Pro Mathematica : *Vol. III*, *Nos.* 5 – 6, 1989

SIMETRIA Y ANTISIMETRIA EN LOS ESPACIOS TENSORIALES

José TOLA PASQUEL*

El Propósito de esta nota es señalar el paralelismo que existe entre las nociones de simetría y antisimetría que dan origen a las álgebras exterior y simétrica, las cuales pueden ser descritas mediante una noción común dentro de la cual cada una de ellas es un caso particular, evitándose así la repetición de razonamientos que son enteramente análogos. Aunque aquí nos referimos a espacios vectoriales, estas consideraciones pueden extenderse evidentemente a módulos más generales.[1]

---

* Profesor Principal de la Sección de Matemáticas de la PUCP

(1) Las demostraciones así como otras consideraciones que no son dadas aquí serán expuestas en la Tercera Parte del libro "Algebra Lineal y Multilineal" del autor de esta nota.

Sea $\bar{\varepsilon}^p$ un homomorfismo del grupo simétrico $\mathcal{S}_p$ de las permutaciones de los números $1,2,...,p$ $(p > 1)$ en el grupo multiplicativo $\{+1,-1\}$. En tanto no haya lugar a confusión podemos escribir $\bar{\varepsilon}$ en vez de $\bar{\varepsilon}^p$.

Si representamos por $\bar{\varepsilon}_\sigma$ a la imagen de $\sigma \in \mathcal{S}_p$, se tiene

$$\bar{\varepsilon}_{\sigma\rho} = \bar{\varepsilon}_\sigma \bar{\varepsilon}_\rho \quad y \quad \bar{\varepsilon}_\sigma \cdot \bar{\varepsilon}_\sigma = 1. \tag{1}$$

Puede haber dos casos:

1° *El caso simétrico:* en que el núcleo de $\bar{\varepsilon}$ es el subgrupo normal constituido por $\mathcal{S}_p$. $\bar{\varepsilon}$ aplica a cada permutación en $+1$.

2° *El caso antisimétrico:* en que el núcleo de $\bar{\varepsilon}$ es el subgrupo alternante formado por las permutaciones pares. $\bar{\varepsilon}$ se reduce entonces a la aplicación $\varepsilon : \mathcal{S}_p \to \{+1.-1\}$ que toma el valor $+1$ en las permutaciones pares y el valor -1 en las impares.

En lo que sigue supondremos que $\bar{\varepsilon}$ es una de esas dos aplicaciones. Según sea la que se elija diremos que se está en el caso simétrico o en el antisimétrico. Por lo pronto no tomamos decisión a este respecto y por tanto las consideraciones que siguen atañen a ambos casos.

Sea V un espacio vectorial sobre un campo F, de dimensión finita o infinita. A cada permutación $\sigma \in \mathcal{S}_p$ podemos hacerle corresponder el isomorfismo bien determinado

$$[\sigma] : \otimes^p V \to \otimes^p V$$

que, para los tensores descomponibles $x_1 \otimes \ldots \otimes x_p$ cumple la condición

$$[\sigma](x_1 \otimes \ldots \otimes x_p) = x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma^{-1}(p)}.$$

Es claro que se cumplen las relaciones

$$[\sigma\rho] = [\sigma] \circ [\rho], \qquad [\iota] \circ [\sigma] = [\sigma], \qquad [\sigma]^{-1} = [\sigma^{-1}],$$

donde ι es la permutación idéntica.

Definición 1. Se llama *tensor distinguido* de $\otimes^p V$ a cada elemento $t \in \otimes^p V$ tal que, para todo $\sigma \in \mathcal{S}_p$, es

$$[\sigma]t = \bar{\varepsilon}_\sigma t.$$

Los tensores distinguidos de $\otimes^p V$ constituyen un subespacio que designaremos por $D^p(V) = D^p$, que se llama *subespacio distinguido* de $\otimes^p V$.

Definamos la transformación lineal $\pi^p : \otimes^p V \to \otimes^p V$ tal que

$$\pi^p = \frac{1}{p!} \sum_\sigma \bar{\varepsilon}_\sigma \cdot [\sigma],$$

en que la suma se extiende a todas las permutaciones de $\mathcal{S}_p$.

Cualquiera que sea la permutación $\rho \in \mathcal{S}_p$ se cumplen las igualdades

$$\pi^p \circ [\rho] = [\rho] \circ \pi^p = \bar{\varepsilon}_\rho \pi^p.$$

Puede comprobarse entonces que es condición necesaria y suficiente para que t sea distinguido que se cumpla la relación

$$\pi^p t = t,$$

La aplicación π^p es tal que $(\pi^p)^2 = \pi^p$. Es por tanto una proyección. Si designamos por $N^p(V) = N^p$ a su núcleo, y tenemos en cuenta que su espacio imagen es D^p resulta que

$$\otimes^p V = D^p \oplus N^p.$$

A los subespacios D^p, $p > 1$, agregaremos los subespacios

$$D^0 = \otimes^0 V = \mathbf{F} \qquad y \qquad D^1 = \otimes^1 V = V;$$

y a las transformaciones lineales π^p, $p > 1$, añadiremos las aplicaciones idénticas π^0 y π^1 de $\mathbf{F}$ y V cuyos núcleos N^0 y N^1 se reducen a los respectivos elementos nulos.

Las transformaciones lineales π^p dan lugar a los isomorfismos canónicos de espacios vectoriales

$$\Pi^p : D^p \to \otimes^p V / N^p \tag{2}$$

que a cada tensor distinguido le hace corresponder el elemento de $\otimes^p V/N^p$ que es la clase de $\otimes^p V$ módulo N^p que lo contiene. Cada clase contiene a uno y sólo a un elemento distinguido.

Si $t_p \in \otimes^p V$ y $t_q \in \otimes^q V$, es decir si son, respectivamente, un p-tensor y un q-tensor pertenecientes al álgebra tensorial[2]

$$\otimes V = \otimes^0 V \oplus \otimes^1 V \oplus \otimes^2 V \oplus \ldots = \sum_p \otimes^p V,$$

en donde los $\otimes^p V$ se identifican con subespacios de $\otimes V$, se cumplen las relaciones

$$\left.\begin{array}{l} N^p \cdot (\otimes^q V) \subset N^{p+q} \\ (\otimes^p V) \cdot N^q \subset N^{p+q} \end{array}\right\} \tag{3}$$

Por consiguiente los conjuntos N^p son ideales del álgebra $\otimes V$.

Definición 2. Dados los espacios vectoriales V y W, una aplicación p-lineal ($p > 1$), $f : V^p \to W$, se llama *aplicación distinguida* si para cada permutación $\sigma \in \mathcal{S}_p$ se cumple que

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = \bar{\varepsilon}_\sigma f(x_1, \ldots, x_p)$$

---

(2) J. Tola. Algebra lineal y multilineal II, Fondo Editorial de la PUCP, (1989), sección 8.6.

Definición 3. El par (Z^p, φ^p) donde Z^p es un espacio vectorial y $\varphi^p : V^p \to Z^p$ es una aplicación p-lineal distinguida se llama *p-potencia distinguida* de V si a cada aplicación p-lineal distinguida $f : V^p \to W$, donde W es un espacio vectorial cualquiera le corresponde una *única* aplicación lineal $g : Z^p \to W$ tal que

$$f = g \circ \varphi^p.$$

La potencia distinguida es única en el sentido que si el par $(\bar{Z}^p, \bar{\varphi}^p)$ cumple las mismas condiciones que el par (Z^p, φ^p), existe un único isomorfismo

$$u^p : \bar{Z}^p \to Z^p$$

que cumple la relación

$$\varphi^p = u^p \circ \bar{\varphi}^p.$$

El par (D^p, Φ^p), donde $\Phi^p = \pi^p \circ \otimes^p$, en que $\otimes^p : V^p \to \otimes^p V$ es la aplicación universal, es p-ésima potencia distinguida de V. En virtud del isomorfismo (2) también lo es el par $(\otimes^p V/N^p, \Psi^p)$, donde $\Psi^p = \Pi^p \circ \Phi^p$.

El diagrama adjunto, en donde es

$$f_1 = f \circ \Pi^p : D^p \to W$$

y

$$f_2 = f_1 \circ \pi^p : \otimes^p V \to W,$$

es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
V^p \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\otimes^p"] \arrow[ddr, "\Phi^p"'] \arrow[dddr, "\Psi^p"'] & & W \\
& \otimes^p V \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[d, "\pi^p"] & \\
& D^p \arrow[uur, "f_1"'] \arrow[d, "\Pi^p"] & \\
& \otimes^p V/N^p \arrow[uuur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Según ya hemos señalado, los espacios N^p son ideales del álgebra tensorial $\otimes V$. Se ve entonces que la suma directa

$$N = \sum_p N^p$$

es también un ideal de $\otimes V$. Se define entonces el álgebra asociativa $\otimes V/N$ cuyo elemento nulo es la clase N y cuyo elemento unidad es la clase $1 + N$.

Definición 4. Se llaman *tensores distinguidos del álgebra* $\otimes V$ a los elementos de la subálgebra

$$D = \sum_p D^p$$

cada uno de cuyos elementos d se expresa de manera única en la forma

$$d = d_0 + d_1 + d_2 + \cdots, \qquad (d_p \in D^p).$$

La aplicación $\pi : \otimes V \to D$ definida por

$$\pi = \pi^0 + \pi^1 + \pi^2 + \cdots$$

es un homomorfismo de álgebras que aplica a cada tensor distinguido de $\otimes V$ en sí mismo, y se tiene Im $z = D$, Ker $\pi = N$ y $\pi^2 = \pi$. Por tanto π es una proyección y se tiene que

$$\otimes V = D \oplus N.$$

Cada elemento de $\otimes V/N$ es una clase de $\otimes V$ módulo N que contiene a un único elemento de D. Existe entonces el isomorfismo de álgebras

$$\Pi : D \to \otimes V/N$$

Definición 5. Se llama ***álgebra distinguida*** del espacio V al álgebra cociente $\otimes V/N$ en que la multiplicación es definida para dos elementos u y v por

$$u \cdot v = \Pi\{\Pi^{-1}(u) \cdot \Pi^{-1}(v)\},$$

es decir que $u \cdot v$ es el elemento de $\otimes V/N$ que contiene al tensor distinguido de $\otimes V$ que es producto de los tensores distinguidos contenidos en u y v.

El estudio del álgebra distinguida conduce a resultados que son válidos para el álgebra exterior y el álgebra simétrica, evitando una innecesaria repetición.

Para dar término a esta nota vamos a considerar los casos antisimétrico y simétrico en forma muy sucinta.

La aplicación π^p toma, en el caso simétrico, el nombre de *simetrizador*, se designa por S^p y es dado por la fórmula

$$\mathrm{S}^p = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma}[\sigma].$$

Se llama también operador de simetría. En el caso antisimétrico toma el nombre de *alternador* u operador de antisimetría, se designa por A^p y es dado

$$A^p = \frac{1}{p!}\sum_{p}\bar{\varepsilon}_\sigma[\sigma].$$

La p-ésima potencia del espacio V, se llama, en el caso simétrico, p-ésima potencia simétrica de V y se designa por $(\bigcirc^p V, \bigcirc^p)$.[3] En el caso antisimétrico se llama p-ésima potencia exterior de V y se designa por $(\wedge^p V, \wedge^p)$.

El álgebra distinguida $\otimes V/N$ es isomorfa de $\sum_p \otimes^p V/N^p$, se designa por $\wedge V$ en el caso antisimétrico y es isomorfa con

(3) **Por razones tipográficas empleamos aquí el signo $\bigcirc$ en vez de $\vee$ adoptando un signo empleado en el libro de Laurent Schwartz, "Les Tenseurs", Hermann, (1975).**

la suma directa $\sum_p \wedge^p V$. Análogamente, en el caso simétrico se designa por $\bigcirc V$ y es isomorfa con $\sum_p \bigcirc^p V$.