antes que O si están en la parte inferior y después si están en la superior.

Por otra parte, si Q es un punto cualquiera de la zona no rayada, no existe sistema inercial S' alguno para el que el suceso Q ocurre en el mismo lugar que el suceso O, es decir con la coordenada $x' = 0$. En cambio, existe un sistema inercial S" para el cual el eje x'' correspondiente pasa por Q *(figura 6)*. Para dicho sistema el suceso Q ocurre al mismo tiempo $t'' = w''/c = 0$ en que el suceso O ocurre para el observador de S", pero en un lugar diferente, porque la coordenada x'' de Q es diferente de cero. Por consiguiente, siempre podemos encontrar un sistema inercial para el cual los sucesos O y Q ocurren al mismo tiempo es decir en el mismo instante ***según los relojes de S"***. Por esa razón la zona no rayada se llama ***zona del presente*** para el observador de S situado en el origen del referencial en el instante $t = 0$.

En la figura 6 puede verse cómo para un suceso Q_1 de la zona del presente pueden darse sistemas inerciales S' y S" para los cuales las coordenadas temporales de Q son $t'<0$ y $t''>0$, de manera que para S' el suceso Q_1 tiene lugar antes que el suceso O, y para S" ocurre lo contrario. Lo dicho permite apreciar que ***los conceptos de simultaneidad y de orden temporal resultan ser, según la teoría de la relatividad, conceptos relativos por cuanto dependen del sistema inercial en que se encuentre el observador.***

Hemos visto que, según sea el sistema inercial que se considere, un suceso dado del pasado o del futuro puede ocurrir para un observador en el mismo punto de su sistema de coordenadas que el suceso O, aunque en tiempo distinto, y para otro puede tener lugar en puntos distintos de su sistema de coordenadas; pero para ambos observadores el suceso se realiza antes o bien se realiza después que el suceso O. Por esa razón los sucesos situados en los conos del futuro o del pasado se llaman ***sucesos temporales.*** En cambio, un suceso del presente ocurre para todo observador en un punto distinto de aquel en que ocurre el suceso O, respecto de su referencial, pero puede coincidir para él en el tiempo. Por esa razón los sucesos del presente se llaman también ***sucesos espaciales,*** denominaciones que son coincidentes con las que dimos a los vectores situados en esa zonas del plano euclideano.

La representación geométrica del universo físico mediante el espacio de Minkowski permite llevar a cabo muchas otras observaciones de interés, de las cuales no es el caso tratar en la presente nota.