$\mathcal{P}ro\ \mathcal{M}athematica$: Vol. $\mathcal{II}$, $\mathcal{N}o.4$, 1988

CALCULO ESTOCASTICO Y UNA APLICACION A LA ESTADISTICA*

Arturo KOHATSU**

1. Cálculo Estocástico

En esta primera sección se intentará dar una somera descripción de las integrales con respecto a martingalas y algunas de sus propiedades. Luego generalizaremos esto, al de semimartingalas.

Una semimartingala es un proceso estocástico $X_t, t \geq 0$ cuya estructura está dada por dos componentes, una con una variación relativamente pequeña V_t, y una componente de rápida variación (ruido) $M_t, t \geq 0$.De tal forma que $X_t = V_t + M_t$. La definición formal es la siguiente:

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio probabilístico, equipado con una familia no-decreciente de σ-álgebras $F = (\mathcal{F}_t)$ donde $\mathcal{F}_0$ ha sido completado con los conjuntos P-nulos y $\mathcal{F}_t$ es contínua por la derecha, i.e. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}(= \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s)$.

* Resumen de una conferencia dada por el autor en la PUCP.

** Ex alumno PUCP. Estudiante de doctorado en Purdue University

Si $(X_t)_{t\geq 0}$ es una familia de variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que X_t es $\mathcal{F}_t$-medible, para todo $t \geq 0$; entonces diremos que $X = (X_t, \mathcal{F}_t)$ es adaptado a F. La teoría se ha desarrollado bajo la condición siguiente: "Todos los procesos a estudiar pertenecen al espacio $(D, \mathcal{D})$ donde D es el espacio de funciones contínuas por la derecha y límites por la izquierda. $\mathcal{D}$ es el σ-álgebra generada por los borelianos de $\Re^d$ ". Estudios sobre este espacio pueden ser encontrados en Billingsley [1].

Por simplicidad, siempre asumiremos que $X_0 = 0$

$M = (M_t, \mathcal{F}_t)$ es una martingala (sub-) si:

1) $E \mid M_t \mid < +\infty \quad \forall t \geq 0$
2) $E(M_t/\mathcal{F}_s) = (\geq) M_s \quad s \leq t$

Lévy y Doob estudiaron la noción de martingala como la extensión de sumas de variables aleatorias independientes y probaron teoremas límites para esta nueva clase de procesos.

En 1965, K. Ito y S. Watanabe extendieron esta noción a la martingala local. Una martingala local $M = (M_t, \mathcal{F}_t)$ es un proceso adaptado para el cual es posible encontrar una sucesión de tiempos de detención $(\mathcal{T}_n)_{(n\geq 1)}$; que es creciente a infinito tal que los procesos detenidos $M^n = (M_{t\wedge \mathcal{T}_n}, \mathcal{F}_t)_{n\geq 1}$ son martingalas.

Nota: $\mathcal{T} : \Omega \to \Re^+$ es un tiempo de detención si $[\mathcal{T} \leq t] \in \mathcal{F}_t$. Ito empezó definiendo la integral estocástica en un caso particular, i.e.

$$M_t = \int_0^t H_s dW_s,$$

donde W_s es un proceso de Wiener (el cual es una martingala), $H = (H_t, \mathcal{F}_t)$ es un proceso adaptado y

$$\int_0^t H_s^2 ds \quad < +\infty \quad t \geq 0, a.s.[P] \tag{1}$$

En este caso, se define M_t, para el caso en que H_s es un proceso "simple" (como se suele hacer en teoría de medida) y luego se extiende este concepto a todos los H que cumplen (1) por intermedio de límites en $L^2(\Omega, P)$.

Si además

$$\int_0^t EH_s^2 ds \quad < +\infty \tag{2}$$

entonces M es una martingala (denotado por $M \in \mathcal{M}$). Si sólo se asume (1) sólo se obtiene que M es una martingala local. Esto se hace definiendo los tiempos de detención siguiente:

$$\mathcal{T}_n = \inf\{t / \int_0^t H_s^2 ds \geq n\}$$

y $M^n = (M_{t \wedge T_n}, \mathcal{F}_t)$ es una martingala. (aún más, es una martingala cuadrado integrable, i.e., $EM_{t \wedge T_n}^2 \leq n < +\infty$).

Denotaremos por $\mathcal{M}_{loc} = \mathcal{M}_{loc}(F, P)$ la clase de martingalas locales sobre Ω con una σ-álgebra fija $F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Usualmente, ocurre que la variación de las martingalas es no acotada, por lo cual constituye un modelo para la parte de la semimartingala de "rápida variación". Para describir la parte de "variación pequeña", sea $\mathcal{V}_{loc} = \mathcal{V}_{loc}(F, P)$ el espacio de los procesos $V = (V_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, que son de variación acotada localmente. Es decir, para todo $t \geq 0$ y $\omega \in \Omega$ la variación de V:

$$\int_0^t | dV_s(\omega) | \quad < +\infty.$$

Definición (Meyer. 1976) Un proceso estocástico $X = (X_t, \mathcal{F}_t)$ es una semimartingala (denotado por $X \in S = S(F, P)$) si existen $V \in \mathcal{V}_{loc}$, $M \in \mathcal{M}_{loc}$ tal que

$$X = V + M$$

Naturalmente tal representación no tiene porque ser única, además $\mathcal{M}_{loc} \cap \mathcal{V}_{loc} \neq \emptyset$ sin embargo en algunos casos, si lo es (representación especial).

S es un espacio suficientemente grande, para sospechar que no se está haciendo una teoría trivial. i.e.

$$\mathcal{M}_{loc} \subseteq S, \mathcal{V}_{loc} \subseteq S, \text{sub}\mathcal{M}_{loc} \subseteq S, \sup \mathcal{M}_{loc} \subseteq S,$$

donde los dos últimos símbolos representan a las submartingalas locales y a las supermartingalas locales.

Por ejemplo, cualquier proceso estacionario con incrementos independientes es una semimartingala (en general, un proceso de incrementos independientes será una semimartingala si su función característica es de variación acotada).

El proceso de Ito, $X = (X_t, \mathcal{F}_t)$ donde

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s(\omega)ds + \int_0^t b_s(\omega)dW_s$$

con

$$\int_0^t \mid a_s(\omega) \mid ds \quad < +\infty, \quad \int_0^t b_s^2(\omega)ds \quad < +\infty \quad \forall t \geq 0, a.s.[P],$$

es una semimartingala.

Además S es invariante con respecto a una transformación equivalente de medida, i.e. si $P \sim \tilde{P}$ en $(\Omega, \mathcal{F})$ entonces $S(F, P) = S(F, \tilde{P})$.

Casos de procesos que no son semimartingalas, son difíciles de encontrar; excepto el simple caso de una función determinística de variación no acotada. M. Yor ha probado que $\sqrt{\mid W \mid} \notin S$ donde W es un proceso de Wiener (i.e. $W_t \sim N(0, t)$).

Ahora, intentaremos generalizar el concepto de integración con respecto a semimartingalas. Wiener fue el primero que supo que la integral con respecto a un movimiento browniano (o proceso Wiener) no podía ser definida como una integral de Stieltjes para cada punto del espacio muestra debido a que las trayectorias del movimiento browniano son de variación no acotada. La definición de Wiener para esta integral, se refiere sólo al caso de una función determinística $H = (H_t)_{t \geq 0}$ y es en términos de integración por partes. Esto es,

$$\int_0^t H_s dW_s := H_t W_t - H_0 W_0 - \int_0^t W_s dH_s$$

Ito, definió la integral

$$(H \cdot W)_t \equiv \int_0^t H_s dW_s$$

para funciones $H = (H_t, \mathcal{F}_t)$ que satisfacen

$$\int_0^t H_s^2 ds \quad < +\infty, \quad t \geq 0 \quad a.s.[P].$$

El siguiente paso, fue dado por H. Kunita y S. Watanabe en 1967 quienes extendieron la definición de Ito, reemplazando el proceso de Wiener por una "martingala cuadrada integrable" arbitraria. Esta posibilidad estaba basada en los hechos principales: $(W_t, \mathcal{F}_t)$ y $(W_t^2 - t, \mathcal{F}_t)$ son martingalas.

En general, si $M = (M_t, \mathcal{F}_t) \in \mathcal{M}_{loc}^2$ entonces $M^2 = (M_t^2, \mathcal{F}_t)$ es una submartingala y de acuerdo al teorema de descomposición de Doob-Meyer, existe un proceso creciente predecible (i.e. con la información previa al tiempo t, se puede predecir la posición del proceso en t), denotado por:

$$< M >= (< M >_t, \mathcal{F}_t) \qquad < M >_0 = 0$$

tal que $M^2 - < M >$ es una martingala local.

Usando el proceso $< M >$ llamado la característica cuadrática de la martingala, Kunita y Watanabe, definieron la integral estocástica

$$(H \cdot M)_t = \int_0^t H_s dM_s$$

para la clase de procesos predecibles $H = (H_t, \mathcal{F}_t)$ que satisfacen la condición

$$E \int_0^t H_s^2 d < M >_s \quad < +\infty, t > 0.$$

Además probaron una fórmula de cambio de variables, o fórmula de Ito, la cual dice:

si $F = F(x) \in C^2$, entonces, con $X_t = (H \cdot M)_t$

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) H_s dM_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''(X_s) H_s^2 d < M >_s .$$

Esta es una de las fórmulas más importantes para el cálculo estocástico.

En el caso general, la definición de integración con respecto a semimartingalas, es simplemente una adición de integración con respecto a una martingala y otra en el sentido de Stieltjes.

Dellacherie demostró en 1980 que esencialmente ésta es la integración general maximal que uno puede obtener, si se extendiese el concepto de semimartingala, se reducirían los integrandos a procesos triviales.

2. Aplicaciones a Estadística

Una de las fuentes más importantes de aplicación del Cálculo Estocástico en la estadística es la caracterización de procesos límite.

Este tipo de trabajo empieza con Khonaladze (1983), trabajo en el cual caracteriza el proceso límite de

$$X_n(s) = \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{i \leq sn} \left\{ h(\nu_{ni}, \frac{i}{n}) - E(h(\nu_{ni}, \frac{i}{n})) \right\}$$

donde

$$\nu_{ni} = n\Delta \hat{F}_n(\frac{i}{n}) = n[\hat{F}_n(\frac{i+1}{n}) - \hat{F}_n(\frac{i}{n})]$$

$\hat{F}_n$ es la función de distribución empírica de ciertas variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, h es tal que $\mid h(x,t) \mid < ce^{ax}, c > 0, a > 0$. Este tipo de estadístico, es una generalización de estadísticas del tipo χ^2.

Primero, se prueba que $X_n(s)$ es una semimartingala, donde la parte que es martingala está caracterizada por:

$$W_n(s) = \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{i \leq sn} \left\{ h(\nu_{ni}, \frac{i}{n}) - E(h(\nu_{ni}, \frac{i}{n})/\mathcal{F}_i^n) \right\}$$

donde $\mathcal{F}_i^n = \sigma(\nu_{n0}, \ldots, \nu_{n(i-1)})$.

Teorema. Sea f la densidad de F (función de distribución de X) si $\|f\| = \sup_x |f(x)|$ es finito entonces $W_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W^{\mathcal{T}}$ en D cuando $n \to +\infty$.

Aquí $\mathcal{T}(s) = \int_0^s \sigma^2(t)d(t)$ $\sigma^2(t) = varh(Z,t)$ donde $Z \sim Poisson(f(t))$. $W_t^{\mathcal{T}} \sim N(0, \mathcal{T}(t))$. ($\mathcal{D}$ significa convergencia en distribución)

Para la parte de variación acotada se obtiene el siguiente teorema

Teorema. Sea $K^n = X_n - W_n$. Si $\|f\| < +\infty$ y $\epsilon > 0$. Si $\sqrt{n}[1 - F_n(T_n)] \to \delta(\epsilon) > 0$ cuando $n \to +\infty$

donde $T_n = 1 - \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$. Entonces $K^n \xrightarrow{\mathcal{D}} K$, donde

$$K(t) = -\int_0^t E_{f(s)}(h(Z,s)(Z - f(s)))\frac{\sigma(s)}{1 - F(s)}ds$$

El subíndice $f(s)$ significa que la esperanza ha sido tomada con respecto a $Z \sim Poisson(f(s))$

Este tipo de desarrollo es el que se está empezando a usar extensivamente en el área. Es decir, obtener la descomposición (de Doob-Meyer) de la semimartingala en martingala y proceso de variación acotada y hallar el límite de cada parte. Por supuesto, también existen otras técnicas que aquí no se mencionan.

Bibliografía

[1] *Billingsley, P.* (1968) "Convergence of Probability Measures" Willey, NY.

[2] *Dellacherie, C.* (1980) "Un Survol de la Théorie de l'integrale Stochastique" Proc. of the International Congress of Mathematicians. Helsinski, 1978, Vol 2, pp. 733-739

[3] *Kas, P.B.L.S.* (1987) "Asymptotic Theory of Statistical Inference" New York

[4] ***Lipster R. y Shiryayev A.*** **(1978) "Statistics of Random Processes" Vols. I,II, Berlin: Springer - Verlag.**