Pro Mathematica: Vol. II, No. 3, 1988

LOGARITMO DE UNA MATRIZ

Emilio Gonzaga Ramirez (*)

1. Introducción.

Estas breves notas constituyen simplemente la solución de un problema, importante por sus aplicaciones, planteado en [2]. He creído conveniente publicarlas porque, tratándose básicamente de un ejercicio de Algebra Lineal, su enunciado no se encuentra en los textos usuales sobre la materia. Espero que la solución que he dado al problema no desentone con las existentes, o que, por lo menos, valga la pena prestarle atención

2. Preliminares.

Consíderemos el espacio vectorial complejo $C^{n \times n}$ de las matrices cuadradas complejas de orden n, con las operaciones usuales de adición de matrices y multiplicación de un número complejo por una matriz. A este espacio se le puede convertir en un espacio normado, definiendo, por ejemplo, la norma de una matriz $A = [a_{ij}] \in C^{n \times n}$ por

$$|A| = máx \ \{ |a_{ij}| \ / \ 1 \leqslant i,j \leqslant n \}$$

(*) Profesor Principal de la Sección Matemáticas de la PUCP.

Se sabe (ver [2]) que para toda matriz $A \in C^{n \times n}$, la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = E + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots$$

es convergente en $C^{n \times n}$ (Aquí E denota la matriz identidad). La suma de esta serie se llama la *matriz exponencial de* A y es denotada por e^A. Por tanto podemos escribir

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \qquad \ldots \qquad (1)$$

La matriz exponencial goza de algunas propiedades análogas a las de los exponenciales numéricos. Señalamos las siguientes para ser utilizadas a continuación:

2.1. $e^0 = E$

2.2. e^A es no singular $\forall A \in C^{n \times n}$

2.3. $e^{\alpha} e^A = e^{\alpha E + A} \quad \forall \alpha \in C, \forall A \in C^{n \times n}$

2.4. $e^{P^{-1} A P} = P^{-1} e^A P$

2.5. Si $A = diag.(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ entonces

$$e^A = diag. (e^{A_1}, e^{A_2}, \ldots, e^{A_k})$$

3. Planteamiento del Problema.

Para cada número complejo $a \neq 0$ existen números complejos b tales que

$$e^b = a \qquad (1)$$

Se desea obtener un resultado similar para matrices: Dada $A \neq 0$ existe B tal que

$$e^B = A.$$

Por la propiedad 2.2., A debe ser no singular. Por tanto la formulación correcta debe ser:

Si $A \in C^{n \times n}$ es una matriz no singular demostrar que existe una matriz $B \in C^{n\times n}$ tal que

$$e^{B} = A \tag{2}$$

Una tal matriz B se llama un *logaritmo natural de A.*

4. Solución del Problema.

Resolveremos el problema planteado reduciéndolo a problemas similares pero con matrices sencillas. Con este fin, el siguiente teorema (ver [1]) es la base de la solución.

4.1. Teorema. [*Forma Canónica Compleja de Jordan*]

Toda matriz $A \in C^{n \times n}$ es semejante a una matriz J de la forma

$$J = diag\ (J_1, J_2, \ldots , J_k) \tag{1}$$

donde cada bloque J_l $(l = 1,2,\ldots,k)$ es de la forma

$$J(\lambda) = \lambda E + E_1 \tag{2}$$

siendo λ valor propio de A, E una matriz identidad y E_1 la matriz nilpotente

$$E_1 = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{matrix} \tag{3}$$

Además la suma de los órdenes de los bloques $J(\lambda)$ es igual a la multiplicidad de λ como raíz característica.

Primera Simplificación.

Por el teorema 4.1. existe una matriz no singular P tal que $A = P^{-1}JP$. Supongamos que para cada $l = 1,\dots, k$ existe una matriz cuadrada B_l tal que

$$e^{B_l} = J_l$$

Definiendo $\overline{B} = diag\ (B_1, B_2, \dots, B_k)$, y usando las propiedades 2.4 y 2.5 se tiene

$$\begin{aligned} e^{P^{-1}\overline{B}P} &= P^{-1}e^{\overline{B}}\ P \\ &= P^{-1}\ diag\ (e^{B_1}, e^{B_2}, \dots, e^{B_k}).P \\ &= P^{-1}JP \\ &= A \end{aligned}$$

Tomando $B = P^{-1}\overline{B}P$ se obtiene la conclusión. Así el problema se reduce al siguiente:

Encontrar una matriz $\hat{B} =$ tal que

$$e^{\hat{B}} = \lambda E + E_1 \qquad (4)$$

donde λ es el valor propio de A (no nulo pues A es no singular) y E, E_1 como antes.

Segunda Simplificación.

Haciendo $a = \frac{1}{\lambda}$, podemos escribir (4) en la forma

$$ae^{\hat{B}} = E + aE_1 \qquad (4')$$

Pero como $a \neq 0$, existe $b \in C$ tal que $a = c^b$. Reemplazando en (4') y usando la propiedad 2.3 tenemos

$$e^{bE + \hat{B}} = E + aE_1$$

Por tanto es suficiente encontrar una matriz B tal que

$$e^B = E + aE_1$$

o, equivalentemente

$$B + \frac{B^2}{2!} + \ldots = aE_1 \qquad (5)$$

El primer miembro de (5) es una serie infinita. Es razonable buscar B que sea nilpotente para que la serie se trunque. Por la forma que tiene el segundo miembro de (5), busquemos B de orden m de la forma [*]

$$B(m) = \begin{matrix} 0 & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1,m-1} & b_{1,m} \\ 0 & 0 & b_{23} & \ldots & b_{2,m-1} & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{m-1,m} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{matrix} \qquad (6)$$

o, puesta en bloques:

$$B(m) = \begin{matrix} B(m-1) & C \\ 0 & 0 \end{matrix} \qquad (6')$$

Por inducción matemática sobre k se puede demostrar que $\forall\, k = 1,2,\ldots,$

$$B^k(m) = \begin{matrix} B^k(m-1) & B^{k-1}(m-1)C \quad C \\ 0 & 0 \end{matrix} \qquad (7)$$

Ahora, por inducción sobre m, se sigue de (7) que

$$B^k(m) = 0 \qquad \forall\, k \geqslant m \qquad (8)$$

---

[*] Para enfatizar el orden m de las matrices B, E y E_1 escribiremos $B(m)$, $E(m)$, $E_1(m)$.

Usando (8), la igualdad (5) se reduce a

$$B(m) + \frac{B^2(m)}{2!} + \dots + \frac{B^{m-1}(m)}{(m-1)!} = a.E_1(m) \qquad (9)$$

Usando (7) vemos que (9) es equivalente a

$$\begin{pmatrix} B(m-1) + \dfrac{B^2(m-1)}{2!} + \dots + \dfrac{B^{m-2}(m-1)}{(m-2)!} & \left[E(m-1)\right) + \dfrac{B(m-1)}{2!} + \dots + \dfrac{B^{m-2}(m-1)}{(m-1)!}\left]C \right. \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= aE_1(m) = \begin{pmatrix} aE_1(m-1) & a\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

La igualdad (10) sugiere usar la inducción sobre el orden m para encontrar B de la forma (6) que satisfaga (9).

Solución final. (Por inducción sobre m)

Para $m = 2$:

Basta tomar $B(2) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Supongamos que existe una matriz $B(m)$ de la forma (6) que satisface (9).

La matriz

$$E(m) + \frac{B(m)}{2!} + \dots + \frac{B^{m-1}(m)}{m!}$$

es no singular, pues es triangular superior y los elemen– tos de su diagonal principal son distintos de cero.

Luego existe una matriz $\overline{C}$ de orden $m \times 1$ tal que

$$\left[E(m) + \frac{B(m)}{2!} + \dots + \frac{B^{m-1}(m)}{m!}\right]\overline{C} = a \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \qquad (11)$$

Definiendo

$$B(m+1) = \begin{array}{cc} B(m) & \overline{C} \\ & \\ 0 & 0 \end{array}$$

se sigue de la hipótesis inductiva y de (11) que

$$B(m+1) + \frac{B^2(m+1)}{2!} + \dots + \frac{B^m(m+1)}{m!} =$$

$$\begin{array}{cc} B(m) + \frac{B^2(m)}{2!} + \dots + \frac{B^{m-1}(m)}{(m-1)!} & \left[E(m) + \frac{B(m)}{2!} + \dots + \frac{B^{m-1}(m)}{m!}\right]\overline{C} \\ & \\ 0 & 0 \end{array} =$$

$$\begin{array}{cc} aE_1(m) & a \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \\ & \\ 0 & 0 \end{array} = aE_1(m+1) .$$

Con esto se termina la solución al problema planteado.

Referencias.

[1] *Hoffman K-Kunze R.* Algebra Lineal, Prentice Hall International, 1979.

[2] *Sotomayor J.* Liçoes de Equaçoes Diferenciais Ordinárias. IMPA, 1979.