

## ASPECTOS GEOMETRICOS DE LA DINAMICA DEL SUENO

Francisco PASQUEL C.\*

*La versatilidad de la Teoría de Catástrofes y su importancia como una herramienta del Análisis Cualitativo, se evidencia en las múltiples aplicaciones en las diferentes ramas de la ciencia.*

*En el presente artículo continuamos explorando las aplicaciones de la Teoría de Catástrofes en el campo de la Fisiología, tema que iniciamos con un artículo introductorio aparecido en el Vol. I Nº 2, 1987 de la revista *Pro Mathematica*, en donde hemos indicado algunos conceptos básicos. Recomendamos asimismo al lector interesado en el tema, las referencias introductorias básicas (4) y (6) indicadas en la bibliografía.*

---

\* Profesor Contratado en la Sección Matemáticas de la PUCP.

El sueño es un fenómeno cotidiano inherente a todo ser humano, sin embargo guarda todavía muchas incógnitas referentes a su estructura y finalidad, lo cual es motivo de sumo interés para la investigación moderna.

La finalidad de este artículo es resaltar el aspecto "cuspoide" del fenómeno, apoyándonos en un modelo geométrico, basado en la Teoría de Catástrofes de René Thom, de tal forma que nos permita entender ciertos aspectos relacionados con la dinámica del sueño. Luego, tratemos en primer lugar de sintetizar las características psicofisiológicas que nos proporcione la investigación actual del fenómeno, las cuales son elementos necesarios para la comprensión del modelo que se describirá.

La investigación del sueño se realiza actualmente en base a una serie de registros que constituyen lo que se denomina Poligrama del sueño; estos estudios nos describen al sueño, como un fenómeno fisiológico que consta de dos estados bien diferenciados: El primero de ellos es el que se denomina *sueño No Rem* o sueño lento (corresponde a actividades eléctricas registradas en el electroencefalograma de características cada vez más lentas), encontrándose dentro de la estructura de este sueño cuatro estadios de evolución continua; siendo las características principales: la de no registrarse movimientos oculares, la existencia de un cierto tono postural y si una persona es despertada en ese estado es raro que recuerde haber soñado algo.

El segundo estado es el denominado *sueño Rem*, por la aparición de los movimientos oculares rápidos (Rapid eye movement), llamado también sueño del estadio I repentino (porque surge *repentinamente* de resultados del sueño lento) y sueño paradójico (debido a que la actividad registrada en el electroencefalograma, recuerda a la del estado de vigilia); este sueño aparte de lo indicado, está caracterizado por una total atonía postural (la frecuencia cardiaca aumenta, aunque los músculos esqueléticos parecen paralizados), siendo muy raros los movimientos segmentarios

de algún miembro. Este es el estado en que aparecen los sueños propiamente dichos; si se despierta a una persona en el estado de sueño Rem, puede relatar sus sueños con muchos detalles.

La dinámica del sueño es un proceso cíclico. Se establece en primer lugar:

Una *transición repentina*, entre el estadio de vigilia y el sueño No Rem, para luego ir pasando por los diferentes estadios del sueño lento, mediante un proceso continuado, lo cual funciona a modo de preparación para la irrupción periódica del sueño Rem, durante el cual la persona soñará algo. Estos ciclos de alternancia entre el sueño Rem y el No Rem se repetirán a lo largo de la noche, con una frecuencia en general de entre cuatro o cinco ciclos oníricos, con la característica de que los episodios de sueño Rem se irán haciendo cada vez más largos, y el sueño No Rem se irá reduciendo paulatinamente de ciclo en ciclo.

Trabajaremos en base a la catástrofe de tipo cuspoide denominada la Mariposa (Butterfly), que consta de cuatro variables de control y una variable de estado, con función potencial:

$$(1/6)X^6 - aX - (1/2)bX^2 - (1/3)cX^3 - (1/4)dX^4$$

Para el lector no familiarizado con la Teoría de Catástrofes, señalaremos que la dinámica del sistema es derivable de una función potencial, el conjunto de catástrofe, lo constituye un conjunto de puntos en el espacio de parámetros (en este caso tetra dimensional), donde la ubicación del mínimo de la función potencial será mediante un cambio brusco (discontinuidad del sistema) cuando los parámetros varían suavemente en la vecindad de un punto. Un punto de catástrofe separa entre regiones estables; un régimen local estable, lo determina un mínimo local de la función potencial.

Para la descripción de la geometría del conjunto de catástrofe de la Mariposa, necesitamos trabajar en un espacio de control de

cuatro dimensiones; luego, manteniendo constantes dos parámetros (en este caso  $c$  y  $d$ ), podemos obtener secciones de corte del conjunto, para diferentes valores de  $c$  y  $d$  graficadas en la figura 1.

Dos de los parámetros ( $a$  y  $b$ ) que controlan la geometría de la Mariposa, son análogos a los que se aprecian en la Cúspide (otra de las catástrofes de Thom, pero con un espacio de control bidimensional). Los dos parámetros restantes son denominados: Factor de oblicuidad o de predisposición (variable  $c$ ), debido a que su efecto es el de alterar la forma y posición de la Cúspide, haciendo oscilar el vértice de la curva hacia la izquierda o hacia la derecha; y finalmente el Factor Mariposa (variable  $d$ ), cuyo efecto es el de crear un tercer estado en el proceso (otro mínimo en la función potencial). Con el incremento de este factor la cúspide en la sección de corte, se transforma en una figura con tres cúspides.

Partiremos de la hipótesis de considerar que en un sujeto normal, la estructura de Sueño, es acorde con la geometría señalada en la figura 2; o sea la existencia de tres estados bien diferenciados, correspondientes a la Vigilia, Sueño No Rem, y Sueño Rem. Para el análisis de la dinámica, nos apoyaremos en la distribución de regímenes estables, señalados en la figura 3; donde cada número nos indicará el tipo de estado existente, en este caso el N° 3 para la Vigilia, el N° 2 para el estado Rem, y el N° 1 para el estado No Rem. Analizaremos sobre esta sección, diversas trayectorias que serán controladas por los parámetros  $a$  y  $b$ .

Definiremos la naturaleza de los parámetros como: El nivel de excitación del Estado de Vigilia (parámetro  $a$ ), y un factor (parámetro  $b$ ), que simplemente lo vamos a señalar como el nivel de Adormecimiento.

Un solo ciclo de Sueño, lo podemos apreciar en la trayectoria  $T_1$  (figura 4), donde una disminución de la excitación del estado de vigilia acompañada de un aumento en el nivel de adormecimiento nos llevaría a un ingreso en el estado No Rem (punto

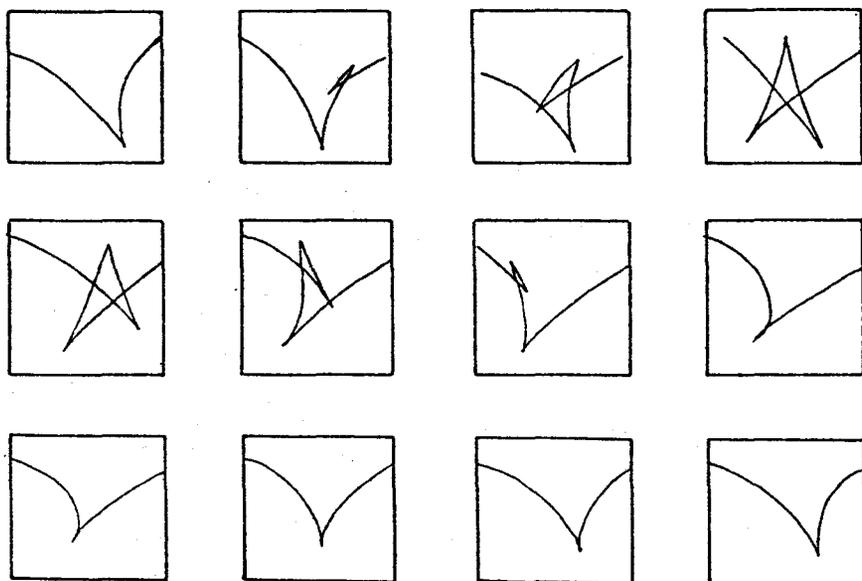
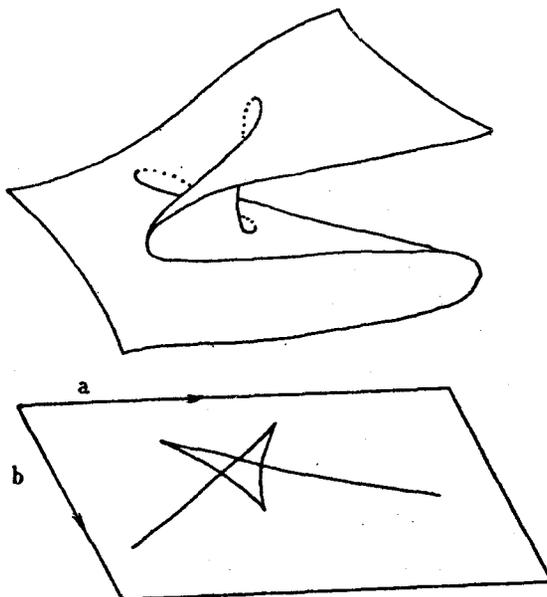
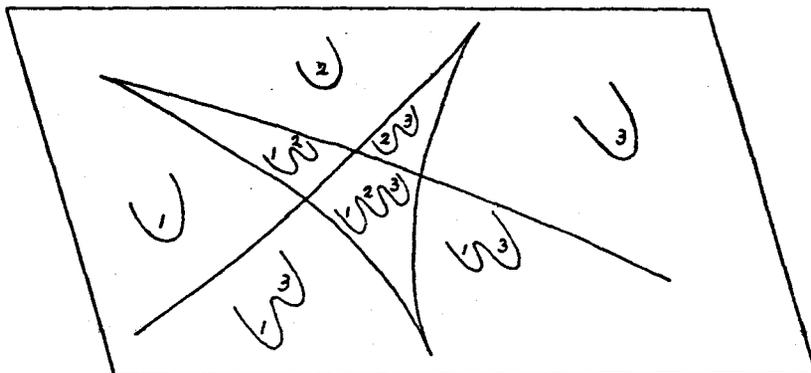


FIGURA 1

Secciones de corte para diferentes valores de  $c$  y  $d$   
 (Differentiable Germs and Catastrophes; Brocker y Lander (1975) pag. 163)



**FIGURA 2**  
**Curva Tricúspide con la Superficie de Equilibrio**



**FIGURA 3**

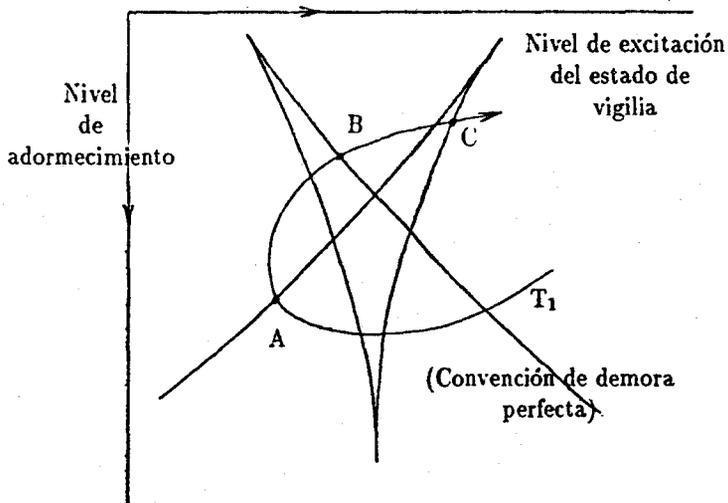


FIGURA 4

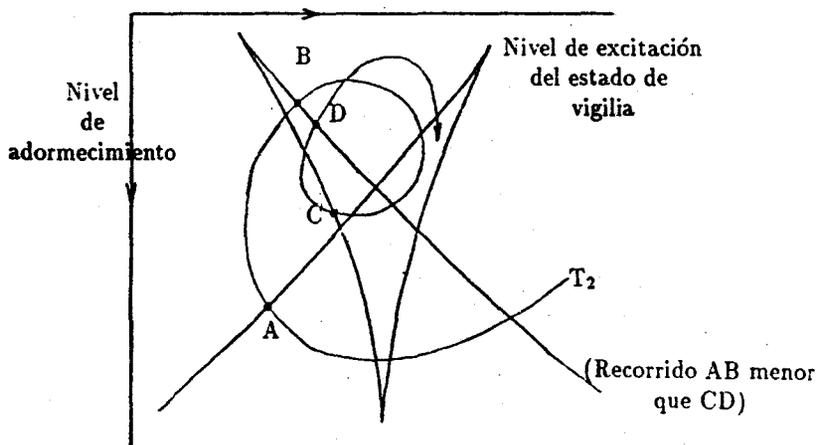
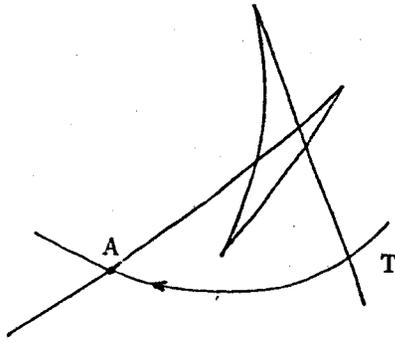


FIGURA 5

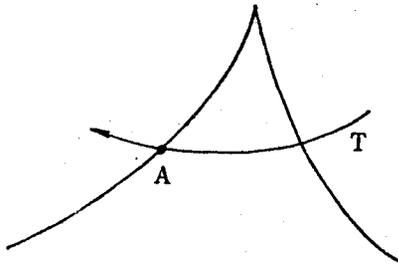
A); de acuerdo al modelo, un balance entre la disminución del adormecimiento y el aumento de la excitación, nos lleva a ingresar al estado Rem (punto *B*); un aumento en la excitación nos lleva al estado de vigilia (despertar), ingresando a este estado en el punto *C*.

Como se ha indicado antes, el paso del estado No Rem, al Rem, es un proceso que implica un “recorrer” por diversos estadios, propios de este estado No Rem, lo cual desemboca en un estado Rem (al inicio, de duración corta). El modelo podría reproducir esta dinámica, con una oscilación adecuada (aumento y decrecimiento) de las variables en conflicto. Por ejemplo en la Figura 5 : En la trayectoria  $T_2$ , apreciamos dos ciclos de sueño; el primero se inicia en el Punto *A*, con el ingreso al sueño No Rem, seguido de un recorrido por los estadios de este Estado; ingreso al sueño Rem (en el Punto *B*), con período inicial corto; inicio de otro ciclo en el punto *C*, con ingreso al sueño No Rem (con un recorrido menor); ingreso nuevamente al sueño Rem (en el Punto *D*), generándose un nuevo ciclo. La dinámica de estos ciclos, iría implicando una disminución gradual en el nivel de adormecimiento, y un aumento gradual en la excitación del estado de vigilia.

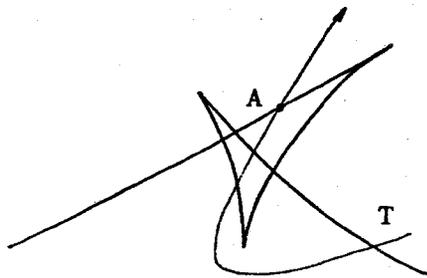
Hemos señalado el efecto matemático de los factores *c* y *d* en la geometría del modelo; mas no su definición en base a términos fisiológicos; en realidad, la naturaleza de dichos parámetros, está ligada a la razón de la existencia principalmente del sueño Rem, así como a las alteraciones y diferencias que se aprecian en el sueño en general, lo cual es motivo de hipótesis y activa investigación, por parte de fisiólogos e investigadores del fenómeno. Lo que indicaremos es que se ha analizado una dinámica sobre una sección en particular; este análisis puede realizarse nuevamente, sobre cualquiera de las secciones que se muestran en la figura 1, en algunas de las cuales no existe el sueño Rem, o dan claro indicio de alteraciones o patologías en el sueño, La discusión sobre estos casos, debe realizarse sobre una determinación cuidadosa, de la naturaleza fisiológica de dichos parámetros.



**FIGURA 6**  
 Un caso de vigilia prolongada  
 (Ingreso al No Rem en el punto A)



**FIGURA 7**  
 Un perfil sin sueño paradójico



**FIGURA 8**  
 Ejemplo de un tipo de perfil narcoléptico  
 (Ingreso al Rem en el punto A)

Establezcamos a modo de ejemplo, la hipótesis de considerar al parámetro  $c$ , como un factor relacionado con el tiempo de permanencia en el estado de vigilia, implicando a mayor tiempo de vigilia, un desbalance de alguna sustancia química presente en el organismo. Luego mientras más se permanezca en estado de vigilia, el vértice de la cúspide tenderá hacia la izquierda, siendo mayor la tendencia a ingresar al sueño No Rem, como se indica por ejemplo en la Figura 6.

Consideremos a la variable  $d$ , relacionada con un factor de tipo genético; luego este factor influye en la duración del sueño Rem ocasionando inclusive su no existencia, (Se ha establecido en algunas investigaciones la no existencia de sueño paradójico (sueño Rem) en mamíferos como el equidna). Como ejemplo tenemos un perfil sin sueño paradójico (Rem) en la figura 7.

Finalmente una patología como la Narcolepsia, (caracterizada principalmente, por un ingreso directamente al sueño Rem desde el estado de vigilia), se indica en la figura 8; en donde apreciamos el ingreso al estado Rem, con un incremento en la excitación de la vigilia, que es una característica de la narcolepsia.

Las implicancias de la determinación de un modelo geométrico, son de especial relevancia, ya sea en la determinación de un tratamiento a seguir para corregir determinada anomalía; como también en la construcción de un soporte adecuado en donde se apoyen los caminos de la investigación experimental.

### **Bibliografía**

- [1] *Brocker, T.H. and Lander, L.*, Differentiable Germs and Catastrophes. Cambridge University Press 1975.
- [2] *Callahan, J.*, A Geometric Model of Anorexia and its Treatment. Mathematics Institute University of Warwick 1981.
- [3] *Jouvet, M.*, El Comportamiento Onírico. En : El Cerebro. Investigación y Ciencia (Scientific American)
- [4] *Saunders, P.T.*, An Introduction to Catastrophe Theory.

- [5] *Shepherd, G.M.*, Neurobiología. Labor 1985.
- [6] *Zeeman, E.C.*, Catastrophe Theory. Scientific American April 1976. Vol. 234.
- [7] *Zimmer, D.*, Dormir y Soñar. Barcelona 1985.

Aspectos relacionados a la aplicación de la Teoría de Catástrofes al Campo Médico así como una bibliografía más amplia sobre el tema de Catástrofes pueden consultarse en : *Pro Mathematica* Vol. 1 N° 2 1987, Modelos Geométricos en la Investigación Médica. F. Pasquel.