Pro Mathematica: Vol. I, No. 2, 1987

OPTIMIZACION DE FUNCIONES VECTORIALES Y SU APLICACION A LA ECONOMIA

Giuliana CHION (*)

En este artículo se presenta una manera de optimizar una función vectorial que parte de una variedad diferenciable y llega a R^m. Definiremos un conjunto análogo al conjunto de puntos críticos de una función real y otro análogo al conjunto de máximos; también tendremos dos proposiciones parecidas a las propiedades que conocemos del cálculo: si la primera derivada es cero, el punto es crítico y si además la segunda derivada es negativo definida, el punto es máximo. Finalmente aplicaremos todo esto al caso del intercambio económico puro llegando a resultados interesantes.

1. Introducción.

Supongamos $f: R^n \to R^m$ una función vectorial
$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ donde: $f_i: R^n \to R$

(*) Asistente de Docencia de la Sección Matemáticas – PUCP.

Queremos maximizar f o equivalentemente maximizar a la vez las "m" funciones reales $f_i : R^n \to R$.

Notemos que no queremos maximizar el máximo de estas "m" funciones, el promedio de ellas o alguna norma de ellas; pues al hacer esto estaríamos maximizando funciones reales.

$$\max f_i : R^n \to R$$

$$1/m \sum_{i=1}^{m} f_i : R^n \to R$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} f_i^2\right)^{1/2} : R^n \to R$$

$$\| . \| \circ f : R^n \to R$$

Lo que intentaremos es maximizar la función f vectorial (o equivalentemente las funciones f_i a la vez) sin convertirla a una función real.

Este problema ha sido motivado por los economistas quienes necesitaban maximizar funciones de utilidad, ellos definieron un Optimo Pareto clásico. Nosotros definiremos un Optimo Pareto crítico, formado por los Optimos Pareto crítico, será el equivalente al conjunto de puntos críticos de una función real.

Este artículo como el trabajo [1] está basado en los artículos del profesor Smale sobre Optimos de Pareto [2], [3], [4], [5].

Las demostraciones de las afirmaciones que aquí se dan las omitiremos pero se encuentran en [1].

2. Definiciones Básicas.

Queremos maximizar una función vectorial diferenciable

$u : W \to R^m$ donde W : Variedad diferenciable o equivalentemente "m" funciones reales a la vez.

$u_i : W \to R$ donde $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$

(En particular W podría ser R^n o un abierto de R^n)

Lo natural aquí será, $x \in W$ no es Optimo Pareto crítico si y solamente sí existe una curva que pase por x a lo largo de la cual crecen todas las funciones u_i.

Si denotamos por θ el conjunto de los Optimos Pareto crítico:

$$x \notin \theta \Leftrightarrow \exists\ \varphi : R \to W \text{ curva diferenciable con } \varphi(o) = x$$
$$\text{tq } \frac{d}{dt}(u_i \circ \varphi)|_t > 0 \qquad \forall t \in R \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\} \qquad (*)$$

θ : Conjunto Pareto crítico.

Este conjunto Pareto crítico así definido es la generalización del conjunto de puntos críticos de una función real y contiene al conjunto Pareto clásico (que definieron los economistas).

Una definición equivalente más fácil de trabajar pero menos intuitiva es la siguiente:

Definición:

Sea: $Pos := R^m_+ = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m / x_i > 0\}$

$H(x) := (du|_x)^{-1}$ (Pos)   que es un cono abierto

Definimos:

$\theta := \{x \in W / H(x) = \phi$ (Conjunto vacío)$\}$

Tenemos las siguientes propiedades.

Proposición:

(1) θ es cerrado.

(2) Si X es un campo vectorial continuo en W donde:

$X(x_0) \in H(x_0) \subseteq T_{x_0} W$ para algún $x_0 \in W$,

entonces $X(x) \in H(x)$ en alguna vecindad de x_0

En una variedad diferenciable siempre trabajamos con cartas diferenciables; al momento de buscar el conjunto θ, conocer que θ es cerrado nos facilitaría los cálculos pues nos podría evitar buscarlo en alguna carta (usando $\overline{\theta} \subset \theta$). La segunda parte de la proposición nos dice que el campo de conos $x \to H(x)$ tiene una cierta continuidad.

Las curvas a lo largo de las cuales crecen todas las funciones u_i se llamarán admisibles, tendremos:

$\varphi : I \to W$ curva diferenciable   (I intervalo en R)

φ es admisible $\Leftrightarrow$ $\varphi'(t) \in H(\varphi(t))$, $\forall t \in \text{dom } \varphi$

Notemos que φ cumple (*) de la primera definición de θ para $x = \varphi(o)$. Luego $x \in \theta$ ssi no existe curva admisible que pase por x.

Si $w \in W \backslash \theta$ definimos el conjunto de puntos Pareto crítico accesibles desde w por una curva admisible.

$$\theta(w) := \{x \in \theta \,/\, \text{Existe curva admisible que empieza en } w \text{ y "termina" en } x\}$$

donde "termina" es tomado en el sentido del límite; esto es, existe $\varphi : [a, b[\to W$ admisible tal que:

$$\varphi(a) = w \quad \wedge \quad \lim_{t \to b} \varphi(t) = x$$

Una noción importante es la estabilidad; un punto $x \in \theta$ diremos que es estable si toda curva admisible que parte cerca de x, se mantiene cerca de x.

Denotaremos por θ_s el conjunto de los óptimos Pareto crítico estables; tenemos:

$$x \in \theta_s \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{Dada una vecindad } V_x \text{ de } x \text{ en } W, \\ \text{existe una vecindad } U_x \text{ de } x \text{ en } V_x \text{ donde:} \\ \forall\, \varphi : [a, b[\to W \text{ admisible} \\ \varphi(a) \in U_x \Rightarrow \operatorname{Im} \varphi \subset V_x \end{array}$$

θ_s será la parte más significativa de θ, desde el punto de vista económico, es análogo al máximo de una función.

Análogamente si $w \in W \backslash \theta$ definimos $\theta_s(w) := \theta_s \cap \theta(w)$. En el caso de la economía "generalmente" tendremos: $\theta_s(w) \neq \phi$ lo que significa que desde w podemos llegar a un punto más deseable.

3. Proposiciones Fundamentales

Tenemos dos proposiciones importantes que nos caracterizarán a los óptimos de Pareto, para esto usaremos un concepto de álgebra lineal.

En un espacio vectorial V finito dimensional, un conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^{s}$ diremos que "pertenecen a algún 1/2 –espacio abierto" si y solamente si existe una función lineal $p : V \to R$ donde $p(v_i) > 0, \forall i$

Consideraremos aquí $\dim W \geq m$

Proposición de Primer Orden:

Sea $u : W \to R^m$ función diferenciable, $x \in W$

Las tres condiciones siguientes son equivalentes:

(a) $x \in \theta$

(b) $\{Du_i(x)\}_{i=1}^{m} \subseteq T_x^*(W)$
no todos pertenecen a algún 1/2– espacio abierto

(x) $\exists\, \lambda_i \geq 0$ $i = 1, 2, \ldots, m$ no todos cero, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i Du_i(x) = 0$

De esta proposición podemos ver:

$x \in \theta$ si y solamente si x es punto crítico de una suma ponderada de las funciones u_i; en particular si x es punto crítico de algún u_i entonces $x \in \theta$.

En el caso particular $m = 2$, $u : W \to R^2$

$x \in \theta \iff \text{grad}\, u_1(x)$ y $\text{grad}\, u_2(x)$ están en dirección opuesta.

En esta proposición hemos caracterizado los Optimos de Pareto, en la siguiente daremos un criterio para caracterizar los Optimos de Pareto estables.

Para esto necesitamos definir una "frontera" de θ (que no tiene que coincidir con la frontera topológica)

$$\partial\theta := \{x \varepsilon \theta / \mathrm{Im}(du|_x) \cap (\overline{Pos} \setminus \{o\}) \neq \phi\}$$

También necesitamos un Hessiano (la definición se encuentra en [1]), se define cuando corang Du(x) = 1; como una forma bilineal, simétrica, definida invariantemente (independiente de las cartas que se tomen en W).

H_x: Ker Du(x) x Ker Du(x) $\rightarrow$ R^m/Im Du(x)

"Hessiano Generalizado"

donde además, como ImDu(x) $\cap$ Pos = ϕ, tenemos que en R^m/ImDu(x) (tiene dimensión 1) podemos definir su rayo positivo.

Proposición de Segundo Orden.

Sea u: W $\rightarrow$ R^m función diferenciable

$x \varepsilon \theta$, $x \notin \partial\theta$ ^ corang$(du|x) = 1$

Tenemos:

(a) H_x es negativo – definido $\Rightarrow$ $x \varepsilon \theta_s$

(b) Sean λ_i como en la Proposición de Primer Orden

$$H_x = r \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, Du_i^2 \, (x) \quad \text{en Ker Du(x)}$$

para algún $r > 0$

Nótese que la última igualdad tiene sentido, pues ambos miembros son formas bilineales simétricas con valores reales definidas en Ker Du(x) $\subset T_x W$

4. Aplicación a la Teoría Económica

Aplicaremos todo lo anterior al caso del intercambio económico puro, pero antes haré una explicación sobre los conceptos de economía que aquí se usan.

En una economía tenemos:

"l" bienes o mercancías

"m" consumidores o agentes económicos.

Definimos el "espacio mercantil" P de la siguiente manera:

$$P := \{(x^1, x^2, \ldots\ldots x^e) \in R^l / x_i > 0\}$$

donde a cada agente económico le corresponde un elemento de P: un "fardo mercantil"

Definimos:

$$W := \{x \in P^m / x = (x_1, \ldots\ldots x_m) \quad x_i \in P, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = r\}$$

"espacio de estados de un intercambio económico puro" con "riqueza total" r ; donde r es un elemento fijo de P.

Nosotros omitiremos consideraciones de producción y vecindades en el borde del espacio mercantil.

Las preferencias del agente i son expresadas mediante una "función de utilidad" $\bar{u}_i : P \rightarrow R$

donde el i–ésimo agente prefiere x a x' en P si y solo si $\bar{u}_i(x) > \bar{u}_i(x')$.

Asumiremos que las funciones de utilidad no tienen puntos críticos $(D\bar{u}_i(x_i) \neq 0 \quad \forall i, \quad \forall x_i \in P)$

Apliquemos ahora lo anterior al espacio de estados W que es una variedad diferenciable de dimensión (m-1) l (notar dim $W \geq m$).

Tenemos u: $W \rightarrow R^m$ función diferenciable definida de la siguiente manera $u = (u_1, \ldots\ldots u_m)$ donde $u_i(x) = \bar{u}_i(x_i)$, $\forall x \in W$
Ahora tenemos:

Proposición de Primer Orden para el caso del intercambio económico puro

Sea $u: W \rightarrow R^m$ un intercambio económico puro.

$x \in \theta \Leftrightarrow \exists\ \lambda_i \geq 0,\quad i = 1, 2, \ldots m$ no todos cero

tal que $\lambda_i\ D\bar{u}_i(\bar{x}_i) = a \in L(R^l, R)$ constante

En otras palabras $x \in \theta$ ssi todos los $D\bar{u}_i(\bar{x}_i)$ apuntan en la misma dirección. Esta condición es bien conocida en economía matemática. Samuelson's Foundations (1971); Henderson and Quantt (1958); Intriligator (1971); Malinvaud (1972).

Proposición de Segundo Orden para el caso del intercambio económico puro

Sea $u: W \rightarrow R^m$ un intercambio económico puro

Si $x \in \theta \wedge x \notin \partial\theta$ entonces:

(a) H_x es negativo – definido $\Rightarrow x \in \theta_s$

(b) Sean λ_i como en la proposición de Primer Orden

$$H_x = r \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, Du_i^2(x) \text{ en Ker } Du(x), \text{ para algún } r > 0$$

Ahora, en economía las funciones de utilidad generalmente deben cumplir la "condición de convexidad diferenciable" que dice: La segunda derivada $D^2\ \bar{u}_i(x)$ restringida al Ker $D\bar{u}_i(x_i)$ es negativo – definida (esto implica u^{-1} ([b, + ∞[) es estrictamente convexo, $\forall$ b $\in$ R); con esto tenemos:

Corolario

En un intercambio económico puro donde se cumple la condición de convexidad diferenciable.

$$x \in \theta \wedge x \notin \partial\theta \Rightarrow x \in \theta_s$$

Con lo que hemos obtenido que generalmente $\theta = \theta_s$

Finalmente notemos que los Optimos de Pareto se pueden aplicar no sólo a la economía, sino a cualquier problema en el que se necesite maximizar una función vectorial.

Bibliografía

[1] *Chion, G.*, 1987, Aplicaciones de la Topología Diferencial a la Teoría Económica.

[2] *Smale, S.*, 1973a, Global Analysis and Economics I, Pareto Optimum and a Generalization of Morse Theory. M. Peixoto. Academic Press, New York.

[3] *Smale, S.*, 1973b, Optimizing Several Functions. Proceeding of the Tokyo Manifolds Conference.

[4] *Smale, S.*, 1974a, Global Analysis and Economics II A; Extensión of a Theorem of Debreu. Journal of Mathematical Economics 1, 1–14.

[5] *Smale, S.*, 1974b, Global Analysis and Economics III; Pareto Optima and Price Equilibria. Journal of Mathematical Economics 1,107 - 116.