$\mathcal{P}ro$ $\mathcal{M}athematica$ : $\mathcal{V}ol.$ $\mathcal{III}$, $\mathcal{N}os.$ 5 – 6, 1989

# EL PROBLEMA DE DIRICHLET PARABOLICO

**Alejandro ORTIZ FERNANDEZ** *

*Se estudia el caso parabólico de la ecuación*

$$H^{\alpha,p} = p_t * E^{\alpha,p}$$

***Se propone el problema de generalizarlo al caso de los respectivos espacios pesados.***

* Profesor Auxiliar de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

En este trabajo resolvemos el problema de Dirichlet en término del grupo $\{A_t\}_{t>0}$. El enfoque es un caso particular de lo estudiado en [4], en donde tratamos los $\varphi$-espacios de funciones. Por otro lado, en el Boletín del Dpto. de Ciencias de la Pontificia Universidad Católica del Perú, Vol. IX, No.17, 1977 ya anunciábamos los resultados que ahora desarrollamos en detalle.

El tema hace uso de algunos prerequisitos, no muy familiares en general. Por ello, y a fin de darle un carácter didáctico a este artículo, seremos lo suficientemente explícitos.

## 1. El Problema de Dirichlet.

Sea el semi-espacio superior $\Re_+^{n+1} = \{(x,t)/x \in \Re^n,\ t \in \Re^+\}$. Un clásico problema en análisis es caracterizar aquellas funciones que sean armónicas y limitadas sobre $\Re_+^{n+1}$, cuando conocemos su naturaleza sobre el espacio frontera o espacio traza $\Re^n$. Más concretamente, se tiene el familiar problema de Dirichlet:

> Dado $f$, por ejemplo en $C^\circ(\Re^n)$ (funciones continuas), encontrar una función $u(x,t)$ tal que $\Delta u = 0$ en $\Re_+^{n+1}$ y $\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$ sobre $\Re^n$.

Remarcamos el gran valor histórico de este problema en el desarrollo de muchas áreas del análisis. Una primera caracterización es dada por el

**Teorema 1.** Sea $u(x,t)$ una función medible sobre $\Re^{n+1}$. Entonces, $u = P_t * f$, con $f \in L^\infty(\Re^n) \Longleftrightarrow u$ es armónica y limitada sobre $\Re_+^{n+1}$, donde

$$P_t(x) = c_n \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

es el núcleo de Poisson, siendo $c_n$ una constante apropiada. $u = P_t * f$ es la integral de Poisson y sabemos que $\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$; además, $u(x,t)$ es armónica en $\Re_+^{n+1}$.

Otra caracterización es dada por el

**Teorema 2.** Sea $1 < p < \infty$. Entonces,

$$u = P_t * f, \qquad \text{con} \qquad f \in L^p(\Re^n) \Longleftrightarrow u \in H^p(\Re^{n+1}_+)$$

donde $H^p$ es el espacio de Hardy

$$\left\{ u(x,t) \text{ armónica sobre } \Re^{n+1}_+ \Big/ \|u\|_{H^p} = \sup_{t>0} \|u(.,t)\|_{L^p} < \infty \right\},$$

siendo en general $1 \leq p \leq \infty$.

Para el caso $p = 1$, se tiene el

**Teorema 3.**

$$u = P_t * \mu \Longleftrightarrow u \in H^1$$

donde $\mu$ es una medida de Borel finita sobre $\Re^n$

La prueba de estos teoremas puede encontrarse, por ejemplo, en A. Ortiz: "Algunas Variantes del Problema de Dirichlet". IV Coloquio de Matemática. Arequipa. 1986.

## 2. Espacios $\mathbf{E}^{\alpha,p}$ y $\mathbf{H}^{\alpha,p}$.

Con la motivación de los anteriores teoremas, podemos indagar por nuevos espacios de funciones, tanto para $u$ como para su traza $f$. En esta dirección, fue interesante ver como el espacio $BMO$, de funciones de oscilación media acotada, podía ser tomado como espacio traza de un cierto espacio de funciones armónicas. Precisemos esta idea.
En 1961, John-Nirenberg introducen el espacio

$BMO =$

$$\left\{ f \in L^1_{loc}(\Re^n) \Big/ \|f\|_* = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| \, dx \le C < \infty \right\}.$$

donde $C$ es una constante, $Q$ un cubo (de lados paralelos a los ejes) contenido en $Q_0 \subset \Re^n$, con $|Q_0| < \infty$ (medida de Lebesgue), y $f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx$.
Se observa que $L^{\infty} \subsetneq BMO$ dado que $f(x) = log \mid x \mid \in BMO$.
En esta orientación, $BMO$ es importante porque si planteamos el problema de Dirichlet, concretamente,

$$\begin{aligned} &\Delta u(x,t) = 0 \text{ en } \Re^{n+1}_+ \\ &u(x,0) = f(x), \text{ con } f \in BMO, \end{aligned}$$

entonces la solución $u$ (se verifica) satisface la estimativa

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_0^r |\nabla u(x,t)|^2 \, t dt dx \le C$$

donde $r$ es la longitud del lado del cubo $Q$,

$$|\nabla u(x,t)|^2 = (\frac{\partial u}{\partial x_1})^2 + \cdots + (\frac{\partial u}{\partial x_n})^2 + (\frac{\partial u}{\partial t})^2.$$

Charles Fefferman, siendo aún muy joven, estableció que si $f \in BMO$ entonces se tiene

$$\int_{\Re^n} \frac{|f(x) - f_Q|}{|1 + x|^{n+1}} dx \le A\|f\|_*,$$

siendo $A$ una apropiada constante. Este resultado nos garantiza la existencia de la integral de Poisson$(P_t * f)(x) = u(x,t)$. Además prueba que si $f \in BMO$, entonces existe una constante $A > 0$, tal que para todo cubo $Q$ se tiene

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \int_0^r |\nabla u(x,t)|^2 \, t dt dx \le A\|f\|_*^2.$$

Bien, ahora el camino está listo para la introducción del espacio $HMO$, considerado por Fabes-Johnson-Neri [2] . Así,

$$HMO = \Big\{ u(x,t) \text{ armónica sobre } \Re_+^{n+1} \Big/$$
$$\|u\|_* = \sup_Q \Big( \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_0^r |\nabla u(x,t)|^2 \, t dt dx \Big)^{1/2} < \infty \Big\}.$$

*Consecuencia:* Si $f \in BMO$, entonces $u(x,t) = (P_t * f)(x) \in HMO$.

La parte crucial es el recíproco, lo que fue obtenido por Fabes-Johnson-Neri, quienes prueban la caracterización dada en el

**Teorema 4.**

$$u(x,t) = (P_t * f)(x), \text{ con } f \in BMO \iff u(x,t) \in HMO.$$

Por otro lado, la escuela italiana, liderada por S. Campanato y G. Stampacchia, hace un estudio sistemático de los espacios $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ en las décadas de los 60's y 70's, con significativas aplicaciones a problemas en ecuaciones en derivadas parciales. Unificando notaciones (creo debido a J. Peetre) se obtienen los espacios $E^{\alpha,p}$ y $H^{\alpha,p}$, que pasamos a exponer en seguida.

Sean $0 \leq \alpha < 1$ y $1 \leq p < \infty$ números reales.

$$E^{\alpha,p} = \Big\{ f \in L^p(Q) \Big/$$
$$\|f\|_{E^{\alpha,p}} = \sup_Q \Big\{ \frac{1}{|Q|^{\frac{\alpha p}{n}+1}} \int_Q |f(x) - f_Q|^p \, dx \Big\}^{1/p} < \infty \Big\}$$

donde $Q \subset Q_0 \subset \Re^n$.

$$H^{\alpha,p} = \Big\{ u(x,t) \text{ armónica sobre } \Re_+^{n+1} \Big/$$
$$\|u\|_{H^{\alpha,p}} = \sup_Q \Big\{ \frac{1}{|Q|^{\frac{\alpha p}{n}+1}} \int_Q \Big[ \int_0^r |\nabla u(x,t)|^2 \, t dt \Big]^{p/2} dx \Big\}^{1/p} < \infty \Big\}$$

Note que $E^{0,1} = BMO$ y $H^{0,2} = HMO$.

Fabes-Johnson-Neri, en el citado trabajo, prueban la siguiente caracterización, la que está en la línea de lo tratado anteriormente. Así se tiene el

**Teorema 5.** Si $0 < \alpha < 1$, $1 < p < \infty$, entonces $H^{\alpha,p} = P_t * E^{\alpha,p}$. Además, $\|u\|_{H^{\alpha,p}} \simeq \|f\|_{E^{\alpha,p}}$

La prueba de este resultado hace uso de la desigualdad de Ch. Fefferman, mencionada arriba, y de otros argumentos que después fueron generalizados.

El teorema 5 es lo que deseamos estudiar en el contexto de una métrica parabólica.

## 3. La Métrica Parabólica $\rho(\mathbf{x})$.

La evolución de las ideas a exponer se encuentran en los trabajos de A.P. Calderón, M. de Guzmán, N. Rivière, A. Torchinsky, R. Macías - C. Segovia, entre otros. En este camino, un amplio uso del método parabólico es hecho en [1], en donde se estudian temas del análisis armónico en tal contexto.
Veamos una breve motivación de cómo llegar a la métrica $\rho(x)$.
En el estudio de los operadores integrales singulares

$$Tf(x) = \int_{\Re^n} K(x-y)f(y)dy,$$

el núcleo $K(x)$ satisface la condición de homogeneidad de grado -$n$, esto es, $K(tx) = t^{-n}K(x)$, lo que en una forma más general sugiere la siguiente transformación

$$A_t : \Re^n \to \Re^n \ , \text{ donde } A_t(x_1, \ldots, x_n) = (t^{\alpha_1}x_1, \ldots, t^{\alpha_n}x_n)$$

con $\alpha_i \geq 1$ números reales.

Fue interesante cuestionar si se podían considerar transformaciones lineales más generales sobre $\Re^n$, tales que aún se tenga la continuidad de tales operadores $T$ sobre los espacios $L^p$, $1 < p < \infty$, u otros espacios. Estos argumentos llevaron a considerar al grupo $\{A_t\}_{t>0}$ de transformaciones lineales de $\Re^n$ tal que verifica:

(1) $A_s A_t = A_{st}$, condición que es motivada por:

$$\begin{aligned} A_{st}(x_1, \ldots, x_n) &= \left((st)^{\alpha_1} x_1, \ldots, (st)^{\alpha_n} x_n\right) \\ &= A_s(t^{\alpha_1} x_1, \ldots, t^{\alpha_n} x_n) \\ &= A_s A_t(x, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

$A_1 = I$ (identidad), cuya motivación es

$$A_1(x_1, \ldots, x_n) = (1^{\alpha_1} x_1, \ldots, 1^{\alpha_n} x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$$

*Consecuencia.* $I = A_1 = A_{tt^{-1}} = A_t A_{t^{-1}} \;\therefore\; A_{t^{-1}} = A_t^{-1}$

(2) La aplicación $(0, \infty) \to L(\Re^n, \Re^n)$, $t \to A_t$, es contínua con respecto a la topología uniforme de operadores.

(3) El grupo satisface $\|A_t x\| \leq t\|x\|$ para $0 < t \leq 1$, $x \in \Re^n$. La condición $A_{st} = A_s A_t$ sugiere la representación $\{e^{P \log t}\} \equiv \{t^P\}$ para $\{A_t\}$, donde $P$ es una matriz $n \times n$, llamada el operador infinitesimal del grupo.

*Proposición.* Para cada $x \in \Re^n - \{0\}$ existe un único vector $t_x$ tal que $t_x^{-P} x \in S^{n-1}$, esto es, $\|t_x^{-P} x\| = 1$.
Entonces, la función (distancia parabólica) $\rho(x)$ es definida siendo

$$\rho(x) = \begin{cases} t_x, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$\rho(x)$ es una métrica ya que

(i) $\rho(t^P x) = t\rho(x)$,

(ii) $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

Sea ahora la gradiente $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n})$. Por definición,

$$\mathcal{A} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2\pi t}(P^* A_t^* \nabla, A_t^* \nabla), \text{ y si } L^2 = \frac{P + P^*}{4\pi}$$

entonces $\mathcal{A} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{t}(L A_t^* \nabla, L A_t^* \nabla)$, donde $*$ significa adjunto.

El operador diferencial $\mathcal{A}$, considerado por Calderón - Torchinsky [1], es muy general. En particular, sea la matriz

$$p = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \alpha_n \end{pmatrix} \quad , \text{ con } \alpha_i \geq 1 \text{ y } P \text{ autoadjunto.}$$

Consideremos la transformación de Fabes - Riviere

$$A_t^* = \begin{pmatrix} t^{\alpha_1} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & t^{\alpha_2} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & t^{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} P^* A_t^* \nabla &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{\alpha_1} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & t^{\alpha_2} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & t^{\alpha_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \cdot \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \\ &= \left(\alpha_1 t^{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n t^{\alpha_n} \frac{\partial}{\partial x_n}\right). \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathcal{A} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2\pi t}\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i t^{\alpha_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^{n} t^{\alpha_i} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big)$$
$$= \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2\pi t} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t^{2\alpha_i} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

En particular, si $P = I$ (esto es, si $\alpha_i = 1$) tendremos $\mathcal{A} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{t}{2\pi}\Delta$, de donde proviene el adjetivo de "parabólico" a esta teoría.

Por otro lado, estamos interesados en funciones $u$ tales que $\mathcal{A}u = 0$. Por ejemplo, tomemos la función $\theta(x) = e^{-\pi|x|^2}$. Entonces, su dilatación $\theta_t(x) = t^{-\gamma}\theta(A_t^{-1}x)$ satisface $\mathcal{A}\theta_t(x) = 0$, donde $\gamma$ es la traza de $P$. Además, si $f$ es una distribución temperada, y $u(x,t) = (f * \theta_t)(x)$ entonces $\mathcal{A}u(x,t) = 0$. Esto es satisfactorio para problemas de valor de contorno en un contexto más general.

Para una presentación, un poco detallada, de lo expuesto en las Secciones 2 y 3, ver A. Ortiz: "Espacios $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ Parabólicos y Espacios de Funciones Armónicas". UNT. 1982.

## 4. Espacios $\mathbf{E}^{\alpha,p}$ y $\mathbf{H}^{\alpha,p}$ Parabólicos.

En esta sección vamos a considerar los espacios $E^{\alpha,p}$ y $H^{\alpha,p}$, presentados en la Sec. 2 pero en el contexto de la métrica parabólica, visto en la Sec. 3. En vez de cubos trabajaremos con bolas, lo que no es inconveniente alguno.
Nuestro objetivo es probar el teorema 5 cuando los espacios considerados son parabólicos. Veamos.

Si $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1$, definimos

$$E^{\alpha,p} = \Big\{ f \in L^p_{loc}(\Re^n) \Big/$$

$$\|f\|_{E^{\alpha,p}} = \sup_{B(x_0,r)} \Big\{ \frac{1}{r^{\gamma+\alpha p}} \int_{B(x_0,r)} | f(x) - f_B |^p \, dx \Big\}^{1/p} \leq C < \infty \Big\}$$

donde $B(x_0, r)$ es la bola de centro $x_0$, y radio $r$; y donde $-\frac{\gamma}{p} \leq \alpha < 1$. Remarcamos que $\gamma$ es la traza de la matriz $P$.

Si $u(x,t)$ es una función tal que $\mathcal{A}u(x,t) = 0$, decimos que $u \in H^{\alpha,p}$ si

$$\|u\|_{H^{\alpha,p}} =$$

$$\sup_{B(x_0,r)} \left\{ \frac{1}{r^{\gamma+\alpha p}} \int_{B(x_0,r)} \Big[ \int_0^r | \mathcal{L}u(x,t) |^2 \, t dt \Big]^{p/2} dx \right\}^{1/p} < \infty$$

donde $\mathcal{L}u(x,t) = (Lt^{P^*}\nabla)u(x,t) \equiv (LA_t^*\nabla)u(x,t)$.
Los resultados son:

**Teorema 6.** Sea $f \in E^{\alpha,p}$, $0 < \alpha < 1$ y $1 < p < \infty$. Entonces $u(x,t) = (f * \theta_t)(x) \in H^{\alpha,p}$ y $\|u\|_{H^{\alpha,p}} \leq c\|f\|_{E^{\alpha,p}}$, donde $\theta(x) = e^{-\pi|x|^2}$ y $\theta_t(x)$ es su dilatación.

**Teorema 7.** Si $u \in H^{\alpha,p}$, $0 < \alpha < 1$ y $1 < p < \infty$, entonces $\lim_{t \to 0} u(x,t) = f(x)$ $\forall x \in \Re^n$. Además, $f(x) \in E^{\alpha,p}$ y $\|f\|_{E^{\alpha,p}} \leq c\|u\|_{H^{\alpha,p}}$.

Pasemos a la prueba de los mismos. Para el teorema 6 necesitamos el siguiente resultado generalizado de Ch. Fefferman.

*Lema 1.* Consideremos la bola unitaria $B(0,1)$ y sea $f \in E^{\alpha,p}$ con $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p < \infty$. Entonces,

$$\int_{\Re^n} | f(x) - f_B | \quad | \bar{\theta}(x) | \, dx \leq c\|f\|_{E^{\alpha,p}},$$

donde $\bar{\theta}(x) \leq \varphi(\rho(x)) \in L^1(\Re^n)$, con $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^{\gamma+1}}$.

*Prueba.* Pongamos $B_0 = B$ y $D_k = B_k - B_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$ donde $B_k$ es la bola de centro en el origen y radio $2^k$. Entonces tenemos

$$\int_{\Re^n} | f(x) - f_B | \quad | \bar{\theta}(x) | \, dx =$$

$$\int_{B_0} | f(x) - f_B | \quad | \bar{\theta}(x) | \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{D_k} | f(x) - f_B | \quad | \bar{\theta}(x) | \, dx$$

Examinando los sumandos,

$$\begin{aligned} \int_{B_0} | f(x) - f_B | \quad | \bar{\theta}(x) | \, dx &\leq \int_{B_0} | f(x) - f_B | \frac{1}{1 + \rho(x)^{\gamma+1}} dx \\ &\leq c \{ \int_{B_0} | f(x) - f_B |^p \, dx \}^{1/p} \\ &\leq c \| f \|_{E^{\alpha,p}} \end{aligned}$$

Respecto a la serie, es suficiente ver que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{D_k} | f(x) - f_B | \quad | \bar{\theta}(x) | \, dx$$

$$\leq (\sum_{k=1}^{\infty} d_k) \| f \|_{E^{\alpha,p}} \text{ , con } \sum_{k=1}^{\infty} d_k < \infty.$$

En efecto, por construcción $x \in B_k$ y $x \notin B_{k-1}$. Luego,

$$\rho(x) \geq 2^{k-1} \geq 2^{k-\frac{3}{2}} \text{ , esto es , } 1 + \rho(x)^{\gamma+1} > 2^{k(\gamma+1)} 2^{-\frac{3}{2}(\gamma+1)}.$$

Así,

$$\int_{D_k} | f(x) - f_B | \quad | \bar{\theta}(x) | \, dx \leq \frac{2^{\frac{3}{2}(\gamma+1)}}{2^{k(\gamma+1)}} \int_{B_k} | f(x) - f_B | \, dx.$$

Pero

$$\int_{B_k} | f(x) - f_B | \, dx$$

$$\leq \int_{B_k} | f(x) - f_{B_k} | \, dx + \int_{B_k} | f_{B_k} - f_B | \, dx$$

$$\leq | B_k |^{1-\frac{1}{p}} \Big\{ \int_{B_k} | f(x) - f_{B_k} |^p \, dx \Big\}^{1/p} + | f_{B_k} - f_B || B_k |$$

$$= (c2^{k\gamma})^{1-\frac{1}{p}} 2^{\frac{k\gamma}{p}} 2^{k\alpha} \Big\{ \frac{1}{(2^k)^{\gamma+\alpha p}} \int_{B_k} | f(x) - f_{B_k} |^p \, dx \Big\}^{1/p}$$
$$+ c2^{k\gamma} | f_{B_k} - f_B |$$

(remarcamos que las constantes no necesariamente son las mismas).

Pero $| f_{B_k} - f_B | \leq | f_{B_k} - f_{B_{k-1}} | + \cdots + | f_{B_1} - f_B |$, y de un modo general,

$$\begin{aligned}
| f_{B_{j-1}} - f_{B_j} | &\leq \frac{1}{| B_{j-1} |} \int_{B_j} | f(x) - f_{B_j} | \, dx \\
&\leq \frac{2^\gamma}{| B_j |} \int_{B_j} | f(x) - f_{B_j} | \, dx \\
&\leq \frac{2^\gamma}{| B_j |} \Big\{ \int_{B_j} | f(x) - f_{B_j} |^p \, dx \Big\}^{1/p} | B_j |^{1/q} \\
&= 2^\gamma \Big\{ \frac{1}{c2^{j\gamma}} \int_{B_j} | f(x) - f_{B_j} |^p \, dx \Big\}^{1/p} \\
&= c2^\gamma \Big\{ \frac{2^{j\alpha p}}{(2^j)^{\gamma+\alpha p}} \int_{B_j} | f(x) - f_{B_j} |^p \, dx \Big\}^{1/p} \\
&\leq c2^\gamma 2^{j\alpha} \| f \|_{E^{\alpha,p}}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_{B_k} | f(x) - f_B | \, dx \leq c 2^{k(\gamma+\alpha)} \|f\|_{E^{\alpha,p}} + c 2^{k\gamma} 2^{\gamma} \sum_{j=1}^{k} 2^{j\alpha} \|f\|_{E^{\alpha,p}}.$$

Luego, considerando que $\sum_{j=1}^{k} 2^{j\alpha} \leq k 2^{k\alpha}$, tenemos

$$\int_{D_k} | f(x) - f_B || \bar{\theta}(x) | \, dx \leq c\Big(\frac{1}{2^{k(1-\alpha)}} + \frac{1}{2^{k(1-\alpha)}}\Big) \|f\|_{E^{\alpha,p}}$$

de donde, sumando tenemos la tesis.

*Prueba del Teorema 6.* En primer lugar, observemos que el lema 1 implica que $u(x,t)$ está bien definida ya que,

$$\begin{aligned}
| u(x,t) | &= | (f * \theta_t)(x) | \\
&\leq \int_{\Re^n} | f(y) \theta_t(x-y) | \, dy \\
&= t^{-\alpha} \int_{\Re^n} | f(y) \theta(t^{-P}(x-y)) | \, dy \\
&\leq t^{-\gamma} \int_{\Re^n} | f(y) - f_B || \theta(t^{-P}(x-y)) | \, dy \\
&\qquad\qquad + t^{-\gamma} | f_B | \int_{\Re^n} \theta(t^{-P}(x-y)) dy < \infty,
\end{aligned}$$

ya que estamos considerando $\theta(x) = e^{-\pi|x|^2} \leq c\frac{1}{1+\rho(x)^{\gamma+1}}$.

Por otro lado, por la invariancia por translaciones, podemos asumir bolas con centro en el origen; y por conveniencia (geométrica) tomamos como radio $4\rho$.

Sea $\chi$ la función característica de la bola $B(0,r)$ y $\tilde{\chi} = 1 - \chi$. Entonces, de

$$f = f_{B_r} + (f - f_{B_r})1 = f_{B_r} + (f - f_{B_r})(\chi + \tilde{\chi})$$
$$= f_{B_r} + (f - f_{B_r})\chi + (f - f_{B_r})\tilde{\chi} = f_1 + f_2 + f_3$$

obtenemos

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (f * \theta_t)(x) \\ &= (f_1 * \theta_t)(x) + (f_2 * \theta_t)(x) + (f_3 * \theta_t)(x) \\ &= u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t), \end{aligned}$$

y aplicando el operador $\mathcal{L} \doteq Lt^{P_*}\nabla$, tenemos

$$\mathcal{L}u(x,t) = \mathcal{L}u_1(x,t) + \mathcal{L}u_2(x,t) + \mathcal{L}u_3(x,t).$$

Pero, desde que

$$u_1(x,t) = (f_1 * \theta_t)(x) = f_1 \int \theta_t(y)dy = cf_1 = cf_{B_r},$$

tenemos $\mathcal{L}u_1(x,t) = 0$.

Asimismo,

$$\left\{ \int_{B(0,r)} [ \int_0^r \mid \mathcal{L}u_2(x,t) \mid^2 tdt]^{p/2} dx \right\}^{1/p}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left\{ \int_{\Re^n} [ \int_0^\infty \mid \mathcal{L}u_2(x,t) \mid^2 tdt]^{p/2} dx \right\}^{1/p} \\ &\leq \text{ (desigualdad de Littlewood – Paley) } \leq c\|f_2\|_{L^p} \\ &= \left\{ \int_{B(0,r)} \mid f(x) - f_{B_r} \mid^p dx \right\}^{1/p} \\ &\leq r^{\frac{\gamma}{p}+\alpha} \sup_B \left\{ \frac{1}{r^{\gamma+\alpha p}} \int_{B(0,r)} \mid f(x) - f_{B_r} \mid^p dx \right\}^{1/p}, \end{aligned}$$

de donde

$$\left\{\frac{1}{r^{\gamma+\alpha p}}\int_{B(0,r)}\left[\int_0^r |\mathcal{L}u_2(x,t)|^2\, tdt\right]^{p/2}dx\right\}^{1/p}$$
$$\leq \sup_B\left\{\frac{1}{r^{\gamma+\alpha p}}\int_{B(0,r)} |f(x)-f_{B_r}|^p\, dx\right\}^{1/p},$$

es decir,

$$\|u_2\|_{H^{\alpha,p}}\leq c\|f\|_{E^{\alpha,p}}.$$

Finalmente, respecto a $u_3(x,t)$,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}u_3(x,t)| &= |[(f-f_{B_r})\tilde{\chi}*\mathcal{L}\theta_t](x)|\\
&\leq \int_{\Re^n-B(0,r)} |(f(y)-f_{B_r}||\mathcal{L}\theta_t(x-y)|\, dy\\
&\leq \Bigg(\text{considerando la acotación}\\
&\qquad\qquad |\mathcal{L}\theta_t(y)|\leq\frac{1}{r^{\gamma+1}+\rho(y)^{\gamma+1}}\Bigg)\\
&\leq \int_{\Re^n}\frac{|f(x)-f_{B_r}|}{r^{\alpha+1}+\rho(y)^{\alpha+1}}dy\\
&\leq (\text{ usando el lema 1, con } B(0,r))\\
&\leq cr^{\alpha-1}\|f\|_{E^{\alpha,p}}\ .
\end{aligned}$$

Luego,

$$\left\{\int_B\left[\int_0^r |\mathcal{L}u_3(x,t)|^2\, tdt\right]^{p/2}dx\right\}^{1/p}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c\left\{\int_B\left[\int_0^r r^{2(\alpha-1)}tdt\right]^{p/2}dx\right\}^{1/p}\|f\|_{E^{\alpha,p}}\\
&= cr^{\alpha}\,|B|^{1/p}\,\|f\|_{E^{\alpha,p}}\\
&= cr^{(\alpha p+\gamma)^{1/p}}\|f\|_{E^{\alpha,p}},
\end{aligned}$$

de donde

$$\|u_3\|_{H^{\alpha,p}} \leq c\|f\|_{E^{\alpha,p}}.$$

Esto prueba el teorema 6.

Por razones técnicas, para probar al teorema 7 trabajaremos con la medida de Littlewood - Paley de la forma $| \mathcal{L}u(x,t) |^2 \frac{dt}{t}$; así el espacio $H^{\alpha,p}$ toma la respectiva forma. En tal objetivo necesitamos de algunos resultados previos.

*Lema 2.* Si $u(x,t) \in H^{\alpha,p}$, donde $(x,t)\Re_+^{n+1}$, entonces

$$| \mathcal{L}u(x,t) | \leq ct^{\alpha}\|u\|_{H^{\alpha,p}}.$$

*Prueba.* La hipótesis $u(x,t) \in H^{\alpha,p}$ implica $\mathcal{A}u(x,t) = 0$ y de esta manera podemos usar el teorema del valor medio, demostrado en [3], que nos afirma:

$$| \mathcal{L}u(x,t) |^q \leq ct^{-\gamma} \int_{\frac{t}{2}}^{t} \int_{B(x,t)} | \mathcal{L}u(y,s) |^q \, dy\frac{ds}{s} \ , \quad 1 \leq q \leq \infty.$$

Considerando $q = 1$, tendremos

$$\begin{aligned}
| \mathcal{L}u(x,t) | &\leq ct^{-\gamma} \int_{B(x,t)} \int_{\frac{t}{2}}^{t} | \mathcal{L}u(y,s) | \frac{ds}{s} dy \\
&\leq ct^{-\gamma} \int_{B(x,t)} \Big\{ \int_{\frac{t}{2}}^{t} | \mathcal{L}u(y,x) |^2 \frac{ds}{s} \Big\}^{1/2} \Big\{ \int_{\frac{t}{2}}^{t} \frac{ds}{s} \Big\}^{1/2} dy \\
&\leq ct^{-\gamma} \int_{B(x,t)} \Big\{ \int_{\frac{t}{2}}^{t} | \mathcal{L}u(y,s) |^2 \frac{ds}{s} \Big\}^{1/2} dy \\
&\leq ct^{-\gamma} t^{\gamma/q} \Big\{ \int_{B(x,t)} \Big( \int_{0}^{t} | \mathcal{L}u(y,s) |^2 \frac{ds}{s} \Big)^{p/2} dy \Big\}^{1/p} \\
&= ct^{\alpha} \Big\{ \frac{1}{t^{\gamma+\alpha p}} \int_{B(x,t)} \Big( \int_{0}^{t} | \mathcal{L}u(y,s) |^2 \frac{ds}{s} \Big)^{p/2} dy \Big\}^{1/p} \\
&\leq ct^{\alpha}\|u\|_{H^{\alpha,p}}.
\end{aligned}$$

*Lema 3.* Sea $u(x,t) \in C^1$ tal que $| \mathcal{L}u(x,t) | \leq ct^{\alpha}$.
Entonces, para todo $(x,t) \in \Re^{n+1}_{+}$ se tiene

$$| u(x,t) - u(x_0,t) | \leq \begin{cases} ct^{\alpha-1}\rho(x-x_0), & \text{si } \rho(x-x_0) < t \\ c\rho(x-x_0)^{\alpha}, & \text{si } \rho(x-x_0) \geq t \end{cases}$$

*Prueba.* Por el teorema del valor medio, si $\xi$ está entre $x_0$ y $x$, entonces

$$\begin{aligned} u(x,t) - u(x_0,t) &= \nabla u(\xi,t)(x-x_0) \\ &= \left(t^{P^*}\nabla u(\xi,t), t^{-P}(x-x_0)\right) \\ &= \left(\mathcal{L}u(\xi,t), L^{-1}t^{-P}(x-x_0)\right). \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} | u(x,t) - u(x_0,t) | &\leq | \mathcal{L}u(\xi,t) || L^{-1}t^{-P}(x-x_0) | \\ &\leq c | \mathcal{L}u(\xi,t) || t^{-P}(x-x_0) | \\ &\leq ct^{\alpha} | t^{-P}(x-x_0) | \\ &= | (\frac{\rho(x-x_0)}{t})^{P}(x-x_0)' | ct^{\alpha} \\ &\leq ct^{\alpha-1}\rho(x-x_0) \ \ldots \ \text{si } \rho(x-x_0) < t \\ &\quad (\text{ya que } | s^{P}x' | \leq s | x' | = s \text{ si } 0 < s \leq 1). \end{aligned}$$

De un modo general $y'$ es la proyección sobre la bola unitaria de $y$.

Sea ahora $\rho(x-x_0) \geq t$. Entonces,

$$\begin{aligned} | u(x,t) - u(x_0,t) | \leq\; & | u(x,\rho(x-x_0)) - u(x,t) | \\ & + | u(x,\rho(x-x_0)) - u(x_0,\rho(x-x_0)) | \\ & + | u(x_0,\rho(x-x_0)) - u(x_0,t) | . \end{aligned}$$

Observemos que el primer y el tercer sumando son del mismo tipo. Consideremos el primer:

$$| u(x,\rho(x-x_0)) - u(x,t) | \leq \int_t^{\rho(x-x_0)} | \frac{\partial}{\partial s} u(x,s) | \, ds.$$

Como $\mathcal{A} = \frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{s}(Ls^{P^*}\nabla, Ls^{P^*}\nabla)$ y $\mathcal{L}_2 = Ls^{P^*}\nabla \otimes Ls^{P^*}\nabla$, tenemos

$$| u(x,\rho(x-x_0)) - u(x,t) |$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_t^{\rho(x-x_0)} | \mathcal{L}_2 u(x,s) | \frac{ds}{s} \\
&\leq \text{ (teorema del valor medio)} \\
&\leq \int_t^{\rho(x-x_0)} \frac{c}{s^\gamma} \int_{\frac{s}{2}}^{s} \int_{\rho(z-x)\leq s} | \mathcal{L} u(z,y) | \, dz \frac{dy}{y} \frac{ds}{s} \\
&\leq c \int_t^{\rho(x-x_0)} \frac{1}{s^\gamma} \int_{\frac{s}{2}}^{s} \int_{\rho(z-x)\leq s} y^\alpha dz \frac{dy}{y} \frac{ds}{s} \\
&\leq c \int_t^{\rho(x-x_0)} s^\alpha \frac{ds}{s} \\
&\leq c[\rho(x-x_0)^\alpha - t^\alpha] \\
&\leq c\rho(x-x_0)^\alpha
\end{aligned}$$

De igual forma tenemos

$$| u(x_0,\rho(x-x_0)) - u(x_0,t) | \leq c\rho(x-x_0)^\alpha.$$

Finalmente, por hipótesis podemos tomar $t = \rho(x-x_0)$, tenemos para el segundo sumando también

$$| u(x,\rho(x-x_0)) - u(x_0,\rho(x-x_0)) | \leq c\rho(x-x_0)^\alpha.$$

*Prueba del Teorema 7.* Dados $\delta$ y $\varepsilon$ reales positivos, por un argumento similar hecho, tenemos

$$| u(x,\delta) - u(x,\varepsilon) |$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\varepsilon}^{\delta} | \frac{\partial u}{\partial s}(x,s) | \, ds \\
&= \int_{\varepsilon}^{\delta} | (Ls^{P^*}\nabla, Ls^{P^*}\nabla)u(x,s) | \frac{ds}{s} \\
&= \int_{\varepsilon}^{\delta} | \mathcal{L}_2 u(x,s) | \frac{ds}{s} \\
&\leq c \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{1}{s^{\gamma}} \int_{\frac{s}{2}}^{s} \int_{\rho(x-y)\leq s} | \mathcal{L}u(y,z) | \, dy \frac{dz}{z} \frac{ds}{s} \\
&\leq c \, | \delta - \varepsilon |^{\alpha} .
\end{aligned}$$

Como $0 < \alpha < 1$, ello implica que $\{u(x,\varepsilon)\}$ es de Cauchy cuando $\varepsilon \to 0$, y por tanto existe una función $f(x)$ tal que $\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,\varepsilon) = f(x)$ para todo $x \in \Re^n$. Luego, por el lema 3, $| u(x,t) - u(x_0,t) | \leq c\rho(x-x_0)^{\alpha}$ implica (en el límite) que $| f(x) - f(x_0) | \leq c\rho(x-x_0)^{\alpha}$, y de esta manera $f(x)$ es una función de Lipschitz de orden $\alpha$.

Además tenemos,

$$\int_{B(x_0,r)} | f(x) - f_B |^p \, dx =$$

$$= \int_{B(x_0,r)} \left| \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} f(x)dz - \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} f(z)dz \right|^p dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{B(x_0,r)} \left\{ \frac{1}{r^{\gamma}} \int_{B(x_0,r)} | f(x) - f(z) | \, dz \right\}^p dx \\
&\leq c \int_{B(x_0,r)} \left\{ \frac{1}{r^{\gamma}} \int_{B(x_0,r)} \rho(x-z)^{\alpha} dz \right\}^p dx.
\end{aligned}$$

Pero, $\rho(x-z) \leq \rho(x-x_0) + \rho(x_0 - z) \leq \rho(x-x_0) + r$. Luego,

$$\int_{B(x_0,r)} | f(x) - f_B |^p \, dx$$

$$\begin{aligned} &\leq c \int_{B(x_0,r)} \left\{ \frac{1}{r^\gamma} \left[\rho(x-x_0) + r\right]^\alpha r^\gamma \right\}^p dx \\ &= c \int_{B(x_0,r)} \left[\rho(x-x_0) + r\right]^{\alpha p} dx \\ &= c r^{\alpha p + \gamma}, \end{aligned}$$

y de esta manera $f \in E^{\alpha,p}$, lo que implica la tesis.

## 5. Proyecciones.

Una cuestión de actualidad es el estudio de espacios de funciones con peso. De un modo general, una función medible $\omega(x)$, definida sobre un espacio medible y con valores en $[0,\infty]$ es un peso, si $\omega$ es localmente integrable. Si $\omega$ es un peso sobre $\Re^n$ y $f \in L^1_{loc}(\Re^n)$, entonces se dice que $f \in BMO_\omega$ si existe una constante finita $c > 0$ tal que

$$\sup_Q \frac{1}{\int_Q \omega(x)dx} \int_Q | f(x) - f_Q | \, dx \leq C.$$

si $\omega(x) = 1$, $BMO_\omega = BMO$.

*Problema.* Definir los apropiados $E^{\alpha,p}_\omega$, $H^{\alpha,p}_\omega$ parabólicos y probar que $H^{\alpha,p}_\omega = P_t * E^{\alpha,p}_\omega$.

Algunos prerequisitos en esta orientación se pueden encontrar, por ejemplo, en [5].

## Referencias.


[1] *Calderón, A. P. Torchinsky, A.* : "Parabolic maximal functions associated with a distribution". I. Advances in Math. (1975), 1 - 63. II Adv. in Math. (1977), 101 - 171.

[2] *Fabes, E. - Johnson, R. - Neri, U.* : "Spaces of harmonic functions representable by Poisson integrals of functions in $BMO$ and $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ ". Indiana U. Math. J. Vol. 25 (1976); 150 - 170.

[3] *Ortiz, A. Torchinsky, A.* : "On a mean value inequality". Indiana U. Math. J. Vol. 26 (1977); 555 - 566.

[4] *Ortiz, A.* : "Caracterización de $BMO_\varphi$, espacios $\mathcal{L}^{p,\lambda}_\varphi$ y problemas de contorno". Tesis Doctoral. U.N.M. de San Marcos (1985); 1 - 54.

[5] *Ortiz, A.* : "Tópicos sobre análisis armónico". U.N. de Trujillo - CONCYTEC. 1988