Pro Mathematica : *Vol. III*, *Nos.* 5 – 6, 1989

EXISTENCIA DE PUNTOS CONJUGADOS PARA LA ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA DE 6° ORDEN*

Rolando FORNEIRO RODRIGUEZ**

En el trabajo se demuestran condiciones suficientes sobre los coeficientes de la ecuación diferencial ordinaria de 6° orden

$$-\left(a_3(x)\cdot u^{(3)}(x)\right)^{(3)} + a_0(x)\cdot u(x) = 0$$

que permiten asegurar la existencia de al menos un par de puntos conjugados para dicha ecuación sobre el intervalo $(-\infty,\infty)$.

* Publicación autorizada por su autor.

** Profesor del Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona", La Habana - Cuba.

Introducción.

El presente trabajo aborda la demostración de algunos criterios (condiciones suficientes) que aseguran la existencia de al menos un par de puntos conjugados sobre el eje real para la ecuación diferencial ordinaria autoadjunta de 6° orden sin términos intermedios.

Dentro de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales y muy relacionada con la teoría de oscilación, se encuentra la problemática de determinar la existencia de soluciones no triviales de una ecuación diferencial ordinaria dada, que posea al menos dos ceros con cierto grado de suavidad en un intervalo (a, b).

En la demostración de tales criterios cuando se consideran ecuaciones diferenciales autoadjuntas, se aplican técnicas del Análisis Funcional y del Cálculo Variacional.

En 1981, Müller-Pfeiffer, demostró para las ecuaciones de 2° y 4° orden, algunos criterios que aseguran la existencia de puntos conjugados para estas ecuaciones.

En este trabajo se amplían esos resultados, a la ecuación de 6° orden con condiciones de tipo integral sobre los coeficientes de la ecuación.

Existencia de Puntos Conjugados para la Ecuación Diferencial Autoadjunta de 6° Orden

Se considera la ecuación

$$-\left(a_3(x) \cdot u^{(3)}(x)\right)^{(3)} + a_0(x) \cdot u(x) = 0 \tag{1}$$

con $a_3(x) \in C^{(3)}(-\infty, \infty)$, $a_0(x) \in C(-\infty, \infty)$, $a_3(x) > 0$, $-\infty < x < \infty$, para la cual se estudia la existencia de soluciones no triviales que posean al menos dos ceros sobre el eje real, con determinado grado de suavidad.

Dos puntos x_1 y x_2, $-\infty < x_1 < x_2 < \infty$, se llaman *puntos conjugados* respecto a la ecuación (1) si existe una solución no trivial $y(x)$ de dicha ecuación tal que

$$y^{(i)}(x_1) = y^{(i)}(x_2) = 0, \qquad i = 0,1,2. \tag{2}$$

En [4] se demuestran por Müller-Pfeiffer, condiciones suficientes para la existencia de puntos conjugados con respecto a la ecuación de 2° y 4° orden. A continuación se amplían esos resultados a la ecuación de 6° orden.

Teorema 1. Si se cumple

(I) $\int_{-\infty}^{0} a_3{}^{-1}(x)dx = +\infty, \quad \int_0^{\infty} a_3{}^{-1}(x)dx = +\infty$

(II) Existe un polinomio $P_2(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ $(c_2 \neq 0)$ tal que

$$\lim_{\xi_1 \to -\infty,} \sup_{\xi_2 \to +\infty} \int_{\xi_1}^{\xi_2} P_2^2(x) \cdot a_0(x)dx = \gamma, \qquad -\infty \leq \gamma < 0,$$

existe entonces un par de puntos conjugados para la ecuación (1).

Demostración: La demostración se basa en el principio de variación de Courant([6], pág. 15) para lo cual se construye una función de prueba $w(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^3(\alpha,\beta)$*, $-\infty < \alpha < \infty$, tal que la forma cuadrática

$$A[w,w] = \int_\alpha^\beta (a_3(x) \mid w^{(3)}(x) \mid^2 + a_0(x) \mid w(x) \mid^2)dx \tag{3}$$

---

* $\overset{\circ}{W}{}_2^3(\alpha,\beta) = \{u(x) \in W_2^3(\alpha,\beta) \;/\; u^{(i)}(\alpha) = u^{(i)}(\beta) = 0,\, i = 0,1,2\}$ resulta del completamiento de $C_0^\infty(\alpha,\beta)$ con la W_2^3-norma.

alcance un valor negativo. Entonces, utilizando el principio de variación de Courant puede determinarse una solución $u(x)$ de la ecuación (1) con la propiedad (2). La importancia de la forma cuadrática (3), en la teoría de oscilación se destaca, por ejemplo, en los trabajos de W.T. Reid ([7] y [8]).

Para determinar la función $w(x)$ definimos primeramente la función $v_1(x)$ de la siguiente forma. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y $x_1 > 0$, $x_{-1} < 0$ puntos cualesquiera sobre el eje real. Sin pérdida de generalidad se puede suponer $c_2 > 0$ y se define:

$$u_1(x) = \begin{cases} 2C_2, & x_{-1} \leq x \leq x_2, \\ 2C_2 - \varepsilon \int_{x_1}^{x} a_3{}^{-1}(t)dt, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ & \text{con } \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} a_3{}^{-1}(t)dt = 2C_2, \\ 0, & x_2 \leq x < \infty, \\ 2C_2 - \varepsilon \int_{x}^{x_{-1}} a_3{}^{-1}(t)dt, & x_{-2} \leq x \leq x_{-1} \\ & \text{con } \varepsilon \int_{x_{-2}}^{x_{-1}} a_3{}^{-1}(t)dt = 2C_2, \\ 0, & -\infty < x \leq x_{-2}. \end{cases}$$

(Ver Gráfico 1)

De acuerdo con la hipótesis (I) los puntos x_2 y x_{-2} quedan determinados unívocamente a partir de x_1 y x_{-1} respectivamente.

La función $u_1(x)$ pertenece evidentemente al espacio $\mathring{W}_2^1(x_{-2}, x_2)$.

De igual forma se puede comprobar directamente la siguiente propiedad.

Si se escribe $u_1(x) = 2c_2 \cdot \varphi_1(x)$ se tiene entonces

A.1 $\varphi_1(x) = 1, \quad x_{-1} \leq x \leq x_1,$

A.2 $\varphi_1(x_{-2}) = 0$, $\varphi_1(x_{-1}) = 1$, $\varphi_1'(x) > 0$, $x_{-2} < x < x_{-1}$, A.3 $\varphi_1(x_1) = 1$, $\varphi_1(x_2) = 0$, $\varphi_1'(x) < 0$, $x_1 < x < x_2$.

A continuación se define la función

$$u_2(x) = \begin{cases} u_1(x), & x_{-2} \le x \le x_2, \\ -\varepsilon \int_{x_2}^{x} a_3{}^{-1}(t)dt, & x_2 \le x \le x_3 \quad \text{con} \\ & \quad \varepsilon \int_{x_2}^{x_3} a_3{}^{-1}(t)dt = \rho_1, \\ & \qquad 0 < \rho_1 \le 1, \\ -\rho_1, & x_3 \le x \le x_4, \\ -\rho_1 + \varepsilon \int_{x_4}^{x} a_3{}^{-1}(t)dt, & x_4 \le x \le x_{-5} \quad \text{con} \\ & \rho_1 + \varepsilon \int_{x_4}^{x_5} a_3{}^{-1}(t)dt = 0, \\ -\varepsilon \int_{x}^{x_{-2}} a_3{}^{-1}(t)dt, & x_{-3} \le x \le x_{-2} \quad \text{con} \\ & \quad \varepsilon \int_{x_{-3}}^{x_{-2}} a_3{}^{-1}(t)dt = \rho_{-1}, \\ & \qquad 0 < \rho_{-1} \le 1, \\ -\rho_{-1}, & x_{-4} \le x \le x_{-3}, \\ -\rho_{-1} + \varepsilon \int_{x}^{x_{-4}} a_3{}^{-1}(t)dt, & x_{-5} \le x \le x_{-4} \text{ con } -\rho_{-1}+ \\ & \qquad \varepsilon \int_{x_{-5}}^{x_{-4}} a_3{}^{-1}(t)dt = 0, \\ 0, & x \in (-\infty, x_{-5}] \cup [x_5, \infty). \end{cases}$$

Como anteriormente, para números ρ_1 y ρ_{-1} entre 0 y 1 es posible determinar puntos x_i y x_{-i}, $i = 3, 4, 5$ tales que

$$\int_{x_{-5}}^{0} u_2(t)dt = C_1 \quad \text{y} \quad C_1 + \int_{0}^{x_5} u_2(t)dt = 0 \tag{4}$$

Con ello

$$\int_{-\infty}^{x_5} u_2(x)dx = 0$$

La restricción de la función $u_2(x)$ sobre (x_{-5}, x_5) pertenece evidentemente al espacio $W_2^1(x_{-5}, x_5)$. Sea entonces

$$v(x) = \int_{-\infty}^{x} u_2(t)dt, \qquad -\infty < x < \infty,$$

la cual posee las siguientes propiedades:

B.1. $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(x_{-5}, x_5)$

B.2. Si se escribe $v(x) = (c_1 + 2c_2x) \cdot \varphi_2(x)$, entonces

B.2.1. $\varphi_2(x) = 0$, $x \in (-\infty, x_{-5}] \cup [x_5, \infty)$

B.2.2. $0 < \varphi_2(x) < 1$, $\varphi_2'(x) > 0$, $x_{-5} < x < x_{-1}$.

B.2.3. $\varphi_2(x) = 1$, $x_{-1} \leq x \leq x_1$

B.2.4. $0 < \varphi_2(x) < 1$, $\varphi_2'(x) < 0$, $x_1 < x < x_5$.

Sea $x_{-1} \leq x \leq x_1$. Para $x > 0$, de acuerdo con (4) se tiene

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{-\infty}^{x} u_2(t)dt \\ &= \int_{x_{-5}}^{0} u_2(t)dt + \int_{0}^{x} u_2(t)dt \\ &= c_1 + c_2t\Big|_0^x \\ &= c_1 + 2c_2x. \end{aligned}$$

Análogamente si $x < 0$

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{-\infty}^{x} u_2(t)dt \\ &= \int_{x_{-5}}^{0} u_2(t)dt - \int_{x}^{0} u_2(t)dt \\ &= c_1 - 2c_2t\Big|_x^0 \\ &= c_1 + 2c_2x. \end{aligned}$$

de donde $\varphi_2(x) = 1$ y se demuestra la propiedad B.2.3.

Sea ahora $x_{-2} < x < x_{-1}$. Como x_{-1} es un punto arbitrario se escoge de forma tal que

$$c_1 + 2c_2x < 0$$

De $v(x) = (c_1 + 2c_2x) \cdot \varphi_2(x)$ resulta

$$\begin{aligned}
\varphi_2'(x) &= \left(\frac{v(x)}{c_1 + 2c_2x}\right) \\
&= \frac{1}{(c_1 + 2c_2x)^2}\left[u_1(x) \cdot (c_1 + 2c_2x) - 2c_2 \cdot v(x)\right]
\end{aligned}$$

De acuerdo con la propiedad A.2. se tiene

$$\varphi_2'(x) = \frac{2c_2}{(c_1 + 2c_2x)^2}\left[\varphi_1(x) \cdot (c_1 + 2c_2x) - v(x)\right] \tag{5}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\left[\varphi_1(x) \cdot (c_1 + 2c_2x) - v(x)\right]' &= \varphi_1'(x)(c_1 + 2c_2x) + \\
&\quad + 2c_2 \cdot \varphi_1(x) - u_1(x) \\
&= (c_1 + 2c_2x) \cdot \varphi_1'(x) < 0
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
0 &> \int_x^{x_{-1}} \left[\varphi_1(t) \cdot (c_1 + 2c_2t) - v(t)\right]' dt \\
&= \varphi_1(x_{-1}) \cdot (c_1 + 2c_2x_{-1}) - v(x_{-1}) - \varphi_1(x)(c_1 + 2c_2x) + v(x) \\
&= (c_1 + 2c_2x_{-1}) - (x_1 + 2c_2x_{-1}) - \varphi_1(x)(c_1 + 2c_2x) + v(x) \\
&= v(x) - \varphi_1(x)(c_1 + 2c_2x)
\end{aligned}$$

luego

$$\varphi_1(x) \cdot (c_1 + 2c_2x) - v(x) > 0 \tag{6}$$

De (5) y (6) se obtiene

$$\varphi_2'(x) > 0, \qquad x_{-2} < x < x_{-1}$$

Ahora, para $x_{-5} < x \leq x_{-2}$ teniendo en cuenta que $c_1 + 2c_2x < 0$ se tiene

$$0 \geq v'(x) = 2c_2 \cdot \varphi_2(x) + (c_1 + 2c_2x) \cdot \varphi_2'(x)$$

$$\varphi_2'(x) = \frac{v'(x) - 2c_2\varphi_2(x)}{c_1 + 2c_2x} > 0$$

con lo que se demuestra la propiedad B.2.2. Análogamente se demuestra B.2.4.

Para obtener la función de prueba buscada, se requiere aún modificar la función $u_2(x)$. Se define para ello una nueva función $u_3(x)$ como sigue:

$$u_3(x)=\begin{cases} u_2(x), & x_{-5}\le x\le x_5,\\ -\varepsilon\int_{x_5}^{x} a_3{}^{-1}(t)dt, & x_5\le x\le x_6 \text{ con}\\ & \quad \varepsilon\int_{x_5}^{x_6} a_3{}^{-1}(t)dt=\rho_2,\\ & \qquad\qquad 0<\rho_2\le 1,\\ -\rho_2, & x_6\le x\le x_7,\\ -\rho_2+\varepsilon\int_{x_7}^{x} a_3{}^{-1}(t)dt, & x_7\le x\le x_8 \text{ con}\\ & \varepsilon\int_{x_7}^{x_8} a_3{}^{-1}(t)dt=\rho_2,\\ \varepsilon\int_{x_8}^{x} a_3{}^{-1}(t)dt, & x_8\le x\le x_9 \text{ con}\\ & \quad \varepsilon\int_{x_8}^{x_9} a_3{}^{-1}(t)dt=\rho_3,\\ & \qquad\qquad 0<\rho_3\le 1,\\ \rho_3, & x_9\le x\le x_{10},\\ \rho_3-\varepsilon\int_{x_{10}}^{x} a_3{}^{-1}(t)dt, & x_{10}\le x\le x_{11} \text{ con}\\ & \varepsilon\int_{x_{10}}^{x_{11}} a_3{}^{-1}(t)dt=\rho_3,\\ -\varepsilon\int_{x}^{x_{-5}} a_3{}^{-1}(t)dt, & x_{-6}\le x\le x_{-5} \text{ con}\\ & \quad \varepsilon\int_{x_{-6}}^{x_{-5}} a_3{}^{-1}(t)dt=\rho_{-2},\\ & \qquad\qquad 0<\rho_{-2}\le 1,\\ -\rho_{-2}, & x_{-7}\le x\le x_{-6},\\ -\rho_{-2}+\varepsilon\int_{x}^{x_{-7}} a_3{}^{-1}(t)dt, & x_{-8}\le x\le x_{-7} \text{ con}\\ & \varepsilon\int_{x_{-8}}^{x_{-7}} a_3{}^{-1}(t)dt=\rho_{-2},\\ \varepsilon\int_{x}^{x_{-8}} a_3{}^{-1}(t)dt, & x_{-9}\le x\le x_{-8} \text{ con}\\ & \quad \varepsilon\int_{x_{-9}}^{x_{-8}} a_3{}^{-1}(t)dt=\rho_{-3},\\ & \qquad\qquad 0<\rho_{-3}\le 1,\\ \rho_{-3}, & x_{-10}\le x\le x_{-9},\\ \rho_{-3}-\varepsilon\int_{x}^{x_{-10}} a_3{}^{-1}(t)dt, & x_{-11}\le x\le x_{-10} \text{ con}\\ & \varepsilon\int_{x_{-11}}^{x_{-10}} a_3{}^{-1}(t)dt=\rho_{-3},\\ 0, & x\in(-\infty,x_{-11}]\cup[x_{11},\infty). \end{cases}$$

Los puntos x_ν, $\nu=\pm 6,\cdots,\pm 11$, y los parámetros ρ_i, $i=\pm 2,\pm 3$ se escogen de manera que se cumplan las siguientes relaciones:

$$\int_{x_{-11}}^{x_{-8}} u_3(t)dt=-\int_{x_{-8}}^{x_{-5}} u_3(t)dt$$

$$-\int_{x_{-5}}^{x_8} u_3(t)dt = \int_{x_8}^{x_{11}} u_3(t)dt$$

$$\int_{x_{-11}}^{x_{-5}} \int_{x}^{x_{-5}} u_3(t)dt + \int_{x_{-5}}^{0} v(t)dt = C_0$$

y

$$C_0 + \int_0^{x_5} v(t)dt + \int_{x_5}^{x_{11}} \int_{x_5}^{x} v(t)dt = 0$$

Sea ahora

$$w(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{t} u_3(s)dsdt, \qquad -\infty < x < +\infty$$

La función $w(x)$ que se utilizará para estimar la forma cuadrática (3) posee las siguientes propiedades

C.1. $w(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^3 \quad (x_{-11}, x_{11})$

C.2. Si se escribe $w(x) = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2) \cdot \varphi_3(x) = P_2(x) \cdot \varphi_3(x)$:

C.2.1. $\varphi_3(x) = 0$

C.2.2. $0 < \varphi_3(x) < 1$, $\varphi_3'(x) > 0$, $x_{-11} < x < x_{-1}$

C.2.3. $\varphi_3(x) = 1$, $x_{-1} \leq x \leq x_1$,

C.2.4. $0 < \varphi_3(x) < 1$, $\varphi_3'(x) < 0$, $x_1 < x < x_{11}$

Estas propiedades se demuestran de forma análoga a como se hizo con las propiedades de $\varphi_2(x)$ en la descomposición de la función $v(x)$.

Aquí se hará solamente la demostración de C.2.2.

Sea $x_{-5} < x < x_{-1}$. Como x_{-1} es arbitrario, se escoge de manera tal que para $x < x_{-1}$, $P_2(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 > 0$.

De $w(x) = P_2(x) \cdot \varphi_3(x)$ se obtiene, teniendo en cuenta las propiedades B.2.

$$\begin{aligned}\varphi_3(x) &= \frac{1}{P_2^2(x)}[v(x) \cdot P_2(x) - w(x)(c_1 + 2c_2x)] \\ &= \frac{c_1 + 2c_2x}{P_2^2(x)}[\varphi_2(x) \cdot P_2(x) - w(x)] \qquad (9)\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}\left[\varphi_2(x) \cdot P_2(x) - w(x)\right]' &= \varphi_2'(x) \cdot P_2(x) \\ &\quad + \varphi_2(x)(c_1 + c_2x) - w'(x) \\ &= \varphi_2'(x) \cdot P_2(x) > 0\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}0 &> \int_x^{x_{-1}} [\varphi_2(t) \cdot P_2(t) - w(t)]'dt \\ &= \left[\varphi_2(t) \cdot P_2(t) - w(t)\right]\Big|_x^{x_{-1}} \\ &= \varphi_2(x_{-1}) \cdot P_2(x_{-1}) - w(x_{-1}) - \varphi_2(x) \cdot P_2(x) + w(x) \\ &= w(x) - \varphi_2(x) \cdot P_2(x),\end{aligned}$$

es decir $\varphi_2(x) \cdot (c_0 + c_1 + c_2x^2) - w(x) < 0$.

De esto resulta teniendo en cuenta la expresión (9), y que para $x < x_{-1}(c_1 + 2c_2x) < 0$, $\varphi_3'(x) > 0$.

Sea ahora $x_{-11} < x \leq x_{-5}$, luego

$$\varphi_3'(x) = \frac{w'(x) - (c_1 + 2c_2x)\varphi_3(x)}{P_2(x)} > 0, \qquad x_{-11} < x < x_{-5}$$

ya que $\varphi_3(x) > 0$, $(c_1 + 2c_2x) < 0$ y $P_3(x) > 0$, con lo cual queda demostrada la propiedad C.2.2.

Ahora se evalúa la forma cuadrática (3) para $u(x) = w(x)$, $\alpha = x_{-11}$, $\beta = x_{11}$.

$$\begin{aligned}
A[w,w] &= \int_{x_{-11}}^{x_{11}} (a_3(x) \mid w^{(3)}(x) \mid^2 + a_0(x) \mid w(x) \mid^2)dx \\
&= \sum_{i=-11}^{-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} a_3(t) \mid u_3'(t) \mid^2 dt \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{10} \int_{x_i}^{x_{i+1}} a_3(t) \mid u_3'(t) \mid^2 dt \\
&= \int_{x_{-11}}^{x_{-1}} a_0(x)P_2^2(x)\varphi_3^2(x)dx + \int_{x_{-1}}^{x_1} a_0(x)P_2^2(x)dx \\
&\qquad + \int_{x_1}^{x_{11}} a_0(x)P_2^2(x)\varphi_3^2(x)dx \\
&= 2\varepsilon\Big[2c_2 + \sum_{\substack{i=-3\\ i\neq 0}}^{3} \rho_i\Big] + \int_{x_{-11}}^{x_{-1}} a_0(x)P_2^2(x)\varphi_3^2(x)dx \\
&\qquad + \int_{x_{-1}}^{x_1} a_0(x)P_2^2(x)dx + \int_{x_1}^{x_{11}} a_0(x)P_2^2(x)\varphi_3^2(x)dx
\end{aligned} \tag{10}$$

La función $\varphi_3^2(x)$ según las propiedades C.2. es estrictamente monótona sobre los intervalos (x_{-11}, x_1) y (x_1, x_{11}). De acuerdo con el segundo teorema del valor medio del cálculo integral existen puntos ξ_1, $x_{-11} < \xi_1 < x_1$ y ξ_2, $x_1 < \xi_2 < x_{11}$ tales que:

$$\begin{aligned}
&\int_{x_{-11}}^{x_{-1}} a_0(x)P_2^2(x)\varphi_3^2(x)dx = \\
&\quad \varphi_3^2(x_{-11}) \int_{x_{-11}}^{\xi_1} a_0(x)P_2^2(x)dx + \varphi_3^2(x_{-1}) \int_{\xi_1}^{x_{-1}} a_0(x)P_2^2(x)dx
\end{aligned}$$

$$= \int_{\xi_1}^{x_{-1}} a_0(x) P_2^2(x) dx$$

y

$$\int_{x_1}^{x_{11}} a_0(x) P_2^2(x) \varphi_3^2(x) dx =$$

$$\varphi_3^2(x_1) \int_{x_1}^{\xi_2} a_0(x) P_2^2(x) dx + \varphi_3^2(x_{11}) \int_{\xi_2}^{x_{11}} a_0(x) P_2^2(x) dx$$

$$= \int_{x_1}^{\xi_2} a_0(x) P_2^2(x) dx$$

Sustituyendo en (10) estos dos últimos resultados se obtiene:

$$A[w,w] = 2\varepsilon \Big[2c_2 + \sum_{\substack{i=-3 \\ i \neq 0}}^{3} \rho_i \Big] + \int_{\xi_1}^{\xi_2} P_2^2(x) a_0(x) dx,$$

$$x_{-11} \leq \xi_1 \leq x_1, \; x_1 \leq \xi_2 \leq x_{11}.$$

y de acuerdo con la hipótesis (II) del teorema, siempre que ε se tome suficientemente pequeño, y los puntos arbitrarios x_1 y $-x_{-1}$ suficientemente grandes, resulta

Ahora consideramos el operador

$$Au = -\big(a_3(x) \cdot u^{(3)}(x)\big)^{(3)} + a_0(x) \cdot u(x) \;,$$

$$u \in D(A) = C_0^{\infty}(x_{-11}, x_{11})$$

El operador A es semiacotado de modo que existe su prolongación de Friedrichs $\hat{A}$. Por ser $\hat{A}$ autoadjunto su espectro es real y de acuerdo con el lema de Rellich ([6], pág. 11) es discreto. De (11) se sigue que el más pequeño valor propio

$$\lambda = \inf_{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^3(x_{-11}, x_{11})} \int_{x_{-11}}^{x_{11}} (a_3(x) \mid v^{(3)}(x) \mid^2 + a_0(x) \mid v(x) \mid^2) dx$$

es negativo. De acuerdo con el principio de variación de Courant si por ejemplo se fija el punto x_{-11} y x_{11} se desplaza hacia la izquierda, entonces λ se mueve hacia la derecha y existe entonces un punto $\bar{x}_{11}$, $-\infty < x_{-11} < \bar{x}_{11} < \infty$ tal que $\lambda = 0$

La función propia correspondiente a este valor $\bar{w}(x)$ pertenece al dominio

$$D(A) = \overset{\circ}{W}{}_2^3(x_{-11}, \bar{x}_{11}) \cap W_2^6(x_{-11}, \bar{x}_{11})$$

De acuerdo con los teoremas de inmersión de Sobolev $\bar{w}(x) \in C^5(x_{-11}, \bar{x}_{11})$ y por ser solución de la ecuación (1), pertenece también a $C^6(x_{-11}, \bar{x}_{11})$

En fin, $\bar{w}(x)$ es una solución clásica de la ecuación (1) con las propiedades (2), que fuera del intervalo $(x_{-11}, \bar{x}_{11})$ puede ser extendida de forma que permanezca como solución de (1), con lo cual queda demostrado el teorema.

El siguiente resultado muestra cómo se relacionan entre sí los polinomios que aparecen como integrandos junto a las funciones coeficientes.

Teorema 2. Si se cumple

(I) $\int_{-\infty}^{0} x^2 a_3^{-1}(x) dx = +\infty$ y $\int_0^{\infty} x^2 a_3^{-1}(x) dx = +\infty$

(II) Existen números reales c_0 y c_1 ($c_1 \neq 0$) tales que

$$\limsup_{\substack{\xi_1 \to -\infty \\ \xi_2 \to +\infty}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} (c_0 + c_1 x)^2 a_0(x) dx = \gamma \ , \quad -\infty \leq \gamma < 0,$$

entonces, existe un par de puntos conjugados para la ecuación (1).

Demostración: El principio de variación de Courant es utilizado nuevamente por lo que se construye una función del espacio $\overset{\circ}{W}{}_2^3(\alpha,\beta)$ para la cual la forma cuadrática (3) alcanza un valor negativo.

Sin pérdida de generalidad se puede suponer $c_1 > 0$.

Para cada punto $x_{-2} < x_{-1}$ existen números b_0 y b_1 tales que para todo $p > 0$ se cumple

$$\int_{x_{-2}}^{x_{-1}} (b_0 + b_1 t) a_3^{-1}(t) dt = 0$$
$$\int_{x_{-2}}^{x_{-1}} \int_{x}^{x_{-1}} (b_0 + b_1 t) a_3^{-1}(t) dt dx = p \tag{12}$$

En efecto de la segunda ecuación se obtiene integrando por partes

$$p = x \int_{x}^{x_{-1}} (b_0 + b_1 t) a_3^{-1}(t) dt \Big|_{x_{-2}}^{x_{-1}} - \Big(- \int_{x_{-2}}^{x_{-1}} x(b_0 + b_1 x) a_3^{-1}(x) dx \Big)$$
$$= \int_{x_{-2}}^{x_{-1}} x(b_0 + b_1 x) a_3^{-1}(x) dx \tag{13}$$

Por tanto dichas ecuaciones son equivalentes a:

$$\int_{x_{-2}}^{x_{-1}} (b_0 + b_1 x) a_3^{-1}(x) dx = 0$$
$$\int_{x_{-2}}^{x_{-1}} x(b_0 + b_1 x) a_3^{-1}(x) dx = p$$

o bien

$$b_0 \int_{x_{-2}}^{x_{-1}} a_3^{-1}(x) dx + b_1 \int_{x_{-2}}^{x_{-1}} x a_3^{-1}(x) dx = 0$$

$$b_0 \int_{x_{-2}}^{x_{-1}} x a_3^{-1}(x)dx + b_1 \int_{x_{-2}}^{x_{-1}} x^2 a_3^{-1}(x)dx = p$$

Este sistema tiene solución si su determinante es distinto de 0.

Sea

$$D(x, x_{-1}) = \begin{vmatrix} \int_x^{x_{-1}} a_3^{-1}(t)dt & \int_x^{x_{-1}} t a_3^{-1}(t)dt \\ \int_x^{x_{-1}} t a_3^{-1}(t)dt & \int_x^{x_{-1}} t^2 a_3^{-1}(t)dt \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} D'(x, x_{-1}) &= a_3^{-1}(x) \int_{x_{-1}}^{x} t^2 a_3^{-1}(t)dt + x^2 a_3^{-1}(x) \int_{x_{-1}}^{x} a_3^{-1}(t)dt \\ &\qquad - 2x a_3^{-1}(x) \int_{x_{-1}}^{x} t a_3^{-1}(t)dt \\ &= a_3^{-1}(x) \int_{x_{-1}}^{x} (x-t)^2 a_3^{-1}(t)dt \\ &= -a_3^{-1}(x) \int_{x}^{x_{-1}} (x-t)^2 a_3^{-1}(t)dt < 0 \end{aligned}$$

Es decir $D(x, x_{-1})$ como función de x es estrictamente monótona, por lo que el determinante del sistema es para cada $x_{-2} < x_{-1}$ distinto de cero y existen números reales b_0 y b_1 que satisfacen las igualdades (12).

Para el coeficiente b_1 se puede deducir de acuerdo con la hipótesis I del Teorema

$$b_1 = \frac{\rho_{-1}\int_{x_{-2}}^{x_{-1}} a_3^{-1}(x)dx}{\left(\int_{x_{-2}}^{x_{-1}} a_3^{-1}(x)dx\right)\left(\int_{x_{-2}}^{x_{-1}} x^2 a_3^{-1}(x)dx\right) - \left(\int_{x_{-2}}^{x_{-1}} x a_3^{-1}(x)dx\right)^2} \underset{\substack{x_{-2}\to-\infty \\ (x_{-1}\ \text{fijo})}}{\overset{(*)}{\longrightarrow}} 0$$

Luego si $-x_{-2}$ se toma suficientemente grande se cumple

$$b_1 \le 1 \tag{14}$$

La función

$$F(x) = c_1 - \varepsilon \int_x^{x_{-1}} \int_s^{x_{-1}} (b_0 + b_1 t) a_3^{-1}(t) dt ds$$

es estrictamente monótona sobre $[x_{-2}, x_{-1}]$.

En efecto

$$G(x) = F'(x) = \varepsilon \int_x^{x_{-1}} (b_0 + b_1 t) a_3^{-1}(t) dt$$

se anula en x_{-2} y x_{-1} y no posee ceros sobre (x_{-2}, x_{-1})

Si existiera un cero α de $G(x)$, con $x_{-2} < \alpha < x_{-1}$, entonces según el teorema de Rolle existirían números β_1 y β_2, $x_{-2} < \beta_1 < \alpha < \beta_2 < x_1$, tales que $G'(\beta_i) = (b_0 + b_1\beta_i)a_3^{-1}(\beta_i) = 0$, $i = 1, 2$, lo cual no es posible dado que $a_3(x) = 0$ y $b_0 + b_1 x$ posee como máximo un cero,

Por tanto si $F'(x)$ no posee ceros sobre (x_{-2}, x_{-1}) entonces $F(x)$ es estrictamente monótona en ese intervalo y como $F(x_{-2}) = \rho_{-1}$ y $F(x_{-1}) = 0$, $F(x)$ es creciente sobre $[x_{-2}, x_{-1}]$.

(*) Esta conclusión exige $\int_{-\infty}^{0} x a_3^{-1}(x) dx < \infty$ sin embargo el resultado también es válido si esta integral diverge ([3], pág. 86).

Análogamente para cada $x_2 < x_1$ se pueden determinar números d_0 y d_1 tales que

$$\int_{x_1}^{x_2} (d_0 + d_1 t) a_3^{-1}(t) dt = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x} (d_0 + d_1 t) a_3^{-1}(t) dt dx = q, \qquad q > 0,$$

y se demuestra también que $\int_{x_1}^{x} \int_{x_1}^{s} a_3^{-1}(t) dt ds$ es estrictamente decreciente sobre (x_1, x_2). En ese caso, para su derivada se tiene

$$\int_{x_1}^{s} (d_0 + d_1 t) a_3^{-1}(t) dt < 0 \tag{15}$$

Para construir la función de prueba buscada se define primeramente la función:

$$u(x) = \begin{cases} c_1, \quad x_{-1} \leq x \leq x_1, \\ c_1 - \varepsilon \int_{x_1}^{x} \int_{x_1}^{s} (d_0 + d_1 t) a_3{}^{-1}(t) dt ds, \qquad x_1 \leq x \leq x_2 \\ \qquad \text{con } c_1 - \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{s} (d_0 + d_1 t) a_3{}^{-1}(t) dt ds = -\rho_1, \\ \qquad\qquad 0 < \rho_1 \leq 1, \\ -\rho_1, \quad x_2 \leq x \leq x_3, \\ -\rho_1 + \varepsilon \int_{x_3}^{x} \int_{x_3}^{s} (d_0 + d_1 t) a_3{}^{-1}(t) dt ds, \qquad x_3 \leq x \leq x_4 \\ \qquad \text{con } \rho_1 + \varepsilon \int_{x_3}^{x_4} \int_{x_3}^{s} (d_0 + d_1 t) a_3{}^{-1}(t) dt ds = 0, \\ c_1 - \varepsilon \int_{x}^{x_{-1}} \int_{x}^{x_{-1}} (b_0 + b_1 t) a_3{}^{-1}(t) dt ds, \; x_{-2} \leq x \leq x_{-1} \\ \qquad \text{con } c_1 - \varepsilon \int_{x_{-2}}^{x_{-1}} \int_{s}^{x_{-1}} (b_0 + b_1 t) a_3{}^{-1}(t) dt ds = -\rho_{-1}, \\ \qquad\qquad 0 < \rho_{-1} \leq 1, \\ -\rho_{-1}, \quad x_{-3} \leq x \leq x_{-2}, \\ -\rho_{-1} + \varepsilon \int_{x}^{x_{-3}} \int_{s}^{x_{-3}} (b_0 + b_1 t) a_3{}^{-1}(t) dt ds, \\ \qquad\qquad x_{-4} \leq x \leq x_{-3} \\ \qquad \text{con } \rho_{-1} + \varepsilon \int_{x_{-4}}^{x_{-3}} \int_{s}^{x_{-3}} (b_0 + b_1 t) a_3{}^{-1}(t) dt ds = 0, \\ 0, \quad x \in (-\infty, x_{-4}] \cup [x_4, \infty). \end{cases}$$

(Ver Gráfico 2)

Los puntos x_i, $i = \pm 2, 3, 4$ y los parámetros ρ_1 y ρ_{-1} se escogen de manera tal que se cumplan las relaciones

$$\int_{x_{-4}}^{0} u(t)dt = c_0$$
$$\int_{x_{-4}}^{x_4} u(t)dt = 0.$$

La función $u(x)$ pertenece evidentemente al espacio $\overset{\circ}{W}{}_2^2(w_{-4}, x_4)$.

Entonces:

$$v(x) = \int_{-\infty}^{x} u(t)dt, \qquad -\infty < x < \infty,$$

es la función de prueba deseada la que posee las siguientes propiedades.

I) $-v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^3(x_{-4}, x_4)$

II) Si se escribe $v(x) = (c_0 + c_1 x).\ \mu(x)$ entonces

II.1. $\mu(x) = 0 \quad x \in (-\infty, x_{-4}] \cup [x_4, \infty)$

II.2. $0 < \mu(x) < 1, \mu'(x) > 0,\ x_{-4} < x < x_{-1}$

II.3. $\mu(x) = 1,\ x_{-1} \leq x \leq x_{-1}$

II.4. $0 < \mu(x) < 1, \mu'(x) < 0,\ x_1 < x < x_4.$

Demostraremos solamente II.4.

Sea $x_1 < \sigma < x_2$ tal que $u(\sigma) = 0$ y $x_1 < x < \sigma$. El punto arbitrario x_1 puede escogerse suficientemente grande como para que $c_0 + c_1 x > 0$.

Entonces, de acuerdo con (15) se tiene

$$(c_0+c_1x)u'(x) = \varepsilon(c_0+c_1x)\int_{x_1}^{s}(d_0+d_1t)a_3^{-1}(t)dt < 0, \;\; x_1 < x < 0$$

e integrando por partes

$$\begin{aligned}
0 &> \int_{x_1}^{x}(c_0 + c_1t)u'(t)dt \\
&= (c_0 + c_1t)u(t)\Big|_{x_1}^{x} - c_1\int_{x}^{x} u(t)dt \\
&= (c_0 + c_1x)u(x) - (c_0 + c_1x_1)u(x_1) - c_1v(x) + c_1(c_0 + c_1x) \\
&= (c_0 + c_1x)u(x) - c_1v(x) \\
&= (c_0 + c_1x)v'(x) - c_1v(x)
\end{aligned}$$

Pero $v(x) = (c_0 + c_1x)\cdot\mu(x)$, luego

$$\begin{aligned}
0 > (c_0+c_1x)c_1\mu_(x)+(c_0+c_1x)(c_0+c_1x)\mu'(x)-c_1(c_0+c_1x)\mu(x) \\
= (c_0 + c_1x)^2\mu'(x)
\end{aligned}$$

Luego $\mu'(x) < 0$, $x_1 < x < \sigma$

Para $\sigma < x < x_2$ se tiene de

$$u(x) = v'(x) = (c_0 + c_1x)\mu'(x) + c_1\mu(x)$$

$$\mu'(x) = \frac{u(x) - c_1\mu(x)}{(c_0 + c_1x)} < 0, \qquad \sigma < x < x_2.$$

La función $v(x)$ es utilizada para calcular la forma cuadrática (3)

$$A[v,v] = \int_{x_{-4}}^{x_4} [a_3(x) \mid u''(x) \mid^2 + a_0(x) v^2(x)] dx$$

$$= \varepsilon^2 \int_{x_{-4}}^{x_4} (b_0 + b_1 x)^2 a_3{}^{-1}(x) dx + \varepsilon^2 \int_{x_{-2}}^{x_1} (b_0 + b_1 x)^2 a_3{}^{-1}(x) dx$$

$$+ \varepsilon^2 \int_{x_1}^{x_1} (d_0 + d_1 x)^2 a_3{}^{-1}(x) dx + \varepsilon^2 \int_{x_3}^{x_4} (d_0 + d_1 x)^2 a_3{}^{-1}(x) dx$$

$$+ \int_{x_{-4}}^{x_4} a_0(x) v^2(x) dx$$

Pero de acuerdo con las relaciones (12) y (15)

$$\int_{x_{-2}}^{x_{-1}} (b_0 + b_1 x)^2 a_3{}^{-1}(x) dx =$$

$$b_0 \int_{x_{-2}}^{x_{-1}} (b_0 + b_1 x) a_3{}^{-1}(x) dx + b_1 \int_{x_{-2}}^{x_{-1}} x (b_0 + b_1 x) a_3{}^{-1}(x) dx$$

$$= b_1 \rho_{-1} \leq 1.$$

Luego

$$A[v,v] \leq 4\varepsilon^2$$

$$+ \int_{x_{-4}}^{x_{-1}} a_0(x)(c_0 + c_1 x)^2 \mu^2(x) dx + \int_{x_{-1}}^{x_1} a_0(x)(c_0 + c_1 x)^2 dx$$

$$+ \int_{x_1}^{x_4} a_0(x)(c_0 + c_1 x)^2 \mu^2(x) dx$$

Ahora de acuerdo con las propiedades de la función $\mu(x)$ es posible encontrar según el segundo teorema del valor medio del Cálculo Integral, puntos

ξ_1, $x_{-4} \leq \xi_1 \leq x_{-1}$ y ξ_2, $x_1 \leq \xi_2 \leq x_4$ tales que:

$$A[v,v] \leq 4\varepsilon^2 + \int_{\xi_1}^{\xi_2} (c_0 + c_1 x)^2 a_0(x) dx$$

y de acuerdo con la hipótesis (II) del teorema si ε se escoge suficientemente pequeño y x_{-1} y x_1 suficientemente grandes se obtiene:

$$A[v,v] < 0$$

y la demostración del teorema 2 se concluye como en el teorema 1.

Por último, utilizando el principio de construcción de la función de prueba del teorema 2 se concluye la validez del siguiente resultado.

Teorema 3. Si para los coeficientes de la ecuación (1) se cumple

(I) $\int_{-\infty}^{0} x^4 a_3{}^{-1}(x) dx = +\infty$, $\int_0^{\infty} x^4 a_3{}^{-1}(x) dx = +\infty$

(II) $\limsup\limits_{\substack{\xi_1 \to -\infty \\ \xi_2 \to +\infty}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} a_0(x) dx = \gamma$, $-\infty \leq \gamma < 0$

entonces existe un par de puntos conjugados para dicha ecuación.

Demostración: Sea ε un número positivo cualquiera y $x_{-1} < 0$, $x_1 > 0$ puntos arbitrarios.

Se introduce la notación

$$I^{\circ} a, x(f) = I \overset{\circ}{x}, b(f) = f(x)$$

$$I a, \overset{k}{x}(f) = \int_a^x I_{a,t}^{k-1}(f) dt, \qquad k \geq 1, \qquad x \geq a > 0,$$

$$I_x^k, b(f) = \int_x^b I_{t,b}^{k-1}(f) dt, \qquad k \geq 1, \qquad x \leq b < 0,$$

Para cada $x_2 > x_1$ se puede determinar entonces análogamente a como se hizo en el Teorema 2 un polinomio $R_2(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2$ tal que

$$I^1_{x_1,x_2}(R_2 a_3{}^{-1}) = 0$$
$$I^2_{x_1,x_2}(R_2 a_3{}^{-1}) = 0$$
$$I^3_{x_1,x_2}(R_2 a_3{}^{-1}) = 1$$

y la función $I^3_{x_1,x}(R_2 a_3{}^{-1})$ es estrictamente decreciente sobre $[x_1, x_2]$

Se define entonces la función

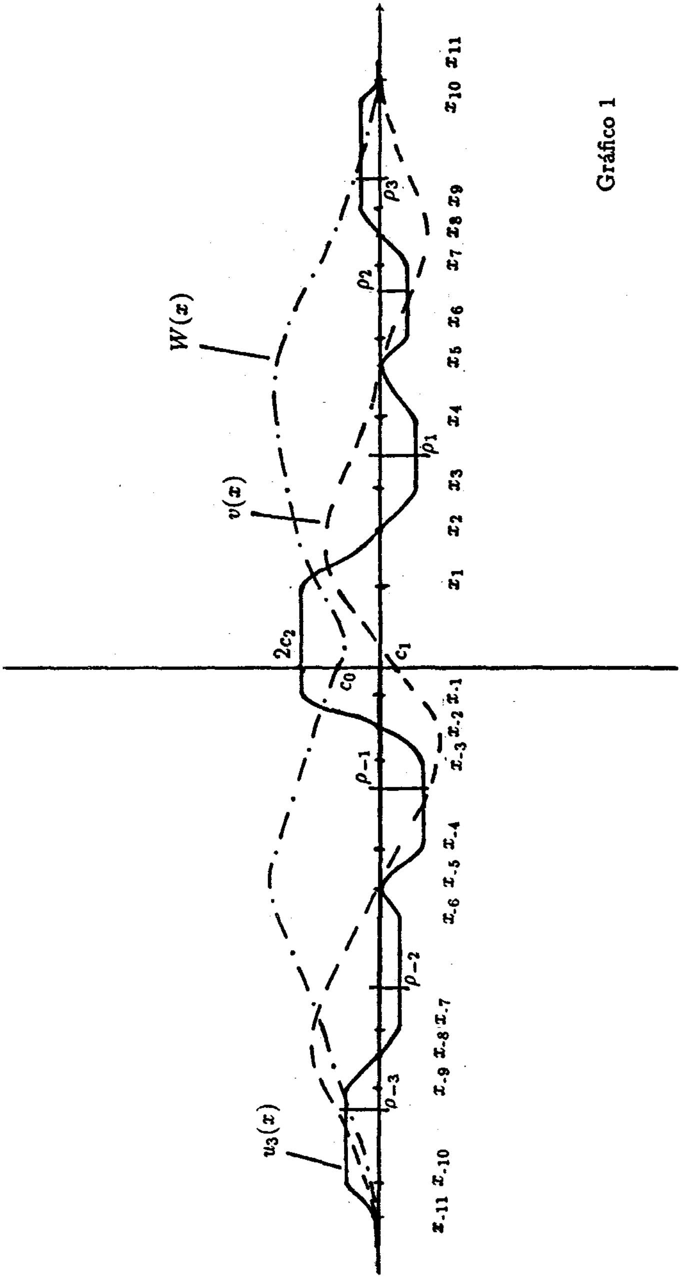
$$w(x) = \begin{cases} 1, & x_{-1} \leq x \leq x_1, \\ 1 - \varepsilon I^3_{x_1,x}(R_2 a_3^{-1}), & x_1 \leq x \leq x_2 \\ & \text{con } \varepsilon I^3_{x_1,x_2}(R_2 a_3^{-1}) = 1, \\ 1 - \varepsilon I^3_{x,x_{-1}}(Q_2 a_3^{-1}), & x_{-2} \leq x \leq x_{-1} \\ & \text{con } \varepsilon I^3_{x_{-2},x_{-1}}(Q_2 a_3^{-1}) = 1, \\ 0, & x \in (-\infty, x_{-1}] \cup [x_1, \infty). \end{cases}$$

donde para $Q_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ la función $I^3_{x,x_{-1}}(Q_2 a_3{}^{-1})$ es estrictamente creciente sobre el intervalo $[x_{-2}, x_{-1}]$.

La función $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}^3_2(x_{-1}, x_2)$ y se tiene

$$\begin{aligned} A[w,w] &= \varepsilon^2 \int_{x_{-2}}^{x_{-1}} R_2^2(x) a_3{}^{-1}(x)dx \\ &\quad + \varepsilon^2 \int_{x_1}^{x_2} Q_2^2(x) a_3{}^{-1}(x)dx + \int_{x_{-2}}^{x_2} a_0(x) w^2(x)dx \\ &\leq 2\varepsilon^2 + \int_{\xi_1}^{\xi_2} a_0(x)dx, \; x_{-2} \leq \xi_1 \leq x_{-1}, \; x_1 \leq \xi_2 \leq x_2, \end{aligned}$$

y la demostración del teorema se concluye como en los casos anteriores.



$W(x)$
$v(x)$
$u_3(x)$
$2c_2$
c_0
c_1
ρ_1
ρ_2
ρ_3
ρ_{-1}
ρ_{-2}
ρ_{-3}
x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11}
x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} x_{-5} x_{-6} x_{-7} x_{-8} x_{-9} x_{-10} x_{-11}

Gráfico 1

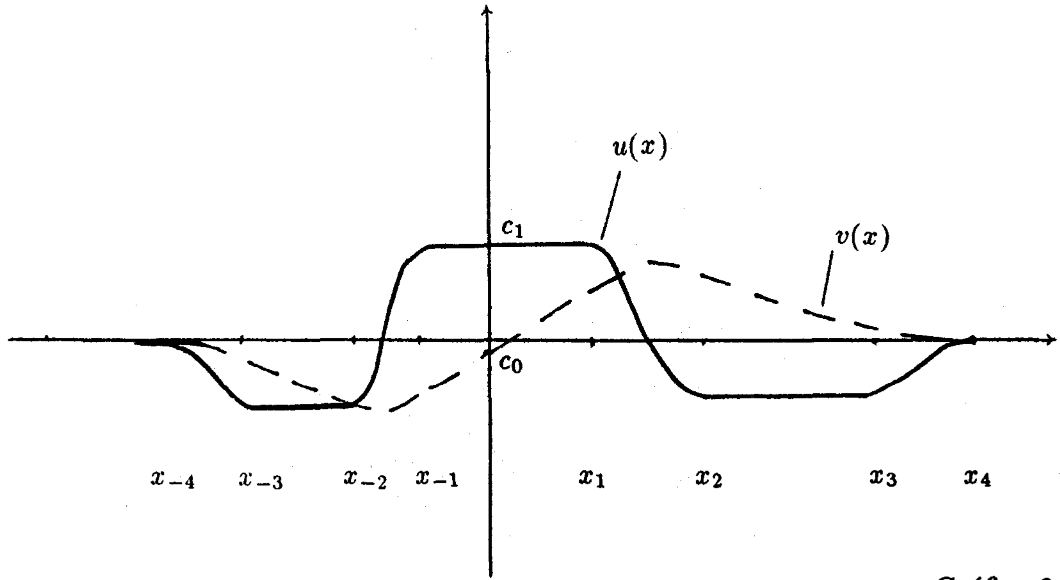


Gráfico 2

Bibliografía.

[1] *Forneiro, Rolando.* Oszillationsätze vom Leighton Wintner-typ für gewöhnliche selbstadjungierte Differentialgleichungen sechster und hoherer Ordnung, Dissertation A P.H. "Dr. Thedor Neubauer", Erfurt, RDA, 1984.

[2] *Glazman, J.M.* Directs Methods of Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators, Herusalem, 1965.

[3] *Müller-Pfeiffer, E.* An Oscillation Theorem for Self Adjoint Differential Equations. Mathem Nach 108 (1982), 79 - 82.

[4] *Müller-Pfeiffer, E.* Existences of conjugate points for second and fourth order differential equations. Proceedings of the Royal Society of Edimburgh, 89A, 281 - 291, 1981.

[5] *Müller-Pfeiffer, E.* Oscillation Criteria for Self Adjoint Fourth Order Differential Equations, Journal of Differential Equations 45, 111 - 131 (1982).

[6] *Müller-Pfeiffer, E.* Spektraleigenchaften singularer gewöhnlicher Differentialoperatoren, Teubner Verlags gesellschaft, Leipzig, 1977.

[7] *Reid, W.T.* Oscillations criteria for self-adjoint differential systems, Trans Amer Soc 101 (1961), 91 - 106.

[8] *Reid, W.T.* Ricatti matrix differential equations and non-oscillation criteria for associated linear differential systems. Pacific J. Mathem 13 (1963), 665 - 685.