Pro Mathematica: Vol. II, No. 3, 1988

CRISIS EN LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMATICA

Alejandro Ortiz Fernández (*)

En esta exposición presentamos algunas cuestiones relacionadas con la crisis producida en el interior de la matemática a fines del siglo pasado, y que preocupó a los matemáticos de aquel entonces. El tema pretende divulgar entre nuestra comunidad aspectos de la historia de la matemática, lo que debería ser parte en la formación de todo matemático.

La presentación es sucinta y pretende motivar estudios más amplios a quienes se interesen por la lógica y la filosofía de la matemática.

(*) Profesor Principal del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional de Trujillo, Perú.

1. Antecedentes

En matemática, el surgimiento de dificultades esenciales dieron lugar a teorías revolucionarias más amplias. A veces, la luz se hizo después de muchísimos años. Tal es el caso de la crisis que surgió en la antigua Grecia. Como se sabe, la matemática en la antigüedad llegó a niveles de gran significado y profundidad. Así fueron los trabajos de Tales, Pitágoras, Euclides, Apolonio y sobre todo Arquímedes. La hipótesis de que el universo podía ser explicado con los números naturales y racionales sufrió un gran golpe en el seno de la escuela pitagórica.

Tomaron un cuadrado de una unidad como longitud del lado; conocedores del teorema de Pitágoras, determinaron que la longitud de la diagonal es $\sqrt{2}$. ¿Este número, lo podemos determinar como un número finito de partes? En otras palabras, ¿existen dos números enteros x e y tales que: $x^2 = 2y^2$? Un argumento algebraico nos dice que no es posible tal existencia. Así, el esfuerzo de los antiguos matemáticos por clarificar tal cuestión fue traumatizante, pero que seguramente enriqueció la capacidad de análisis.

Zenón y Eudoxio fueron dos pensadores de la antigüedad que reflexionaron en el problema del infinito, que es precisamente a donde habían llegado los pitagóricos. A ellos se les debe un conjunto de paradojas que sorprendieron a sus contemporáneos y a las generaciones del futuro.

Zenón proclamó que el movimiento no existe al analizar, en forma aguda, una serie infinita de etapas. Asimismo proclamó que "la mitad del tiempo puede serigual al doble del mismo". Eudoxio se sumergió en el mundo de lo infinitamente pequeño. En estos, y otros argumentos dados entonces, se encierran ideas revolucionarias que sólo pudieron salir a luz muchísimos siglos después.

2. La Matemática del Siglo XIX

A la caída de la civilización griega vino un largo período de estancamiento en el desarrollo científico, en particular en la matemática. Esto, salvo algunas significativas contribuciones como las hechas por los indios y los arábes. Debido a cambios sociales y a la conquista de las distancias, el pensamiento volvió a ser reflexivo, pero esta vez más ligado a la solución de problemas concretos, al conocimiento de las leyes físicas del universo en base a nuevos modelos matemáticos. Así se tienen las contribuciones, entre otros, de Galileo, Kepler, Leibniz, y sobre todo de Newton.

El desarrollo de la matemática en los siglos XVII y XVIII fue acelerado por las profundas ideas del cálculo infinitesimal y de la geometría analítica; esto fue debido al estímulo de innumerables problemas que provenían de la física, la ingeniería y de la naciente tecnología. Todo fue muy rápido, con gran descuido en el rigor de las ideas. El análisis matemático se encargó de poner claridad y orden en un amplio universo de ideas.

El siglo XIX es un período de intensa actividad matemática; se crearon teorías fundamentales, algunas de las cuales aún son estudiadas en nuestros días. La presencia de matemáticos de la talla de Gauss, Abel, Galois, Cauchy, Riemann, Weierstrass, Cantor, entre otros, fue decisivo para revisar, formalizar y crear nuevas ideas matemáticas, con métodos y concepciones cada vez más universales. En el análisis, la idea de función es precisada, clarificándose las funciones continuas, derivables e integrables. Para ello fue necesaria la construcción de los números reales bajo modelos que implican la idea de límite.

En el álgebra, la resolubilidad de ecuaciones de grado superior llevó a los cimientos de la teoría de grupos. Por el lado de la lógica, las álgebras de Boole fueron un aporte con proyecciones a nuestro siglo. La geometría es revisada en sus fundamentos; el quinto postulado es cuestionado surgiendo las geometrías no-euclideanas; la geometría se vuelve un concepto abstracto.

Hilbert la axiomatiza. La topología va surgiendo en sus aspectos geométricos; se gestan los espacios abstractos. La teoría de conjuntos nace como una concepción fundamental, como veremos enseguida.

3. La Teoría de Conjuntos

La teoría de conjuntos fue creada por Georg Cantor en el período 1874–1895, y es la culminación de toda una evolución de ideas y dificultades en la construcción del edificio matemático. Una de las características de la matemática de nuestro siglo es el amplio uso de la teoría de conjuntos en casi todos sus sectores, ya directa o indirectamente. Su uso no es sólo en la matemática pura, sino también en la aplicada y aún en sectores más lejanos como en la economía, la lingüística, etc.

En realidad, los fundamentos de los conjuntos son abstracciones intrínsecas a la lógica del pensamiento; por lo tanto, no es coincidencia su presencia en muchos sectores del conocimiento.

La matemática, de alguna manera, siempre vive en crisis pues ella resuelve problemas. La teoría de Cantor, por su naturaleza y profundidad, fue un escenario adecuado para la polémica. Un motivo de discusión fue el *axioma de elección de Zermelo,* introducido en 1904:

(1) *"Sea X un conjunto, cuyos elementos son conjuntos no vacíos X_α, disjuntos dos a dos; entonces, existe siempre otro conjunto X' que se puede construir seleccionando un elemento de cada conjunto $X_\alpha \in X$ ".*

Este axioma, útil en muchas investigaciones, fue discutido en cuanto a su legalidad. Si tuviéramos que elegir entre una familia finita o incluso enumerable, ello no sería cuestionado; la dificultad surge cuando la familia no es enumerable. El axioma de Zermelo fue admitido por algunos matemáticos como Hausdorff, Hadamard, König, ..., en tanto que otros no lo aceptaron, entre ellos Borel, Baire, Lebesgue. Los primeros fueron llamados *idealistas* y los segundos *empiristas.* Estos últimos respetaban la regla de Poincaré:

> *"consideremos solamente objetos que se pueden definir mediante un número finito de palabras".*

El concepto del transfinito surge de un modo natural en los argumentos que aparecieron en tales inquietudes. Demos una ligera idea. Sea w el conjunto de los números naturales (un conjunto infinito). Pongamos $w' = w \cup [w]$, $w'' = w' \cup [w']$, ...

El conjunto de los números ordinales es:

$$W = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n \ldots\ w, w', w'', w''', \ldots\} \quad (*)$$

donde w, w', w'', w''', ... son los números ordinales transfinitos. Observemos que el conjunto de los números naturales (un conjunto enumerable) es el primer número transfinito y es identificado con Aleph subcero $\aleph_0$, su cardinal y así sucesivamente.

Es decir, se llega a una numeración transfinita. (El Aleph $\aleph$ es la primera letra del alfabeto hebreo).

Fijemos un poco más esta idea. Pensemos que el conjunto de los ordinales esté dividido en clases. En la primera están los números *1, 2, 3,* ... que permite dar un orden en un conjunto finito. En la segunda clase están los números $w, w+1, w+2, \ldots, 2w, 2w+1, 2w+2, \ldots, w^2, \ldots$ que permite numerar a los elementos de todo conjunto de potencia del Aleph subcero, la potencia del enumerable. Explicitamente tenemos:

$$
\begin{array}{l}
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
3w+1, \rightarrow \ldots \rightarrow \\
2w+1,\ 2w+2,\ 2w+3,\ \ldots,\ 2w+n,\ \ldots \rightarrow 3w \\
w+1,\ w+2,\ w+3,\ \ldots,\ w+n,\ \ldots \rightarrow 2w \\
0,\ 1,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots \rightarrow w
\end{array}
$$

Cantor llegó al sorpresivo resultado de que se podían construir conjuntos de potencias superior al Aleph subcero, los llamados Aleph subuno $\aleph_1$; luego conjuntos de potencias superior al Aleph subuno, y así sucesivamente, sin haber una cota superior. Por ejemplo, el conjunto de los números reales tiene la potencia del Aleph subuno $\aleph_1$, llamado también la potencia del continuo *c*.

Remarcamos que los alephs designan la cardinalidad (o número de elementos) de los conjuntos infinitos. Los primeros números transfinitos introducidos por Cantor fueron números ordinales y no cardinales. Los números ordinales son definidos por la posición en la lista (*). En un conjunto finito su número cardinal coincide con su número ordinal. Cantor construyó una artimética para los números transfinitos. En un conjunto infinito es necesario precisar bien las ideas de número ordinal y de número cardinal, de lo contrario podemos caer en paradojas.

Con c_0 designamos al cardinal de los conjuntos infinitos con la potencia del enumerable. Sabemos que el cardinal del intervalo $I_1 = [0, 1]$ es la del continuo c, que designaremos con c_1. Es demostrable que $I_2 = I_1 \times I_1$, $I_3 = I_2 \times I_1$, ... tienen la misma potencia que I_1, es decir, tienen el mismo cardinal c_1. Entonces, ¿cómo construir conjuntos con cardinal c_2 mayor que c_1?

La idea es considerar el conjunto de todos los subconjuntos de I; así se obtiene el número 2^c, que es mayor que c. Fue curioso observar que 2^c es igual al número funciones definidas sobre I (de valores 0 y 1). Si llamamos $c_2 = 2^c$, repetimos el argumento para obtener $c_3 = 2^{c_2}$, y así sucesivamente para obtener la cadena infinita: $c_0 < c_1 < c_2 < c_3 < \ldots$

Bien, ¿existe un número $\bar{c}$ tal que $c_i < \bar{c} < c_{i+1}$? En particular, ¿existe $\bar{c}$ tal que $c_0 < \bar{c} < c_1$? Cantor sospechó que tales números $\bar{c}$ no existen. El esclarecer la interrogante llevó a resultados sorprendentes, como veremos después. Por otro lado, sabemos que $c_0 = \aleph_0$, entonces, ¿todo c es un aleph? Si lo fuera, ¿qué índice tendrá?

La primera interrogante llevó a la cuestión, en forma equivalente, de esclarecer si todo continuo es un conjunto bien ordenado, esto es, si sus subconjuntos tienen un primer elemento. Así llegamos al fundamental trabajo de Ernst Zermelo, ya mencionado al inicio de esta sección, quien afirmó:

(2) *"todo conjunto puede ser bien ordenado".*

Se verifica que *(1)* y *(2)* son equivalentes. Estos resultados implican profundas consecuencias en cruciales problemas, y están en los principios de la matemática.

4. Las Paradojas

En el siglo III a.C. Euclides elaboró una monumental obra matemática, la misma que perdura hasta nuestros días. "Los Elementos" es un modelo de construcción matemática, hecha con tanta perfección que nadie se atrevió a discutirla hasta el siglo pasado. El mito de Euclides fue la creencia de que su obra era la fuente de toda la verdad, y que sólo a través de ella se llega al conocimiento del universo, de lo eterno. Quién sabe, aún en nuestros días existen personas que sigan creyendo en tal mito.

Bien, tomemos la geometría de Euclides, aquella que aprendemos en el colegio, y que generalmente se nos enseña sin la relación íntima con el álgebra, lo que recién es resaltado (de algún modo) cuando estudiamos la geometría analítica, un modelo descubierto por Descartes a principios del siglo XVII, y cuyas primeras ideas se encuentran en la lejana Grecia.

En la obra de Descartes aprendemos que las rectas y curvas son soluciones de ecuaciones algebraicas, es decir, el modelo geométrico es llevado a un modelo algebraico; pero éste, a su vez, descansa en la idea de número. Así, los números son la base para comprender al mundo geométrico y al universo todo.

Pero... ya vimos que, por ejemplo, $\sqrt{2}$ era un número irracional que por muchísimos siglos no tuvo una precisión matemática. ¿Qué es un número irracional?... un límite de números racionales, y así usamos nuevamente la idea de infinito.

Conclusión: la base del edificio matemático es la aritmética, el mundo de los números, incluyendo los números transfinitos. Por este argumento, nuevamente caemos en las ideas dadas por Cantor, Zermelo, entre otros.

¿La aritmética es un sistema consistente? A comienzos de siglo, los matemáticos interesados en los fundamentos comenzaron a reflexionar en tal cuestión, entre ellos Peano y Frege, quienes construyeron teorías basadas en un conjunto de axiomas, que asumieron completos y consistentes. En tales teorías, el esquema de Euclides estaba latente, pero en otras circunstancias y con otros recursos. Así va naciendo la lógica simbólica, uno de cuyos precursores fue Boole.

Cuando los esfuerzos de Cantor y el movimiento rigorista iba por buen camino, surge una conmoción en el mundo de la matemática cuando se descubren ciertas contradicciones en los fundamentos. Las paradojas encontradas hicieron tambalear al edificio matemático. La teoría del infinito ya se estaba imponiendo; inclusive sus más duros críticos la aceptaban ante la evidencia de sus argumentos y sus sorpresivos resultados. Justo cuando el panorama era alentador, surgen las paradojas.

Cantor, en 1895, descubre una paradoja en los números cardinales, la que fue redescubierta por Buroli-Forti en 1897. Mas concretamente, tenemos los resultados siguientes:

TEOREMA A.

Dado un número cardinal, siempre es posible determinar otro mayor.

TEOREMA B.

Existe un número cardinal mayor que todos los demás.

Es claro que estos dos teoremas son contradictorios.

Veamos ahora las siguientes situaciones.

–. Sea Z el conjunto de los números enteros; es claro que Z no es un número entero; luego, él no se contiene a si mismo como elemento. Este tipo de conjuntos son llamados *ordinarios*. En caso contrario, los conjuntos sonllamados *extraordinarios*.

Pongamos Y= {conjuntos ordinarios}

¿Es Y un conjunto ordinario o extraordinario? Veamos:

(i) si Y fuera ordinario, entonces Y está contenido en el conjunto Y, y entonces Y es extraordinario, lo que es contradicción.

(ii) si Y fuera extraordinario, entonces Y está contenido en Y, pero entonces Y es ordinario; nuevamente tenemos contradicción.

Es decir, verificamos que:

Y es ordinario $\Leftrightarrow$ Y es extraordinario.

–. (Paradoja del cartón). El lógico inglés Jourdain escribió en una de las caras de un cartón la siguiente frase:

(α_1) la sentencia escrita en el reverso de este cartón es verdadera.

En la otra cara del mismo escribió:

(α_2) la sentencia escrita en la otra cara es falsa.

Veamos:

Si (α_1) es verdadero, entonces (α_2) es verdadero, luego (α_1) es falso:

Si (α_1) es falso, entonces (α_2) es falso, luego (α_1) es verdadero.

Conclusión: (α_1) es al mismo tiempo verdadero y falso.

Alguien afirma: *"yo estoy mintiendo"* (*)

Si (*) es verdadero, la persona miente y por tanto (*) es falso;

Si (*) es falso, la persona dice la verdad, y por tanto (*) es verdadero.

Luego, (*) es verdadero $\Leftrightarrow$ (*) es falso.

–. Con todas las palabras y símbolos que figuran en un libro de teoría de conjuntos y de números, podemos denotar muchos números naturales por medio de frases construidas a partir de esas palabras y símbolos, teniendo en el máximo "ocho" ocurrencias de los mismos.

Sea C el conjunto de tales números. C es finito. Como el conjunto N de los números naturales es infinito, hay números que no pertenecen a C.

Consideremos ahora el siguiente número n:

" el menor número que no pertenece a C "

1 2 3 4 5 6 7 8

Análisis:

$n \notin C$ por construcción;

$n \in C$ porque fue definido con palabras y símbolos constantes que aparecen en el libro, en número de "ocho".

Las paradojas fueron estudiadas exhaustivamente por los lógicos y se crearon soluciones muy ingeniosas para esclarecer tales, y otras, situaciones conflictivas. ¿Qué observamos en las paradojas citadas anteriormente?... que el lenguaje familiar no es el apropiado para el tratamiento riguroso de la lógica, y de la matemática.

Tarski descubrió que todo lenguaje, como el común, que es universal en el sentido de que puede inclusive referirse a sí mismo, nos lleva a contradicciones inevitablemente. Así surge la necesidad de desarrollar lenguajes artificiales, puramente formales, los que se llaman lenguajes formalizados.

5. Escuelas Matemáticas Tradicionales.

El problema de las paradojas determinó distintos movimientos filosóficos de la matemática, cuyas diferencias eran el punto de vista de interpretar y resolver las paradojas.

Las escuelas que surgieron, entre otras, son:

(a) el logicismo (B. Russell, ...)
(b) el intuicionismo (Brouwer, Weyl, Borel, Krönecker, Poincaré, ...)
(c) el formalismo (Hilbert, ...)

Digamos algunas palabras sobre estas clásicas escuelas,

las mismas que han contribuido a comprender más profundamente la naturaleza misma de la matemática.

5.1 El Logicismo

Hemos dicho que la matemática descansa en el concepto de número y de sus propiedades. En un programa destinado a rigorizar la aritmética, el matemático alemán Gottlob Frege publica una obra con tal fin. Al término del segundo volumen, confiesa lo desolado que se encuentra al recibir una carta de Russell, en la que le expone una contradicción en su teoría.

El filósofo y lógico Bertrand Russell crea el movimiento logicista para superar la crisis producida por las paradojas. Sumerge a la matemática en el universo de la lógica.

A los conjuntos ordinarios (vistos en la anterior sección) los llama "conjuntos predicativos", y a los extraordinarios, "conjuntos no-predicativos". Si Y = {conjuntos predicativos}, llegaremos nuevamente a una contradicción.

Se observó que las contradicciones obtenidas en la teoría de conjuntos se debió al uso de conjuntos no-predicativos. En esencia, esta es también la razón del conflicto entre los teoremas A y B.

Conclusión: debemos, según la teoría, desterrar los conceptos o razonamientos no predicativos.

Russell se propone la gran tarea de reconstruir la teoría de conjuntos bajo tal condición, lo que consiguió. Fue un enorme trabajo y se encuentra en los "Principia Matemática", una colosal obra escrita conjuntamente con el matemático Alfred Whitehead.

Con la teoría de los tipos, esta escuela logra que no aparezcan nuevas paradojas, pero... no garantiza que no aparezcan en el futuro. Por otro lado, los matemáticos se volvieron desconfiados al proclamar que ninguna teoría matemática estaría libre de contradicciones, a menos que se pruebe lo contrario. Es decir, el problema es probar la consistencia de la matemática.

Como el reto fue muy duro para los logicistas, las otras escuelas se proponen la tarea de encontrar la solución.

5.2 *El Formalismo*

La matemática debe mucho al matemático alemán David Hilbert. Fue una mente universal, y por tanto la crisis de los fundamentos atrajo su atención. Formuló un grandioso programa, que en parte fue análogo a lo hecho por Euclides en la antigüedad. Consistía, en primer lugar, en elaborar un método que permitiese construir la matemática en base a un conjunto de axiomas. Luego, se debe elaborar un método que pruebe la consistencia o inconsistencia de la teoría.

En un informe (1901) contenido en los "Fundamentos de la Geometría", Hilbert formaliza la teoría axiomática. Los axiomas deben ser elegidos de modo que no produzcan contradicciones. Los elementos de la teoría son entes abstractos que no necesitan ser definidos; sólo interesan las relaciones que puedan establecerse entre ellos.

Con el objeto de evitar conflictos, y que la teoría no se derrumbe, Hilbert crea la metamatemática, la que es una teoría de la demostración. Los formalistas fueron optimistas en conseguir la consistencia de la matemática. Inclusive, aspiraron a que la teoría fuera completa, esto es, que podamos probar, positiva o negativamente, todo teorema formulable.

Hilbert en 1931 era un matemático reconocido mundialmente; su autoridad era dominante. En ese año, un joven checoamericano de 25 años, Kurl Gödel probó que la búsqueda de Hilbert y su escuela era algo que no tenía respuesta.

Gödel probó dos cosas fundamentales:

(i) si la teoría axiomática de conjuntos es consistente, entonces existen teoremas que no pueden ser probados ni refutados.

(ii) no existe ningún procedimiento constructivo que pruebe que la teoría axiomática de conjuntos sea consistente.

Es decir, no es posible la prueba de la consistencia absoluta de la matemática, ni podrá hacerse alguna vez. Así, Hilbert buscaba lo que no existe. La matemática no puede probar su propia consistencia. El trabajo de Gödel es brillante y muy difícil de comprender sus argumentos.

Cantor sospechó, y Hilbert postuló, que no existe un número cardinal $\bar{c}$ tal que $c_0 < \bar{c} < c_1$ (ver sección 3). Esto constituyó el famoso problema de la "hipótesis del continuo", un problema muy difícil de atacar.

En 1938, Gödel probó que si agregáramos tal hipótesis a la teoría de conjuntos, ésta no se perturba; no pasa nada. Por otro lado, no es posible probar la falsedad de la existencia de tal $\bar{c}$.

Algo más, en 1963 Paul Cohen prueba que si asumiéramos que la hipótesis del continuo fuera falsa, entonces tampoco se llega a una contradicción.

En conclusión, no es posible probar la validez o falsedad de la hipótesis del continuo. La podemos aceptar o rechazar, que nada malo sucederá; no llegaremos a conflicto alguno.

Aún, Gödel prueba que, con los recursos de la propia teoría, ella no puede ser consistente y completa. En otrs palabras, si es completa, encontraremos contradicciones alguna vez. Si fuera consistente, entonces siempre existirán teoremas ciertos que nunca podremos demostrar!

Se afirma que Hilbert quedó muy impresionado con los trabajos de Gödel, el más profundo lógico de todos los tiempos.

5.3 El Intuicionismo

Esta escuela fue cimentada por el matemático holandés Iuitzen E.J. Brouwer, y tuvo entre sus precursores a Krönecker y a Poincaré. Esta tendencia tuvo entre sus filas a distinguidos matemáticos como Borel, Weyl, Skolen, ... ¿En qué consiste?

Según esta escuela, las paradojas se deben al uso

(i) del infinito actual en la teoría de conjuntos; es decir, al infinito se le da un carácter cerrado y acabado; es un número transfinito;

(ii) del principio del tercio excluido, heredado desde la época de Aristóteles.

Por lo tanto, esta escuela se propone reconstruir la matemática sin usar al infinito como un número, es decir no se deben usar los números transfinitos. Por otro lado, se debe abandonar la lógica aristotélica y crear una nueva lógica apropiada.

Como apreciamos, esta tendencia reclama la vuelta a la aritmética clásica como fundmento de la matemática; el número natural es la base del edificio. Además, sólo se debe usar al infinito potencial, esto es, al infinito como una sucesión abierta de números naturales: dado un número natural, siempre existe uno mayor que él.

Esta escuela tuvo un final no alentador para ellos, ya que les fue desfavorable trabajar bajo tales condiciones. Los números transfinitos constituyen un arma importante en muchas cuestiones de la matemática moderna. Además, Hilbert demostró que el infinito actual en realidad no origina contradicciones. Asimismo, el uso de la prueba por reducción al absurdo es también un recurso útil en muchas situaciones.

En conclusión: la crisis en los fundamentos permitió que conociéramos mejor la esencia de la matemática.

Bibliografía

[1] *J. Babini:* "Historia de las ideas modernas en matemática". OEA. Monog. Nº 4. 1967.

[2] *A. Delachet:* "Análisis matemático". Edit. Tecnos. Madrid. 1973.

[3] *F. Miró Quesada:* "Filosofía de las matemáticas". Notas de clase. U.N.M. San Marcos. 1954.

[4] *Salvat, biblioteca:* "La nueva matemática". Barcelona. 1975.

[5] *E. Vidal Abascal:* "La nueva matemática". Edit. Dossat. Madrid. 1961.