Pro Mathematica: Vol. II, No. 3, 1988

SOBRE UNA ECUACION NUEVA DE LA FISICA - MATEMATICA

Holger SAAVEDRA SALAS (*)

En el artículo [1], manifestamos nuestro deseo de construir una teoría matemática para el operador S_α y dimos inicio a ella, estableciendo una estimación en el espacio funcional de Sobolev. En este artículo proseguimos dicha construcción estudiando una ecuación diferencial en derivadas parciales, generada por un operador de tipo S_α Para esta ecuación demostraremos el teorema de unicidad y la dependencia continua de las soluciones de los problemas de contorno de los datos iniciales.

Introducción.

Definamos de la siguiente manera al operador

$$S_\alpha \equiv \frac{\partial^2 L_n}{\partial t^2} + \omega^2 \frac{\partial}{\partial x_n} r(x) \frac{\partial}{\partial x_n} + (\alpha_T \alpha_T^\circ + \alpha_S^\circ \alpha_S) L_{n-1} \qquad (1)$$

(*) Profesor Contratado en la UNMSM.

donde L_n es un operador elíptico con coeficientes variables de la forma:

$$L_n \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \, p(x) \, \frac{\partial}{\partial x_j} \, - q(x) \tag{2}$$

$x \in \Omega \subset R^n$; Ω es campo de las variables espaciales

$$Q_T = \{(x, t): x \in \Omega \, , \, o < t \leq T < \infty\}$$

El campo Q_T es un cilindro con base Ω_0 , $\Omega_0 = Q \cap \{t = 0\} \subset R^n$ y con contorno lateral $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$

Vamos a considerar que $\partial\Omega$ es suficientemente suave y además $p(x) \geq p_o > 0$, $r(x) \geq r_o > 0$ y $q(x) \geq q_o > 0$.

Veamos a la ecuación generada por el operador (1)

$$S_\alpha \, U \, (x, t) = -F(x, t) \tag{3}$$

con las condiciones iniciales siguientes:

$$\left.\begin{aligned} U(x, t) \,\big|_{t=0} &= \varphi(x) \\ U'_t(x, t) \,\big|_{t=0} &= \psi(x) \end{aligned}\right. \tag{4}$$

y con una de las tres condiciones de contorno siguientes:

1. *Primera condición de contorno.*

$$U(x, t) \,\big|_{\Sigma} = \vartheta_1 \, (x,t) \tag{5'}$$

2. *Segunda condición de contorno.*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} p(x) \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} + \omega^2 r(x) \frac{\partial U}{\partial x_n} \cos(\vec{n}, x_n)$$

$$+ \alpha^2 \sum_{j=1}^{n-1} p(x) \frac{\partial U}{\partial x_j} \cos(\vec{n}, x_j)) \Big|_{\Sigma} = \vartheta_2$$

donde: $\alpha^2 \equiv \alpha_T \alpha_T^o + \alpha_s \alpha_s^o$ (5")

3. ***Tercera condición de contorno.***

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} p \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} + \omega^2 r \frac{\partial U}{\partial x_n} \cos(\vec{n}, x_n) + \alpha^2 \sum_{j=1}^{n-1} p \frac{\partial U}{\partial x_j} \cos(\vec{n}, x_j)$$

$$+ \sigma(x)\, U) \Big|_{\Sigma} = \vartheta_3 (x, t) \qquad (5''')$$

donde: $\sigma(x) \geq 0$ y $\vec{n}$ es un normal exterior a la superficie Σ.

Si las funciones $\sigma(x)$, $\vartheta_j(x,t)$; j = 1,2,3 son suficientemente suaves, entonces las condiciones no homogéneas de contorno se pueden reducir a condiciones homogéneas de contorno con la ayuda de una función sustitutoria. Por eso vamos a estudiar el problema (3) – (4) con alguna de las siguientes condiciones de contorno:

$$U \big|_{\Sigma} = 0 \qquad (5')$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} p \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} + \omega^2 r \frac{\partial U}{\partial x_n} \cos(\vec{n}, x_n)$$

$$+ \alpha^2 \sum_{j=1}^{n-1} p \frac{\partial U}{\partial x_j} \cos(\vec{n}, x_j)) \Big|_{\Sigma} = 0 \qquad (5")$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad p\frac{\partial U}{\partial \vec{n}} + \omega^2 r\frac{\partial U}{\partial x_n} \quad \cos(\vec{n},x_n) \; + \; \alpha^2 \sum_{j=1}^{n-1} \; p\frac{\partial U}{\partial x_j} \quad \cos(\vec{n},x_j)$$

$$+\,\sigma(x)\,U \quad \Big|_{\Sigma} \quad = 0 \qquad (5''')$$

Puesto que la ecuación (3) es invariante ante la sustitución de t por –t, entonces todo el análisis realizado de la ecuación (3) para los valores de t positivos y negativos es correcto.

Vamos a llamar solución clásica a la solución de los problemas mixtos (3) – (5), si:

$$U \in C^{2,2}_{x,t}(Q_T) \qquad y \qquad U \in C^{1,2}_{x,t}(\bar{Q}_T)$$

donde: $\bar{Q}_T \equiv Q_T \cup \Omega_0 \cup \Sigma$

Sea $L_{2,\rho}$ (Ω) un espacio funcional cuadrático sumable con el siguiente producto interior y norma:

$$(f,g) \;=\; \int_{\Omega} p(x)\,f(x)\,g(x)\,dx, \quad f,g \in L_{2,\rho}(\Omega)$$

$$\|f\|^2_{L_{2,\rho}(\Omega)} \;=\; \int_{\Omega} p(x)\,|f|^2\,dx$$

Unicidad de la solución de los problemas de contorno - iniciales. Estimaciones energéticas

Teorema 1:
La solución de la ecuación (3), con la condición inicial (4) y una de las condiciones de contorno, es única en la clase

$$C^4_{x,t}(Q) \cap C^3_{x,t}(Q), \qquad \text{si} \quad F(x,t) \in C(\overline{Q})$$

Demostración:
Para demostrar el teorema (1) es suficiente establecer, que la función $U(x,t) = U_1(x,t) - U_2(x,t)$ que satisface a la ecuación homogénea (3), a las condiciones iniciales (4) y a una de las conclusiones de contorno (5), es idénticamente igual a cero. Para el cumplimiento de este objetivo vamos a obtener una estimación energética para las soluciones de los problemas de contorno iniciales (3) – (5) en el cilindro Q_τ.

Multiplicando la ecuación (3) por $\partial U/\partial t$ y luego integrando la igualdad obtenida respecto a Q_τ, donde τ es un número arbitrario del segmento [0, T], es decir $\tau \in [0, T]$ y $\Omega_\tau = \overline{Q}_\tau \cap \{t = \tau\}$, obtenemos:

$$\int_0^\tau\int_\Omega \{ \frac{\partial U}{\partial t} [\frac{\partial^2}{\partial t^2} L_n U + \omega^2 \frac{\partial}{\partial x_n} r(x) \frac{\partial U}{\partial x_n} + L_{n-1} U]\} \, dxdt =$$

$$= - \int_0^\tau\int_\Omega F(x,t) \, dxdt \qquad (6)$$

Puesto que:

$$\frac{\partial U}{\partial t}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\ L_n U = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial U}{\partial t}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\ p(x) \frac{\partial U}{\partial x_j} \right] - \right.$$

$$\left. \frac{1}{2}\, p(x)\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x_j} \right)^2 \right\} \quad \frac{1}{2}\ \frac{\partial}{\partial t} \left[g(x) \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 \right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} L_{n-1} U = \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial U}{\partial t}\ p(x) \frac{\partial U}{\partial x_j} \right] - \frac{1}{2}\ \frac{\partial}{\partial t} \left[p(x) \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} \right)^2 \right] \right\}$$

$$- \frac{1}{2}\ \frac{\partial}{\partial t} \left[q(x)\, U^2 \right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}\ \frac{\partial}{\partial x_n}\ r(x)\ \frac{\partial U}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n} \left[\frac{\partial U}{\partial t}\ r(x)\ \frac{\partial U}{\partial x_n} \right]$$

$$- \frac{1}{2}\ \frac{\partial}{\partial t} \left[r(x) \left(\frac{\partial U}{\partial x_n} \right)^2 \right]$$

entonces tenemos:

$$- \frac{1}{2} \iint_{o\ \Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_{j=1}^{n} p(x) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x_j} \right)^2 + q(x) \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \alpha^2 \sum_{j=1}^{n-1} p(x) \right.$$

$$\left. \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} \right)^2 + \alpha^2\ q(x)\, U^2 + \omega^2\ r(x) \left(\frac{\partial U}{\partial x_n} \right)^2 \right\} dx\, dt + \iint_{0\ \partial\Omega}^{\tau} \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$\left\{ p(x)\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\ \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} + \omega^2\, r(x)\ \frac{\partial U}{\partial x_n} \cos(\vec{n}, x_n) + \alpha^2 \sum_{j=1}^{n-1} p(x)\ \frac{\partial U}{\partial xj} \right.$$

$$\left. \cos(\vec{n}, x_j) \right\}\ dS dt = - \iint_{o\ \Omega}^{\tau} \frac{\partial U}{\partial t} F(x, t)\, dx\, dt \tag{7}$$

Utilicemos las notaciones siguientes:

$$I^2(\tau) = \int_{\Omega_\tau} \{p(x)(\frac{\partial}{\partial t} \nabla U)^2 + q(x)(\frac{\partial U}{\partial t})^2 + \omega^2 r(x)(\frac{\partial U}{\partial x_n})^2 +$$

$$\alpha^2 \sum_{j=1}^{n-1} p(x)(\frac{\partial U}{\partial x_j})^2 + \alpha^2 q(x) u^2 \} dx$$

$$I^2(0) = \int_{\Omega_0} \{p(x)[\nabla \psi(x)]^2 + q(x)[\psi(x)]^2 + \omega^2 r(x)(\frac{\partial \varphi}{\partial x_n})^2 +$$

$$\alpha^2 \sum_{j=1}^{n-1} p(x)(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j})^2 + \alpha^2 q(x)[\varphi(x)]^2 \} dx$$

entonces de (7) obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2} I^2(\tau) - \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} \{p(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} + \omega^2 r(x) \frac{\partial U}{\partial x_n} \cos(\vec{n}, x_n) + \alpha^2 \sum_{j=1}^{n-1}$$

$$p(x) \frac{\partial U}{\partial x_j} \cos(\vec{n}, x_j)\} \, dS \, dt = \frac{1}{2} I^2(0) + \int_0^\tau \int_\Omega \frac{\partial U}{\partial t} F(x,t) \, dx \, dt \qquad (8)$$

La segunda expresión de la parte izquierda de (8) es igual a cero para la primera y segunda condición de contorno y es igual a:

$$\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \sigma(x) U \frac{\partial U}{\partial t} dS \, dt = \frac{1}{2} \int \sigma(x) U^2(\sigma, x) \, dS - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_0} \sigma(x) \varphi^2(x) \, dS$$

para la tercera condición de contorno.

Utilizando la indicación siguiente:

$$E^2(\tau) = I^2(\tau) + \int_{\partial\Omega_\tau} \sigma(x)\, U^2\, \partial S' \qquad (*)$$

obtenemos:

$$E^2(\tau) = E^2(0) + 2\int_0^\tau\int_\Omega \frac{\partial U}{\partial t}\, F(x,t)\, dx\, dt \qquad (9)$$

La expresión $E^2(\tau)$ se llama integral de energía. Esta expresión representa la suma de las energías cinética y potencial |2| del sistema mecánico en el momento de tiempo τ.

Si $F(x,t) \equiv 0$, entonces tenemos:

$$E^2(\tau) = E^2(0) \qquad \forall\tau \geq 0 \qquad (10)$$

Es decir la energía total del sistema mecánico, cuando sobre él no actúan fuerzas externas es invariante con respecto al tiempo. La igualdad (9) expresa la ley de conservación de la energía.

De la igualdad (9) se obtiene el teorema de unicidad inmediatamente. En realidad si:

$F = \varphi(x) = \psi(x) = 0$, entonces:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x_j} = \frac{\partial U}{\partial x_j} = \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \qquad \forall j = 1, 2, 3$$

Por consiguiente $U \equiv 0$ en $\overline{Q}$. *l.q.q.d.*

Sobre la dependencia continua de las soluciones de los problemas de contorno–inicial.

Teorema 2:

Para las soluciones de los problemas de contorno–iniciales (3)–(5) tienen lugar las siguientes estimaciones:

$$||\frac{\partial}{\partial t}\nabla U||_{L_{2,p}(\Omega)} + ||\frac{\partial U}{\partial t}||_{L_{2,q}(\Omega)} + \omega^2 ||\frac{\partial U}{\partial x_n}||_{L_{2,r}(\Omega)} +$$

$$+ \alpha^2 \{||\nabla' U||_{L_{2,p}(\Omega)} + ||U||_{L_{2,q}(\Omega)}\} \leq 5 \{E(0) +$$

$$\frac{1}{\sqrt{q_o}} \int_o^\tau ||F'||_{L_2(\Omega)} dt\} \tag{11}$$

$$||U||_{L_{2,q}(\Omega)} \leq ||\varphi||_{L_{2,q}(\Omega)} + t E(0) + \frac{1}{\sqrt{q_o}} \int_o^\tau (t-\tau) ||F||_{L_2(\Omega)} d\tau \tag{12}$$

donde:

$$\nabla = (\nabla', \frac{\partial}{\partial x_n}) = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x_n})$$

Demostración:

Derivemos (*) con respecto a τ y utilizando la desigualdad de Cauchy–Bunikovsky obtenemos:

$$E'(\tau)E(\tau) = \bullet \int_{\Omega} F(x,t) \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=\tau} dx = \bullet \int_{\Omega\tau} F(x,t) \frac{\partial U}{\partial t} dx \leq$$

$$\leq \int_{\Omega\tau} |F/\sqrt{q}|^2 dx \,.\, \left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|_{L_{2,q}(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{q_o}} \|F\|_{L_2(\Omega)} \,.$$

$$.\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|_{L_{2,q}(\Omega)} \tag{13}$$

pero:

$$\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2_{L_{2,q}(\Omega)} \leq E^2(\tau), \qquad \text{es decir:}$$

$$\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|_{L_{2,q}(\Omega)} \leq E(\tau) \tag{14}$$

en vista de que la expresión:

$$\int_{\partial\Omega} \sigma(x)\, U^2(\tau, x)\, dS'$$

es positivo, de igual manera obtenemos las siguientes desigualdades:

$$\left\|\frac{\partial \nabla U}{\partial t}\right\|_{L_{2,p}(\Omega)} \leq E(\tau) \tag{15}$$

$$\left\| \frac{\partial U}{\partial x_n} \right\|_{L_{2,r}(\Omega)} \leq E(\tau) \tag{16}$$

$$\| \nabla' U \|_{L_{2,p}(\Omega)} \leq E(\tau) \tag{17}$$

$$\text{y} \quad \| U \|_{L_{2,q}(\Omega)} \leq E(\tau) \tag{18}$$

Tomando en cuenta la desigualdad (14) de la estimación (13) obtenemos:

$$E'(\tau) \leq \frac{1}{\sqrt{q_o}} \| F \|_{L_2(\Omega)}$$

Integrando con respecto a τ desde cero hasta t tenemos:

$$E(\tau) \leq E(0) + \frac{1}{\sqrt{q_o}} \int_o^t \| F \|_{L_2(\Omega)} d\tau \tag{19}$$

Ahora con la ayuda de las desigualdades (14)–(18) obtenemos la estimación (11).

La estimación (12) se obtiene de la igualdad siguiente:

$$\| U \|^2_{L_{2,q}(\Omega)} = \int_\Omega q(x)\, U^2(x,t)\, dx \tag{20}$$

Derivando la igualdad (20) y luego utilizando la desigualdad de Cauchy–Bunikovsky y la desigualdad (19) obtenemos:

$$2\,\|U\|_{L_{2,q}(\Omega)} \frac{d}{dt} \|U\|_{L_{2,q}(\Omega)} = 2\int_{\Omega} \sqrt{q}\,U\sqrt{q}\,\frac{\partial U}{\partial t}\,dx \le$$

$$\le 2\,\|U\|_{L_{2,q}(\Omega)} \left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|_{L_{2,q}(\Omega)} \le 2\,\|U\|_{L_{2,q}(\Omega)} (E(0) +$$

$$\frac{1}{\sqrt{q_o}} \cdot \int_o^t \|F\|_{L_2(\Omega)} d\tau)$$

de donde:

$$\frac{d}{dt} \|U\|_{L_{2,q}(\Omega)} \le E(0) + \frac{1}{\sqrt{q_o}} \int_o^t \|F\|_{L_2(\Omega)} d\tau \quad \forall \ t \in [0, \tau]$$

Integrando esta desigualdad, tenemos:

$$\|U\|_{L_{2,q}(\Omega)} \le \|\varphi\|_{L_{2,q}(\Omega)} + t\,E(0) +$$

$$\frac{1}{\sqrt{q_o}} \int_o^t (\int_o^{t_1} \|F\|_{L_2(\Omega)} d\tau)\,dt$$

Cambiando el orden de integración en el último integral de la siguiente manera:

$$\int_o^t (\int_o^{t_1} \phi(\tau)\,d\tau)\,dt_1 = \int_o^t (\int_\tau^t \phi(\tau)\,dt_1)\,d\tau = \int_o^t (t-\tau)\,\phi(\tau)\,d\tau$$

donde $\phi(\tau) = \|F\|_{L_2(\Omega)}$, finalmente obtenemos la siguiente estimación:

$$\|U\|_{L_{2,q}(\Omega)} \leq \|\phi\|_{L_{2,q}(\Omega)} + t\,E(0) + \frac{1}{\sqrt{q_o}} \int_o^t (t-\tau)\,\phi(\tau)\,d\tau$$

l.q.q.d.

Teorema 3:
La solución clásica de los problemas mixtos (3) – (5) depende en forma continua de los datos iniciales $\varphi(x)$, $\psi(x)$ y $F(x,t)$, si:

$$\nabla\varphi,\ \nabla\psi \in L_{2,p}(\Omega),\ \varphi(x), \psi(x) \in L_{2,q}(\Omega) \text{ y } F(x,t) \in L_2(\Omega).$$

Para el problema de contorno–inicial en el caso de la tercera condición de contorno es necesario además la siguiente condición:

$$U \in L_{2,\sigma}(\Omega)$$

Demostración:
La demostración proviene del teorema (2), puesto que a incrementos pequeños de las condiciones iniciales y de la parte derecha de la ecuación (3) le corresponde un incremento pequeño de la solución clásica del problema, $\forall\, t \in [0, T]$.

l.q.q.d.

Bibliografía

[1] *H. Saavedra Salas:* Sobre un nuevo operador de la física matemática. Revista de la Facultad de Ciencias Matemáticas UNMSM, 1987.

[2] *H. Saavedra Salas*: Sobre la construcción del funcional de Lagrange para una ecuación diferencial generada por un operador de tipo S_α. Facultad de Ciencias Físicas UNMSM, 1987.