

SISTEMAS DINAMICOS HIPERBOLICOS*

Gonzalo CONTRERAS BARANDIARAN**

Introducción.

Una ecuación diferencial ordinaria $\dot{x} = f(x)$ en una variedad compacta M define un flujo $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, donde $t \rightarrow \phi(t, p) = \phi_t p$ es la solución con condición inicial $\phi_0(p) = p \in M$. En el estudio de modelos con ecuaciones diferenciales ordinarias es importante conocer el comportamiento asintótico de sus soluciones. En particular sus ω -límites (i.e. conjunto de puntos de acumulación de las órbitas positivas: $\omega(p) = \text{Acum}\{\phi_t(p)/t \geq 0\}$) y los promedios temporales

$$\bar{\varphi}(p) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\phi_t p) dt.$$

donde $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ continúa, es alguna información relevante obtenida del estado del sistema en el espacio de fase. Si el promedio temporal $\bar{\varphi}(p)$ existe para toda función continúa φ , entonces

* Conferencia ofrecida por el autor en la PUCP.

** Estudiante de Doctorado en el IMPA: Estrada Dora Castorina 110 Jardín Botánico 2246 - Río de Janeiro - Brasil.

es igual a un promedio ponderado de los valores de φ en puntos de su ω -límite $\omega(p)$. Este es el punto central en el estudio de la Teoría Ergódica.

En la esfera S^2 , las únicas posibilidades de ω -límites $\omega(p)$ son singularidades (p_0 tal que $F(p_0) = 0$) y órbitas cerradas ($\phi_{\mathbb{R}}(p_0)$ donde existe T con $\phi_T(p) = p$). Aquí pretendemos dar un ejemplo donde los ω -límites son más complicados y algunas técnicas para analizarlo.

Preliminares.

H. Poincaré introdujo el uso de secciones transversales para analizar la dinámica de un flujo. Incrustamos un disco pequeño $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $n = \dim M$, de codimensión 1 en M , de modo que sea transversal a las órbitas de ϕ , y nos fijamos en la aplicación de primer retorno o aplicación de Poincaré $r : D \rightarrow r(D) \subset D$. $r(p) = \phi_{\tau(p)}(p)$, $\tau(p) = \inf\{t > 0 / \phi_t(p) \in D\}$, r es un difeomorfismo. Por ejemplo, una órbita cerrada de ϕ se ve en D como un punto periódico $r^n(p) = p$ para algún n .

Inversamente, si tenemos un difeomorfismo $f : N \rightarrow N$ de una variedad compacta N , podemos “suspenderlo” para obtener un flujo con sección transversal N y aplicación de Poincaré f . En efecto basta construir el espacio cociente $M = N \times \mathbb{R} / \sim$ con identificaciones $(p, n) \sim (f_p^n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ y tomar el flujo horizontal $\phi_t(p) = (p, t)$ en $N \times \mathbb{R}$ proyectado a M .

La Herradura de Smale.

Este ejemplo es un difeomorfismo que puede suspenderse para obtener un flujo que es el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial. Comenzamos con un cuadrado $ABCD$ y dos semicírculos D_1 y D_2 .

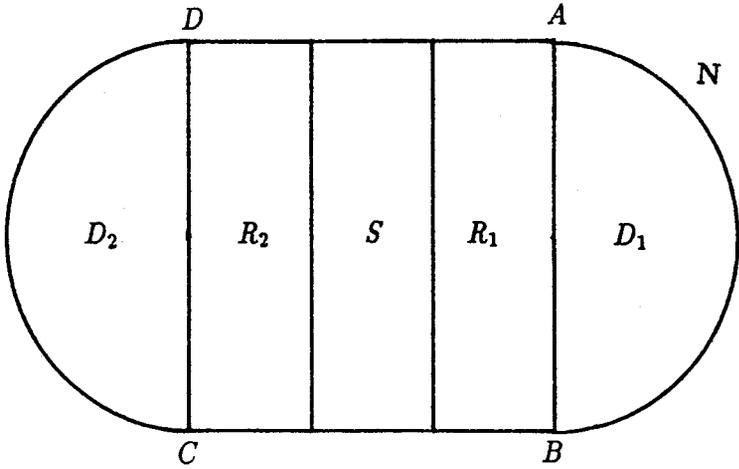


Fig. 1

Dividimos el cuadrado en tres partes iguales R_1, S, R_2 . Definimos $f : N \rightarrow N$ como se muestra en la figura 2 contrayendo linealmente en la dirección vertical, estirando linealmente en la dirección horizontal y doblando en la imagen de S , de modo que $f|_{R_1}, f|_{R_2}$ sean lineales.

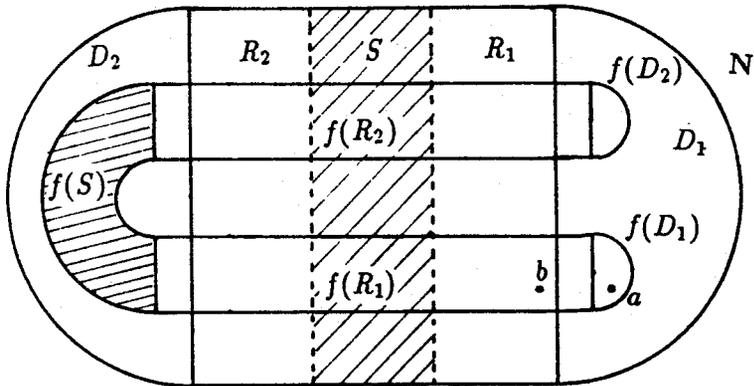


Fig. 2

Es posible extender $f|_N$ a la esfera S^2 poniendo un punto fijo repulsor en el polo norte e incrustando N pequeño cerca del polo sur. Como $f|_{D_1}$ es una contracción, existe un único punto fijo a en $f(D_1)$ y $f^n(p) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ para todo $p \in D_1$. Como $f(D_2) \subset D_1$ y $f(S) \subset D_2$ también $f^n(p) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ para todo $p \in D_1 \cup S \cup D_2$. En particular, los ω -límites $\omega(p) :=$ Puntos de Acumulación de $\{f_p^n/n \geq 0\}$ son $\omega(p) = \{a\}$ cuando $p \in D_1 \cup S \cup D_2$. Finalmente todo punto que sale de $R_1 \cup R_2$ tiene órbita positiva convergente a a . Nos interesa estudiar el conjunto $\Lambda := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(R_1 \cup R_2)$ de puntos que tienen toda su órbita en $R_1 \cup R_2$.

Proposición.

- (a) Λ es un conjunto de Cantor (un espacio métrico compacto totalmente desconexo).
- (b) Existe una cantidad infinita enumerable de puntos periódicos en Λ .
- (c) Existe una cantidad no enumerable de puntos transitivos en Λ , i.e. puntos cuya órbita es densa en Λ .

En particular para $p \in \Lambda$ transitivo, $\omega(p) = \Lambda$ que es cerrado.

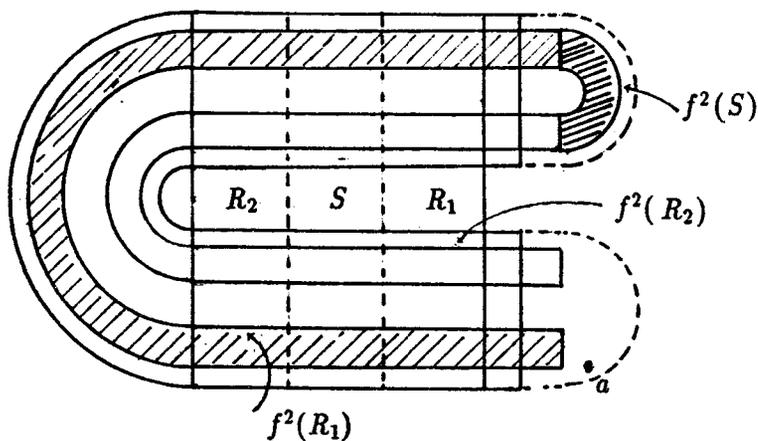


Fig. 3.a

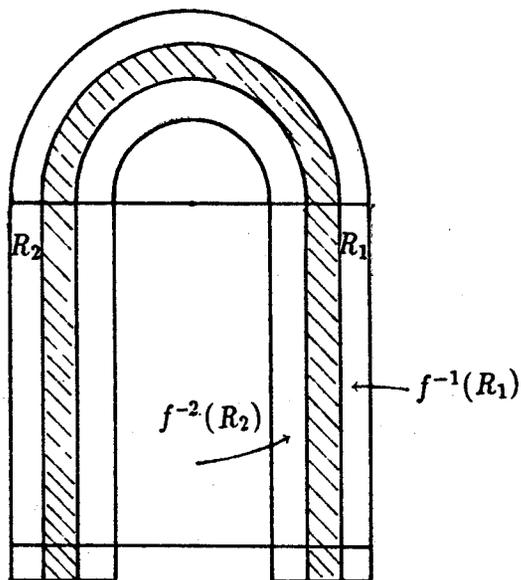


Fig. 3.b

En la Fig. 3 mostramos $f^2(R_1 \cup R_2)$ y $f^{-1}(R_1 \cup R_2)$. Obtenemos $\bigcap_{n=-2}^2 f^n(R_1 \cup R_2) = 8$ rectángulos como en Fig. 4.

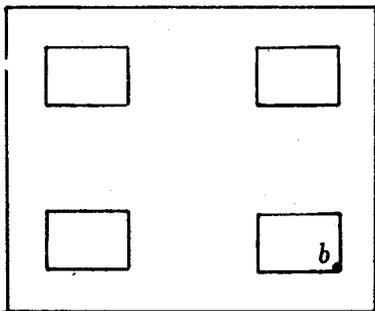


Fig. 4.a

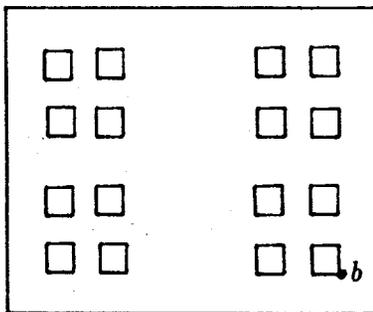


Fig. 4.b

Cada rectángulo en la Fig. 4.a es $R_{x_0} \cap f(R_{x_{-1}})$ donde $x_0, x_{-1} \in \{1, 2\}$. Similarmente, en la Fig. 4.b cada rectángulo es : $\bigcap_{n=-2}^1 f^{-n}(R_{x_n}), x_i \in \{1, 2\}$.

El *2-shift completo* es $\Sigma_2 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} / x_n \in \{1, 2\}\} = \prod_{-\infty}^{+\infty} \{1, 2\}$ con la aplicación $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2, \sigma(\bar{x})_n = x_{n+1}$. En $\{1, 2\}$ tomamos la topología discreta y luego la topología producto. Σ_2 como producto de espacios compactos, es compacto. Así, σ es un homeomorfismo. Una base para la topología de Σ_2 es la colección de "cilindros" $C_n(\bar{x}) = \{\bar{y} \in \Sigma_2 / y_k = x_k \text{ para } |k| \leq n\}$ con $n \in \mathbb{N}, \bar{x} \in \Sigma_2$; y una métrica es $d(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2^n}, n = \sup\{k \in \mathbb{N} / x_i = y_i \text{ para } |i| \leq k\}$.

Sea $h : \Sigma_2 \rightarrow \Lambda, h(\bar{x}) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \bigcap_{M=-M}^M f^{-n}(R_{x_n})$, esto es una intersección de rectángulos compactos $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \bigcap_{M=-M}^M f^{-n}(R_{x_n})$, luego no vacía, y con $\text{diam} \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \bigcap_{M=-M}^M f^{-n}(R_{x_n}) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$, luego única: h está bien definida. h es inyectiva porque dos rectángulos $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \bigcap_{M=-M}^M f^{-n}(R_{x_n}) = f(C_M(x))$ son iguales o disjuntos y es suryectiva pues para $p \in M$ basta anotar su "historia" $f^n p \in R_{x_n}$ para obtener la sucesión $\bar{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ correspondiente: $h(\bar{x}) = p$. h es continua porque $\text{diam} f(C_M(\bar{x})) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$. Siendo h continua, biyectiva y Σ_2, Λ espacios métricos compactos, h es un homeomorfismo. Además h "conjugua" (Σ_2, σ) y $(\Lambda, f|_\Lambda)$, i.e. el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma_2 & & \xrightarrow{\sigma} & & \Sigma_2 \\ h \downarrow & & & & \downarrow h \\ \Lambda & & \xrightarrow{f} & & \Lambda \end{array}$$

Se dice que (Σ_2, σ) es una *dinámica simbólica* para $f|_\Lambda$; muchas de las propiedades dinámicas de $(\Lambda, f|_\Lambda)$ se ven reflejadas en (Σ_2, σ) . Si un punto $\bar{x} \in \Sigma_2$ es periódico para σ ($\sigma^n \bar{x} = \bar{x}$ para algún n) entonces $h(\bar{x})$ es periódico para f con el mismo período ($f^n h(\bar{x}) = h(\bar{x})$). Toda sucesión de la forma $\bar{x} = (\dots x_1 x_2 \dots x_n x_1 x_2 \dots x_n x_1 x_2 \dots x_n \dots) \in \Sigma_2$ es periódica para σ con período $n + 1$, vemos

que existen exactamente 2^n puntos periódicos de período n , todos de tipo "silla" i.e. con un autovalor de $Df^n(p)$ de módulos mayor que 1 y otro de módulo menor que 1. Esto prueba (b) en la proposición. El punto b en las Figs. 2, 4a, 4b es el punto fijo correspondiente a $\bar{x} = (\dots 1111\dots)$. Es un ejercicio interesante ubicar el punto fijo $\bar{y} = (\dots 2222\dots)$.

Un punto transitivo para $f|_\Lambda$ es un punto $p \in \Lambda$ cuya órbita positiva $\{f_p^n/n \in \mathbf{Z}\}$ es densa en Λ . Es fácil probar que si \bar{x} es transitivo para (Σ_2, σ) entonces $h(\bar{x})$ es transitivo para $(\Lambda, f|_\Lambda)$. Por ejemplo $\bar{x} = (\dots x_0 x_1 x_2 \dots) = (\dots 1 2 11 12 21 22 111 \text{ bloques de } 3 \text{ símbolos, bloques de } 4 \text{ símbolos } \dots \text{ bloques de } n \text{ símbolos } \dots)$ es un punto transitivo pues para cualquier $\bar{y} \in \Sigma_2$ y $U \subset \Sigma_2$ vecindad de y existe un cilindro $C_n(\bar{y}) \subset U$ y un $m \in \mathbf{N}$ con $f^m(\bar{x}) = (\dots \text{ algo, } y_{-n} y_{-n+1} \dots y_0 \dots y_n, \text{ algo})$ porque $y_{-n} \dots y_0 \dots y_n$ es uno de los bloques que aparece en \bar{x} . Luego $f^m(\bar{x}) \in C_n(\bar{y}) \subset U$. Como hemos dejado libre la elección de $(\dots x_{-3} x_{-2} x_{-1})$ y la cantidad de sucesiones $(\dots z_{-3} z_{-2} z_{-1})$ no es enumerable, hay una cantidad no enumerable de tales \bar{x} transitivos. Con eso probamos (c).

Otra propiedad que cumple $f|_\Lambda$ es ser *mixing* que como la transitividad dice que en cierto sentido Λ no se puede descomponer. $f|_\Lambda$ es mixing si para todo par de abiertos U y V en Λ existe un $N > 0$ tal que para todo $n \geq N$, $f^n U \cap V \neq \emptyset$. Esto se puede probar, como la transitividad, usando la dinámica simbólica (Σ_2, σ) y es un buen ejercicio. Dejamos también como ejercicio probar que $\text{Mixing} \implies$ existencia de un punto transitivo.

Una propiedad importante de este ejemplo es el de no ser patológico. En el conjunto de difeomorfismo C^2 de una vecindad de Λ , con la topología C^2 : dada por la métrica

$$d(f, g) = \sup_p \{ \|f(p) - g(p)\| + \|Df(p) - Dg(p)\| + \|D^2 f(p) - D^2 g(p)\| \}$$

existe una vecindad U de f con la propiedad de que para todo $g \in U$ existe un conjunto Λg "invariante" por $g(g(\Omega) = \Omega)$ la "continuación" de Λ y un homeomorfismo $h_g : \Lambda \rightarrow \Omega$ que conjuga $f|_{\Lambda}$ y $g|_{\Omega}$ i.e. $g \circ h = h \circ f$. Todo lo que probamos para $f|_{\Lambda}$ vale para $g|_{\Omega}$.

Si construimos f de tal modo que sea lineal en Λ y con contracción de $1/3$ verticalmente y expansión 3 horizontalmente, podemos calcular la medida de Lebesgue $\lambda(\Lambda)$; como Λ puede ser cubierto por 4^n cuadrados de lado $1/3^n$, $\lambda(\Lambda) \leq \inf_{n \geq 0} 4^n (1/3^n)^2 = 0$. Esto significa que si escogemos aleatoriamente un punto en una vecindad de Λ , con probabilidad 0 caemos en Λ . La dinámica interesante se concentra en un conjunto probabilísticamente nulo. Veremos como podemos hallar un "rastros" de Λ en un computador.

El conjunto Λ dentro de N se comporta como una "silla", es decir, al iterar por medio de f , los puntos de Λ quedan siempre dentro de Λ , algunos puntos son atraídos a Λ y muchos puntos son inicialmente atraídos a Λ y luego repelidos hacia el atractor a . La *variedad estable* de un punto $x \in \Lambda$ es

$$\omega^S(x) = \{y/d(f_x^n, f_y^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\}$$

y la *variedad inestable*:

$$\omega^U(x) = \{y/d(f_x^n, f_y^n) \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0\}.$$

Podemos ver que un pequeño segmento vertical e_x que contenga x está dentro de $\omega^S(x)$ y similarmente hay un pequeño segmento vertical i_x con $x \in i_x \subset \omega^U(y)$. No es difícil probar el siguiente

Lema. Para $x, y \in \Lambda$:

$$1 \text{ (a) } f(\omega^S(x)) = f^{-1}(\omega^S(x)) = \omega^S(x)$$

$$\text{(b) } f(\omega^U(x)) = f^{-1}(\omega^U(x)) = \omega^U(x)$$

$$2 \text{ (a) } \omega^S(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(e_x)$$

$$\text{(b) } \omega^U(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(i_x)$$

$$3 \text{ (a) } \omega^S(x) \cap \omega^S(y) = \phi \text{ ó } \omega^S(x) = \omega^S(y)$$

$$\text{(b) } \omega^U(x) \cap \omega^U(y) = \phi \text{ ó } \omega^U(x) = \omega^U(y)$$

En las Figs. 5.a, 5.b mostramos las variedades $\omega^S(b)$, $\omega^U(b)$, del punto fijo $b \approx (\dots 1111\dots)$, que pueden dibujarse usando 2a, 2b del Lema.

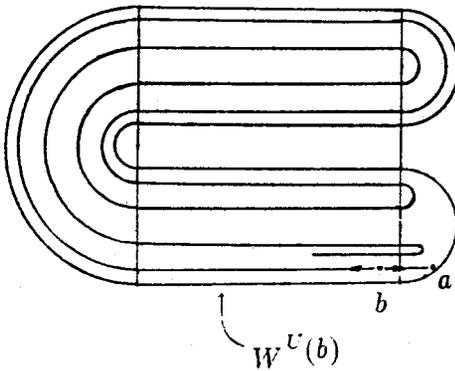
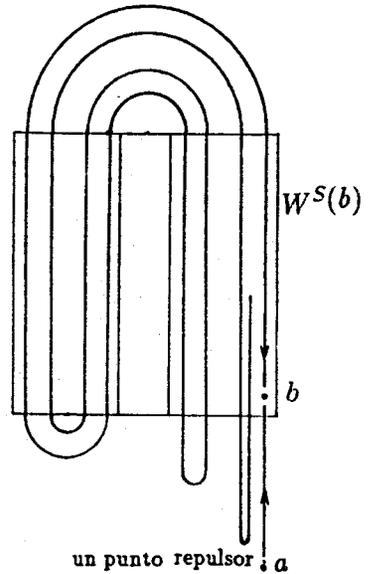


Fig. 5.a



un punto repulsor
en el polo norte

Fig. 5.b

Las variedades estables de otros puntos de Λ tienen figuras semejantes. Puede probarse (Cf.[1]) que

$$W^S(\Lambda) : \stackrel{\text{def}}{=} \{y/d(f_y^n, \Lambda) \rightarrow 0\} = \bigcup_{x \in \Lambda} W^S(x)$$

es el conjunto de puntos cuyos ω -límites están en Λ . Luego $W^S(\Lambda)$ se ve localmente como $K_x]0, 1[$ donde K es el conjunto de Cantor usual, y su medida de Lebesgue $\lambda(W^S(x)) = 0$. Todos los otros puntos de N tienen ω -límite a .

Si escogiésemos aleatoriamente un punto x de N y luego dibujásemos sus iteraciones en un computador, con probabilidad 0, $x \in W^U(\Lambda)$; luego observaríamos un comportamiento transitorio alrededor de Λ y después lo veríamos acercarse a a . Este comportamiento transitorio será tanto más duradero cuanto mayor fuese la cercanía de x a Λ .

Es posible demostrar que para una vecindad U de Λ , el conjunto de puntos que permanecen en U por n iterados: $\bigcap_{k=0}^n f^{-k}(U)$ tiene medida de Lebesgue que se comporta como e^{Pn} cuando $n \rightarrow \infty$; i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \lambda \left(\bigcap_{k=0}^n f^{-k}(U) \right) = P$$

donde $P = \log 2 + \log 3$. A esto se le llama la "taza de escape" de Λ , depende del tamaño de Λ , y de la fuerza de la expulsión de Λ en la dirección inestable. P es en principio observable en un computador.

$f|_{R_1 \cup S \cup R_2}$ expande en la dirección horizontal a una razón de 3. Dos puntos muy juntos x , y cerca a Λ que no estén en la misma vertical se verán alejarse exponencialmente al iterar f : $d(f^n x, f^n y) \sim 3^n d_{\text{horiz}}(x, y)$, mientras se mantengan cerca a Λ . En los primeros iterados x e y permanecerán juntos, pero después de un tiempo estarán moviéndose de forma muy distinta.

Considérese por ejemplo $\bar{x}, \bar{y} \in \Sigma_2 \approx \Lambda$ con $x_k = y_k$ para $k \leq n$ y $x_k \neq y_k$ para $k > n$. Si no conocemos con precisión la posición de un punto inicial cerca a Λ (que permanece mucho tiempo cerca a Λ) poco podemos decir después de unos cuantos iterados sobre su comportamiento transitorio alrededor de Λ . Esto es importante

en aplicaciones, donde no podemos hacer mediciones con total exactitud y por tanto no podemos hacer predicciones a largo plazo aún cuando el modelo sea totalmente determinístico. En el problema de los tres cuerpos y en modelos de meteorología aparecen estos fenómenos.

Otro fenómeno que se puede observar en la dinámica de f es el que la mayoría de los puntos cercanos a Λ tendrán órbitas que parecerán “cubrir” todo Λ . Esto es similar al hecho de que hay muchos más puntos transitivos que periódicos. Entonces viene el problema de saber si hay una “distribución privilegiada” de las órbitas de puntos cercanos a Λ . La mezcla de teoría de Probabilidad con sistemas dinámicos ha sido muy fructífera. Por estas propiedades sistemas como éste han sido llamados caóticos.

En nuestra hipotética simulación por computador de f olvidamos el hecho de que un computador comete siempre errores de “redondeo”. Cabría entonces estudiar “perturbaciones aleatorias” de f , es decir, el proceso aleatorio donde a cada $x \in N$ se le asigna una probabilidad $P(\cdot | x)$ soportada en una vecindad de fx , leyéndose: $P(A/x)$ “la probabilidad de caer en el próximo paso en A dado que se está en x ”. Viene el problema de saber qué propiedades del proceso determinístico $x \rightarrow fx$ se mantienen en $x \rightarrow P(\cdot | x)$. Este es un tema de intensa investigación en el momento.

La herradura de Smale es un caso particular de conjunto hiperbólico. Un *conjunto hiperbólico* para un difeomorfismo f en una variedad M es un compacto $\Lambda \subset M$, invariante ($f(\Lambda) = \Lambda$) tal que en cada punto $x \in \Lambda$ existe una descomposición $T_x M = E_x^S \oplus E_x^U$ tal que

(1) $x \rightarrow E_x^S, E_x^U$ son continuas (en el espacio Grassmanniano)

(2) Existen constantes $c > 0, 0 < \lambda < 1$ tales que

$$\|D_x f_v^n\| \leq C\lambda^n \|v\| \quad \text{cuando} \quad v \in E_x^S$$

$$\|D_x f_v^{-n}\| \leq C\lambda^n \|v\| \quad \text{si} \quad v \in E_x^U$$

En la herradura de Smale, Λ actúa como una silla; también existen atractores hiperbólicos. En este caso se cumplen propiedades similares a las de Λ , sólo que ahora el comportamiento “caótico” ya no es transitorio. Afortunadamente en estos casos existe una tal “distribución privilegiada”. Los conjuntos hiperbólicos han sido muy estudiados, tal vez la mejor referencia es [1].

Se conocen ejemplos de conjuntos abiertos de difeomorfismos que no son hiperbólicos cuya dinámica merece con mayor propiedad, por el momento, la palabra caótica.

Referencias.

- [1] *BOWEN* Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms. Lecture Notes in Math. 470 Springer - Verlag
- [2] *S. SMALE* Differentiable Dynamical Systems Bull. A.M.S. 73 (1967) 747 - 817