

# SINGULARIDADES DE CAMPOS VECTORIALES HOLOMORFOS EN EL DOMINIO DE POINCARÉ

**Renato Benazic**

## **Introducción**

*En el presente trabajo, hacemos un estudio cualitativo de las hojas de una foliación, inducida por un campo vectorial holomorfo con singularidad aislada en el origen, tal que su parte lineal está en el dominio de Poincaré.*

*En la sección 1, damos las notaciones necesarias y veremos cómo un campo vectorial genera una foliación.*

*Luego, estudiamos el caso más simple de campos holomorfos:*

*los lineales de la forma  $X(x) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)$ , veremos que el comportamiento topológico de la foliación inducida por este campo depende de los números complejos no nulos  $\lambda_1, \lambda_2$ , surgiendo así los conceptos de Dominio de Poincaré, Dominio de Siegel y Resonancia.*

*El estudio de los campos lineales es hecho en la sección 2.*

Cuando trabajamos con campos vectoriales más generales, tal que su parte lineal está en el Dominio de Poincaré y no hay resonancias, existe una conjugación analítica local con su parte lineal (Teorema 4.2) y cuando hay resonancia tenemos también una conjugación analítica del campo con una pequeña perturbación de su parte lineal (Teorema 4.3). Sin embargo, cuando la parte lineal del campo está en el dominio de Siegel, lo más que podemos hacer es conjugar formalmente el campo con otro más simple llamado forma canónica (Teorema 5.1).

## 1. Campos vectoriales holomorfos y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

Sea  $U$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{C}^n$ . Un *Campo Vectorial* en  $U$  es una aplicación que a cada  $x \in U$  le asocia un elemento  $X(x)$  de  $T_x \mathbb{C}^n$ , el espacio tangente a  $\mathbb{C}^n$  en el punto  $x$ . Cada  $T_x \mathbb{C}^n$  es un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial isomorfo a  $\mathbb{C}^n$ , cuya base será denotada por:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \right\}$$

Como  $X(x) \in T_x \mathbb{C}^n$ , tenemos que

$$X(x) = \sum_{j=1}^n X_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}(x), \quad \forall x \in U$$

en donde  $X_j(x) \in \mathbb{C}$ ;  $\forall 1 \leq j \leq n$ ,  $\forall x \in U$ ; o simplemente

$$X = \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

De ésta manera, el campo  $X$  define  $n$  funciones:  $X_1, \dots, X_n$  de  $U$  en  $\mathbb{C}$ ; llamadas *Funciones Coordenadas*; i.e.:

$$X_j : U \rightarrow \mathbb{C}$$

De aquí en adelante, un campo vectorial será denotado indistintamente por:

$$X = \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{ó} \quad X = (X_1, \dots, X_n)$$

Decimos que  $X$  es un *Campo Vectorial Holomorfo* en  $U$  si y sólo si todas sus funciones coordenadas  $X_j$  son holomorfas.

Sea  $X$  un campo vectorial holomorfo en  $U$  abierto de  $\mathbb{C}^n$ , de acuerdo a la teoría de funciones de varias variables complejas [4] en cada punto  $x_0 \in U$ , existe una vecindad abierta  $V$ ,  $x_0 \in V \subseteq U$ ; tal que las funciones coordenadas  $X_j$  tienen expansión en serie de potencias:

$$X_j(x) = \sum_{|Q|=0}^{\infty} a_{j,Q} (x-x_0)^Q \quad (1.1)$$

las cuales son convergentes, para cualquier  $x \in V$ .

En (1.1) hemos usado las notaciones usuales de los multi-índices, i.e.:

$$Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{N}^n \quad (N = \{0, 1, 2, \dots\})$$

$$|Q| = \sum_{j=1}^n q_j \quad \text{y} \quad x^Q = x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n}$$

en donde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ .

Definimos el *k-jet* del campo vectorial holomorfo  $X$  en el punto  $x_0$ , el cual denotaremos  $J_{x_0}^k(X)$ , por:

$$J_{x_0}^k(X) = \left( \sum_{|Q|=0}^k a_{1,Q} (x-x_0)^Q \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \left( \sum_{|Q|=0}^k a_{n,Q} (x-x_0)^Q \right) \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (1.2)$$

Un punto  $x \in U$  es llamado *Punto Singular* de  $X$  si y sólo si  $X(x) = 0$ , caso contrario decimos que  $x$  es un *Punto Regular* de  $X$ .

A cada campo vectorial holomorfo  $X$  le asociamos el sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dT} = X_1(x) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dT} = X_n(x) \end{cases} \quad (1.3)$$

en donde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$  y  $T \in \mathbb{C}$ .

Por el Teorema de existencia y unicidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias [6], las soluciones de (1.3) son curvas complejas (más específicamente, superficies de Riemann) localmente parametrizadas por  $T \in \mathbb{C}$ . Estas curvas definen una foliación  $\mathcal{F}_X$  y cada una de ellas será llamada *hoja* de la foliación  $\mathcal{F}_X$ . Si  $X$  es un campo holomorfo con singularidades, entonces  $\mathcal{F}_X$  es una foliación singular, en donde el conjunto singular de  $\mathcal{F}_X$  son las singularidades del campo  $X$ .

Por el Teorema del flujo tubular [6], podemos considerar satisfactorio el conocimiento cualitativo local de las hojas de una foliación en la vecindad de un punto regular. El propósito del presente trabajo es estudiar las hojas de la foliación en una vecindad de un punto singular.

Con el fin de simplificar las notaciones, en lo sucesivo trabajaremos sólo en dimensión  $n=2$ ; sin embargo, todos los resultados obtenidos pueden ser generalizados sin mayores dificultades para dimensiones mayores.

## **2. Estudio cualitativo de una foliación inducida por un campo lineal en la vecindad de un punto singular aislado**

Sea  $X$  un campo vectorial holomorfo definido en  $U$  abierto de  $\mathbb{C}^2$ , decimos que el punto  $x_0 \in U$  es una *Singularidad Aislada* de  $X$  si y sólo si existe una vecindad abierta  $V$ ,  $x_0 \in V \subseteq U$ ; tal que cualquier punto  $x \in V$ ,  $x \neq x_0$  es un punto regular.

Las foliaciones más simples de ser estudiadas son aquellas definidas por campos vectoriales lineales, esto se debe a que tenemos una forma explícita de parametrizar por  $T \in \mathbb{C}$  las hojas de la foliación inducida por él.

Consideremos el campo vectorial lineal (holomorfo):

$$X_0(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2) \quad (2.1)$$

en donde  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Con esta condición  $X_0$  es un campo definido en  $\mathbb{C}^2$  siendo el origen una singularidad aislada de  $X_0$ . Su sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias asociado es:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dT} = \lambda_1 x_1 \\ \frac{dx_2}{dT} = \lambda_2 x_2 \end{cases} \quad (2.2)$$

La solución de (2.2) que pasa por el punto  $x_0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{C}^2$  es una hoja de la foliación  $\mathcal{F}_{X_0}$  la cual puede ser parametrizada por:

$$\varphi(T, x_1^0, x_2^0) = (e^{\lambda_1 T} x_1^0, e^{\lambda_2 T} x_2^0); \quad T \in \mathbb{C} \quad (2.3)$$

$\varphi$  es llamado el *Flujo Complejo* en  $\mathbb{C}^2$  que pasa por el punto  $x_0$ . La *Orbita* de  $\varphi$  en  $x_0$ , denotada por  $\mathcal{O}_{x_0}(\varphi)$  y definida por:

$$\mathcal{O}_{x_0}(\varphi) = \{\varphi(T, x_1^0, x_2^0) \mid T \in \mathbb{C}\} \quad (2.4)$$

es una hoja de  $\mathcal{F}_{X_0}$ . Para cualquier  $\alpha \in \mathbb{C}$ , tenemos un *Flujo Real*  $\varphi_\alpha$ , inducido por el flujo complejo  $\varphi$ , el cual está definido como:

$$\varphi_\alpha(t, x_1^0, x_2^0) = \varphi(\alpha t, x_1^0, x_2^0) = (e^{\lambda_1 \alpha t} x_1^0, e^{\lambda_2 \alpha t} x_2^0); \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

El comportamiento de las hojas de foliación  $\mathcal{F}_{X_0}$  en cualquier vecindad de la singularidad aislada  $0 \in \mathbb{C}^2$ , está fuertemente determinado por  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$ , como veremos a continuación.

**Definición 2.1** Sean  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ . Decimos que  $(\lambda_1, \lambda_2)$  está en el Dominio de Poincaré si y sólo si  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{R}^-$  caso contrario, decimos que  $(\lambda_1, \lambda_2)$  está en el Dominio de Siegel.

Si denotamos por  $\mathcal{D}_p$  al dominio de Poincaré y por  $\mathcal{D}_s$  al dominio de Siegel, tenemos:

$$\mathcal{D}_p = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \mid \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{R}^- \right\} \quad (2.6)$$

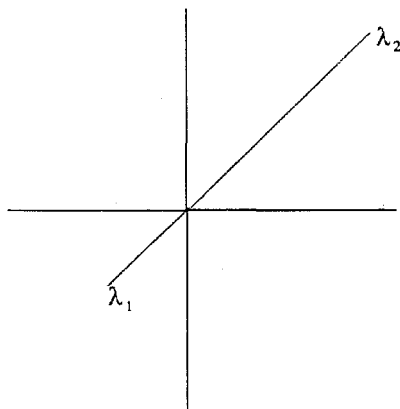
$$\mathcal{D}_s = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \mid \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}^- \right\} \quad (2.7)$$

Nótese que:

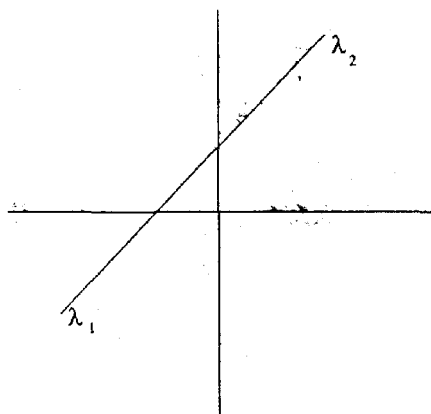
$$\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* = \mathcal{D}_s \cup \mathcal{D}_p \quad (2.8)$$

Podemos dar una interpretación geométrica a los elementos de  $\mathcal{D}_s$  y  $\mathcal{D}_p$ , (Ver Fig. 2.1); para ello definimos el *Segmento Abierto* que une los puntos  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ , denotado  $]\lambda_1, \lambda_2[$ , como:

$$]\lambda_1, \lambda_2[ = \left\{ x \in \mathbb{C} \mid x = t\lambda_2 + (1-t)\lambda_1; t \in ]0, 1[ \right\}$$



$$(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_s$$



$$(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_p$$

Fig. 2.1

**Lema 2.1** Sea  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ , se cumple:

$$\text{i) } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_s \Leftrightarrow 0 \in ]\lambda_1, \lambda_2[$$

$$\text{ii) } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_p \Leftrightarrow 0 \notin ]\lambda_1, \lambda_2[$$

*Demostración:*

i) En primer lugar, nótese que la función  $f(t) = \frac{t}{t-1}$  es una biyección de  $]0, 1[$  sobre  $\mathbb{R}^-$ , luego:

$$\begin{aligned} (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_s &\Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow \exists t_0 \in ]0, 1[ / f(t_0) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \\ &\Leftrightarrow \exists t_0 \in ]0, 1[ / 0 = t_0 \lambda_2 + (1-t_0) \lambda_1 \Leftrightarrow 0 \in ]\lambda_1, \lambda_2[ \end{aligned}$$

lo cual prueba la parte (i).

ii) Se deduce de la parte (i) y de (2.8).

Sabemos que todo número complejo  $\lambda$  puede ser representado en su forma polar  $\lambda = |\lambda|e^{i\theta}$ , usando esta representación, podemos deducir otras propiedades geométricas de los elementos de  $\mathcal{D}_s$  y  $\mathcal{D}_p$  que serán útiles en nuestro trabajo; empezamos por el:

**Lema 2.2** Sean  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ ,  $\lambda_j = |\lambda_j|e^{i\theta_j}$  con  $|\lambda_j| \neq 0$ , ( $j=1,2$ ). Se cumple:

$$\text{i) } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_s \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} / \theta_1 = \theta_2 + (2n+1)\pi$$

$$\text{ii) } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_p \Leftrightarrow \theta_1 \neq \theta_2 + (2n+1)\pi; \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

*Demostración:* Primeramente, obsérvese que  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{|\lambda_1|e^{i\theta_1}}{|\lambda_2|e^{i\theta_2}} = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

luego, si  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_s$  entonces  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}^-$ , por tanto

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)}, \text{ i.e. } e^{i(\theta_1-\theta_2)} = -1$$

de esta manera  $\exists n \in \mathbb{Z} / \theta_1 - \theta_2 = (2n+1)\pi$ .

Recíprocamente:  $\exists n \in \mathbb{Z} / \theta_1 = \theta_2 + (2n+1)\pi \Rightarrow$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right| e^{i(2n+1)\pi} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Rightarrow \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right| = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}^-, \text{ lo cual prueba}$$

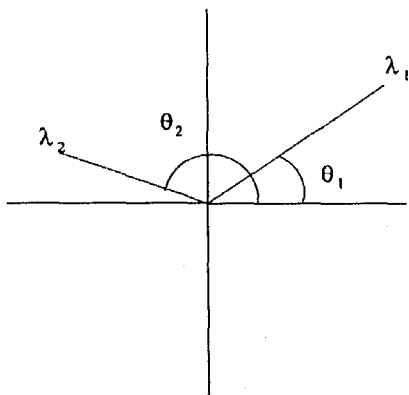
(i).

ii) Se sigue de (i) y de (2.8).

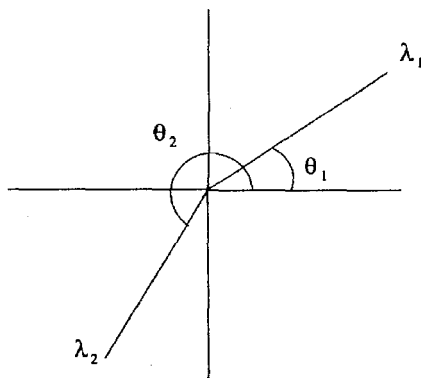
En el lema siguiente  $S^1$  denotará al conjunto de todos los números complejos cuyo módulo es 1.

**Lema 2.3**  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_p \Rightarrow \exists \alpha \in S^1 / \operatorname{Re}(\alpha\lambda_j) < 0 \quad (j=1,2)$

*Prueba:* Si  $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0, (j=1,2)$ ; tomamos  $\alpha = 1 \in S^1$  y el lema se cumple trivialmente. Veamos el caso en que uno de ellos, digamos  $\lambda_1$ , tiene parte real negativa; si  $\lambda_j = |\lambda_j| e^{i\theta_j}$  ésto es equivalente a decir que  $\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{3\pi}{2}$ . Como  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_p$ , por el lema 2.2(ii) tenemos dos casos:  $\theta_1 \leq \theta_2 < \theta_1 + \pi$  o  $\theta_1 + \pi < \theta_2 \leq \theta_1 + 2\pi$  (Ver fig. 2.2)



Caso 1:  $\theta_1 \leq \theta_2 < \theta_1 + \pi$



Caso 2:  $\theta_1 + \pi < \theta_2 \leq \theta_1 + 2\pi$

Fig. 2.2

Caso 1.- Como  $\theta_2 < \theta_1 + \pi$ , tenemos que  $\frac{\pi}{2} - \theta_1 < \frac{3\pi}{2} - \theta_2$ , tomamos  $\theta$  tal que:

$$\frac{\pi}{2} - \theta_1 < \theta < \frac{3\pi}{2} - \theta_2 \quad (2.9)$$



definiendo  $\alpha = e^{i\theta} \in S^1$ , luego  $\alpha\lambda_j = |\lambda_j| e^{i(\theta+\theta_j)}$  ( $j=1,2$ ) y (2.9) implica que:  $\frac{\pi}{2} < \theta + \theta_1 < \frac{3\pi}{2} - \theta_2 + \theta_1 \leq \frac{3\pi}{2}$  y  $\frac{3\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2} + \theta_2 - \theta_1 < \theta_1 \theta_2 < \frac{3\pi}{2}$  i.e.  $\frac{\pi}{2} < \theta + \theta_j < \frac{3\pi}{2}$ , ( $j=1,2$ ); lo cual es equivalente a  $Re(\alpha\lambda_j) < 0$ ; ( $j=1,2$ ).

Caso 2.- Como  $\theta_1 + \pi < \theta_2 \Rightarrow \theta_1 + \frac{\pi}{2} < \theta_2 - \frac{\pi}{2}$ . Tomemos  $\theta$  tal que:

$$\theta_1 + \frac{\pi}{2} < -\theta < \theta_2 - \frac{\pi}{2} \quad (2.10)$$

Con ésta elección, se deduce que  $-\frac{3\pi}{2} < \theta + \theta_1 < -\frac{\pi}{2}$  y  $\frac{\pi}{2} < \theta + \theta_2 < \frac{3\pi}{2}$ , luego  $Re(\alpha\lambda_j) < 0$  ( $j=1,2$ ) y el Lema está probado.

Cuando estamos en el dominio de Siegel, existe un resultado similar al anterior, cuya demostración es dejada al lector:

**Lema 2.4**  $-(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_s \Rightarrow \exists \alpha \in S^1 / (\alpha\lambda_1)(\alpha\lambda_2) < 0$

Volviendo al estudio de las de las foliaciones definidas por campos lineales, sea  $X_0(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)$  en donde  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_p$ . Para cualquier punto  $x_0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{C}^2$ , sabemos por (2.3) que la hoja de la foliación  $\mathcal{F}_{X_0}$  que pasa por  $x_0$ , puede ser parametrizada por  $\varphi(T, x_1^0, x_2^0) = (e^{\lambda_1 T} x_1^0, e^{\lambda_2 T} x_2^0)$ . Obsérvese que si  $x_2^0 = 0$  (ó  $x_1^0 = 0$ ) entonces  $\varphi(T, x_1^0, 0) \in \mathbb{C} \times \{0\}$  (ó  $\varphi(T, 0, x_2^0) \in \{0\} \times \mathbb{C}$ ) luego los planos coordenados  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 0$  son hojas de la foliación. Además, por el Lema 2.3,  $\exists \alpha \in S^1 / Re(\alpha\lambda_j) < 0$  ( $j=1,2$ ), sea  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $Re(\alpha\lambda_j) < c < 0$  ( $j=1,2$ ). Para éste  $\alpha$ , por (2.5), sabemos que el flujo real  $\varphi$ , que pasa por  $x_0$  es  $\varphi_\alpha(t, x_1^0, x_2^0) = (e^{\lambda_1 \alpha t} x_1^0, e^{\lambda_2 \alpha t} x_2^0)$ , luego para  $t > 0$  tenemos:

$$|\varphi_\alpha(t, x_1^0, x_2^0)|^2 = |e^{\lambda_1 \alpha t} x_1^0|^2 + |e^{\lambda_2 \alpha t} x_2^0|^2 = e^{2Re(\lambda_1 \alpha)t} \{|x_1^0|^2 + |x_2^0|^2\} \leq e^{2ct} |(x_1^0, x_2^0)|^2$$

luego:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi_\alpha(t, x_1^0, x_2^0)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} e^{ct} |x_0| = 0$$

De aquí se deduce el siguiente:

**Teorema 2.5** Sea  $X_0(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)$  con  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_p$ . Entonces :

- i) Los planos coordenados  $\{x_1 = 0\}$  y  $\{x_2 = 0\}$  son hojas de la foliación  $\mathcal{F}_{X_0}$ .
- ii) Para toda hoja de  $\mathcal{F}_{X_0}$ , existe un flujo real cuya trayectoria está contenida en la hoja dada y en donde el origen de coordenadas es un atractor.
- iii) Las hojas de  $\mathcal{F}_{X_0}$  son transversales a las esferas  $S_r^3$ , en donde:

$$S_r^3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |x_1|^2 + |x_2|^2 = r^2\}$$

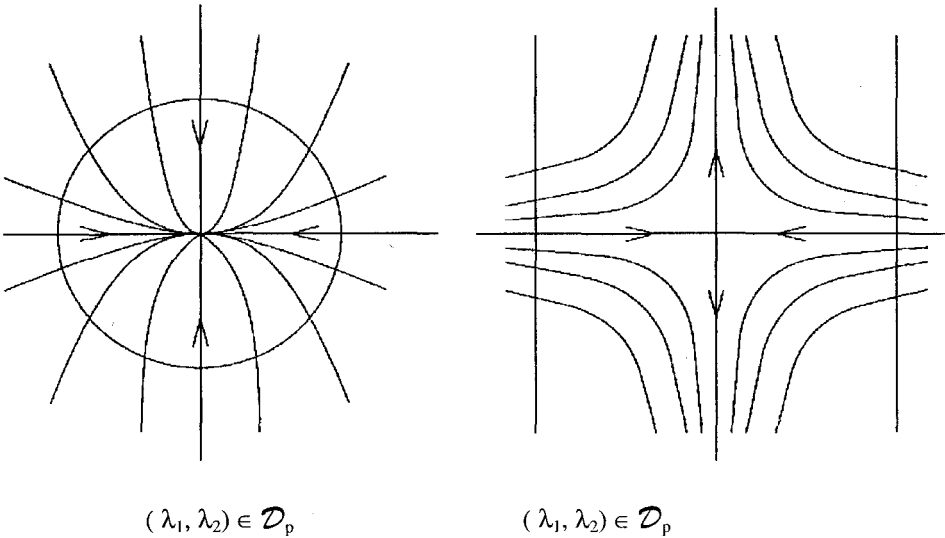


Fig. 2.3

Cuando  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_s$ ,  $\exists \alpha \in S^1$  tal que  $\alpha \lambda_1 < 0$  y  $\alpha \lambda_2 > 0$ , luego el flujo real  $\varphi_\alpha(t, x_1^0, x_2^0) = (e^{t\alpha\lambda_1} x_1^0, e^{t\alpha\lambda_2} x_2^0)$  satisfice:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{t\alpha\lambda_1} x_1^0 = 0$$

y cuando  $x_2^0 \neq 0$  tenemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{t\alpha\lambda_2} x_2^0| = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{t\alpha\lambda_2} |x_2^0| = +\infty$$

deducimos de aquí, que tales flujos son transversales a los cilindros  $C_r$ , en donde:

$$C_r = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 / |x_1| = r\}$$

además, los ejes coordenados  $\{x_1 = 0\}$  y  $\{x_2 = 0\}$  continúan siendo hojas de la foliación  $\mathcal{F}_{X_0}$ . En la figura 2.3 damos un modelo bidimensional para los flujos reales vistos anteriormente, cuando estamos en el dominio de Poincaré y en el dominio de Siegel. Para otras propiedades de las hojas de  $\mathcal{F}_{X_0}$  el lector puede consultar ([3], [5]).

### 3. Campos vectoriales holomorfos no lineales en el dominio de Poincaré en el dominio de Siegel. Resonancias.

Sea  $X$  un campo vectorial holomorfo con singularidad aislada en  $0 \in \mathbb{C}^2$ . De acuerdo a las notaciones de la sección 1, existe una vecindad  $U$  del  $0 \in \mathbb{C}^2$  tal que  $X$  se expresa como:

$$X = \left( \sum_{|Q|=1}^{\infty} a_{1,Q} x^Q, \sum_{|Q|=1}^{\infty} a_{2,Q} x^Q \right) \quad (3.1)$$

en donde las series de potencias que aparecen en (3.1) son convergentes en  $U$ .

Decimos que el campo vectorial holomorfo  $X$  está en el *Dominio de Poincaré* si y sólo si su 1-jet en el punto  $0 = (0,0)$ ,  $J_0^1(X)$ ; tiene la forma:

$$J_0^1(X) = \lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \text{con } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{D}_p \quad (3.2)$$

cuando  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{D}_s$  decimos que  $X$  está en el *Dominio de Siegel*. Obsérvese que si  $X$  está en el Dominio de Poincaré o en el Dominio de Siegel entonces  $(0,0)$  es una singularidad aislada de  $X$ .

Denotaremos por  $\mathbb{D}_p$  (resp.  $\mathbb{D}_s$ ) al conjunto de todos los campos vectoriales holomorfos  $X$  que están en el dominio de Poincaré (resp.  $X$  en el dominio de Siegel). Nuestro objeto es estudiar en una vecindad del origen de  $\mathbb{C}^2$ , la foliación  $\mathcal{F}_X$  cuando  $X \in D_p$  ó  $X \in D_s$ . Para ello tratemos primeramente de “transformar” mediante un cambio de coordenadas, el campo  $X$  en otro “más conveniente”. Tenemos el siguiente:

**Lema 3.1** Si  $X \in D_p$  ó  $X \in D_s$ , con ecuación diferencial asociada:

$$\frac{dx_j}{dT} = \lambda_j x_j + A_j(x), \quad A_j(x) = \sum_{|Q|=2}^{\infty} a_{j,Q} x^Q \quad j=1,2 \quad (3.3)$$

Entonces, existe un cambio formal de coordenadas del tipo:

$$x_j = u_j + \xi_j(u), \quad \xi_j(u) = \sum_{|Q|=2}^{\infty} \xi_{j,Q} u^Q \quad j=1,2 \quad (3.4)$$

tal que (3.3) es transformado en:

$$\frac{du_j}{dT} = \lambda_j u_j + \psi_j(u), \quad \psi_j(u) = \sum_{|Q|=2}^{\infty} \psi_{j,Q} u^Q \quad j=1,2 \quad (3.5)$$

en donde los coeficientes  $\xi_{j,Q}$ ,  $\psi_{j,Q}$  satisfacen las relaciones;

$$\begin{cases} \psi_{j,Q} = 0, & \text{si } \delta_{j,Q} = \lambda_j - q_1 \lambda_1 - q_2 \lambda_2 \neq 0 \\ \xi_{j,Q} = 0, & \text{si } \delta_{j,Q} = 0 \end{cases}$$

*Prueba:* Sea  $x = \xi(u) = (u_1 + \xi_1(u), u_2 + \xi_2(u))$ , de (3.4) tenemos:

$$\frac{dx_j}{dT} = \frac{du_j}{dT} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \xi_j}{\partial u_k}(u) \frac{du_k}{dT}$$

Queremos que  $\xi$  transforme (3.3) en (3.5), luego se debe tener:

$$\begin{aligned} \lambda_j x_j + A_j(x) &= \lambda_j u_j + \psi_j(u) + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \xi_j}{\partial u_k}(u) (\lambda_k u_k + \psi_k(u)) \\ \lambda_j (u_j + \xi_j(u)) + A_j(\xi(u)) &= \lambda_j u_j + \psi_j(u) + \sum_{k=1}^2 \lambda_k u_k \frac{\partial \xi_j}{\partial u_k}(u) + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \xi_j}{\partial u_k} \psi_k(u) \\ \lambda_j \xi_j(u) - \sum_{k=1}^2 \lambda_k u_k \frac{\partial \xi_j}{\partial u_k}(u) - \psi_j(u) &= \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \xi_j}{\partial u_k}(u) \psi_k(u) - A_j(\xi(u)) \quad (3.7) \end{aligned}$$

Como:

$$u_k \frac{\partial \xi_j}{\partial u_k}(u) = \sum_{|Q|=2}^{\infty} q_k \xi_{j,Q} u^Q$$

el lado izquierdo de (3.7) es igual a:

$$\begin{aligned} \sum_{|Q|=2}^{\infty} \lambda_j \xi_{j,Q} u^Q - \sum_{k=1}^2 \sum_{|Q|=2}^{\infty} \lambda_k q_k \xi_{j,Q} u^Q - \sum_{|Q|=2}^{\infty} \psi_{j,Q} u^Q \\ = \sum_{|Q|=2}^{\infty} [(\lambda_j - \sum_{k=1}^2 \lambda_k q_k) \xi_{j,Q} - \psi_{j,Q}] u^Q \end{aligned}$$

Luego (3.7) se reduce a:

$$\sum_{|Q|=2}^{\infty} (\delta_{j,Q} \xi_{j,Q} - \psi_{j,Q}) u^Q = \frac{\partial \xi_j}{\partial u_1}(u) \psi_1(u) + \frac{\partial \xi_j}{\partial u_2}(u) \psi_2(u) - A_j(\xi(u)) \quad j=1,2 \quad (3.8)$$

De esta manera la existencia del cambio de coordenadas formal que transforme (3.3) en (3.5) es equivalente a resolver la ecuación (3.8) siendo  $\xi_{j,Q}$  y  $\psi_{j,Q}$  las incógnitas. Obsérvese que haciendo unos cálculos, el término del lado derecho de (3.8) puede ser expresado en series de potencias  $\sum_{|Q|=2}^{\infty} c_{j,Q} u^Q$  en donde:

$$|Q|=2: c_{j,Q} = a_{j,Q} \quad j=1,2$$

$$|Q|>2: c_{j,Q} \text{ es función de } a_{1,Q'}, a_{2,Q'}, \xi_{1,Q'}, \\ \xi_{2,Q'}, \psi_{1,Q'}, \psi_{2,Q'} \text{ con } |Q'| < |Q|$$

Luego para  $|Q|=2$  tenemos:  $\delta_{j,Q} \xi_{j,Q} - \psi_{j,Q} = a_{j,Q} \quad (j=1,2)$

Si  $\delta_{j,Q} = 0$  entonces hacemos  $\xi_{j,Q} = 0$  y por tanto  $\psi_{j,Q} = -a_{j,Q}$

Si  $\delta_{j,Q} \neq 0$  entonces hacemos  $\psi_{j,Q} = 0$  y por tanto  $\xi_{j,Q} = \frac{a_{j,Q}}{\delta_{j,Q}}$

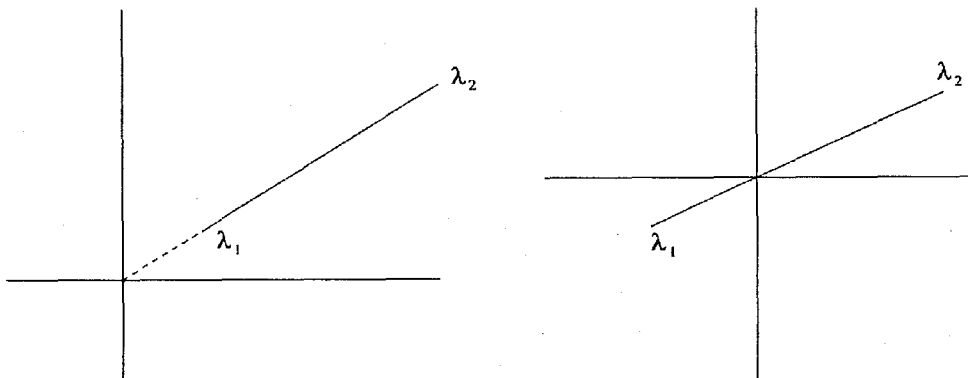
Para  $|Q| > 2$  podemos seguir inductivamente éste procedimiento y encontrar valores únicos para  $\xi_{j,Q}$  y  $\psi_{j,Q}$  que satisfacen la condición (3.6). Debemos enfatizar que ésto es posible gracias a que  $c_{j,Q}$  envuelve términos de orden  $|Q'| < |Q|$  los cuales ya son conocidos por el proceso inductivo de solución empleado.

En el Lema anterior aparecieron los números  $\delta_{j,Q} = \lambda_j - q_1 \lambda_1 - q_2 \lambda_2$ , los cuales juegan un papel fundamental en nuestro estudio. Tenemos la siguiente:

**Definición 3.1** Sean  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$ . Decimos que existe una Resonancia entre ellos si y sólo si existen  $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$  con  $q_1 + q_2 \geq 2$  tal que

$$\lambda_j = q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2 \quad \text{para algún } j = 1,2.$$

Cuando  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_p$  ó  $\mathcal{D}_s$ , tenemos una interpretación geométrica de la resonancia:



Resonancia entre  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_p$

Resonancia entre  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_s$

Fig. 3.1

### Lema 3.2

- i)  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_p$  y existe resonancia entre  $\lambda_1$  y  $\lambda_2 \Leftrightarrow \exists m \geq 2 / \lambda_1 = m \lambda_2$  ó  $\lambda_2 = m \lambda_1$
- ii)  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_s$  y existe resonancia entre  $\lambda_1$  y  $\lambda_2 \Leftrightarrow \exists_n m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+ / m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 = 0$

### Demostración:

- i) Como existe resonancia entre  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  entonces  $\exists_n q_1, q_2 \in \mathbb{N}$  con  $q_1 + q_2 \geq 2$  tal que  $\lambda_1 = q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2$  ó  $\lambda_2 = q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2$ . Considerando el primer caso, tenemos que:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{q_2}{1-q_1} \text{ y como } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_p \Rightarrow \frac{q_2}{1-q_1} \notin \mathbb{R}^- \Rightarrow q_1 < 1 \Rightarrow q_1 = 0 \text{ y}$$

luego  $\lambda_1 = q_2 \lambda_2$  con  $q_2 \geq 2$ , si consideramos la otra posibilidad llegamos a que  $\lambda_2 = q_1 \lambda_1$  con  $q_1 > 2$ . Recíprocamente, si  $\exists m \geq 2$  tal que  $\lambda_1 = m \lambda_2$  ó  $\lambda_2 = m \lambda_1$  entonces  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}^-$  i.e.  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_p$  y

además  $\lambda_1 = 0\lambda_1 + m \lambda_2$  ó  $\lambda_2 = m \lambda_1 + 0\lambda_2$ , luego existe resonancia entre  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

- ii)  $(\Rightarrow)$  Por hipótesis, llegamos a que  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{q_2}{1-q_1} \in \mathbb{R}^- \Rightarrow q_2 > 0$  y  $q_1 > 0$ , luego  $(q_1 - 1)\lambda_1 + q_2 \lambda_2 = 0$ , basta tomar  $m_1 = q_1 - 1$  y  $m_2 = q_2$ .

( $\Leftarrow$ ) Por hipótesis, existen enteros positivos  $m_1, m_2$  tales que  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{m_2}{m_1} \in \mathbb{Q}^- \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_s$ . Además,  $\lambda_1 = (m_1 + 1)\lambda_1 + m_2 \lambda_2$ ; luego existe resonancia entre  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , lo cual prueba el Lema.

#### 4. Estudio en la vecindad del origen de una foliación inducida por $X$ en $D_p$

De acuerdo al Lema 3.1, podemos transformar el campo  $X$  en uno más simple mediante un cambio formal de coordenadas  $x = \xi(u)$ . Nos preguntamos ahora:

1. ¿Es posible encontrar un cambio de coordenadas de la forma  $x = \xi(u) = (u_1 + \xi_1(u), u_2 + \xi_2(u))$  tal que el campo  $X$  es transformado en  $J_0^1(X)$ ?

2. Si la respuesta a 1 es afirmativa. ¿Bajo qué condiciones el cambio de coordenadas es analítico?

En general, la respuesta a 1 no es afirmativa, existen ejemplos en que el cambio de coordenadas del Lema 3.1 no es convergente [1]. Sin embargo, bajo ciertas condiciones, podemos responder afirmativamente a las dos preguntas anteriores, éste es el objetivo de la presente sección.

**Lema 4.1** Sea  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_p$  y supóngase que no hay resonancia entre  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , entonces:

$$\delta = \inf \{ |\delta_{j,Q}| \mid |Q| \geq 2, j = 1, 2 \} > 0$$

en donde:  $\delta_{j,Q} = \lambda_j - q_1 \lambda_1 - q_2 \lambda_2$ ,  $Q = (q_1, q_2)$ .

*Prueba.*- Acotemos inferiormente  $|\delta_{j,Q}|$  por términos que no dependan de  $Q = (q_1, q_2)$ . Consideremos dos casos:

**Caso 1:**  $\text{Im} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \neq 0$ . Para cualquier multi-índice  $Q = (q_1, q_2)$  con  $|Q| \geq 2$ , tenemos:

$$|\delta_{1,Q}| = |(1 - q_1) \lambda_1 - q_2 \lambda_2| = |\lambda_2| \left| (1 - q_1) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - q_2 \right|$$

Como

$$\left| (1 - q_1) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - q_2 \right|^2 = \left[ (1 - q_1) \text{Re} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) - q_2 \right]^2 + \text{Im} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2$$



se tiene que  $|\delta_{1,Q}| \geq |\lambda_2| \left| \operatorname{Im} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \right| > 0$ .

**Caso 2**  $\operatorname{Im} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) = 0$ : Como  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_p \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}$  y  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0 \Rightarrow |\delta_{j,Q}| = |\lambda_2| \left| (1 - q_1) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - q_2 \right|$

i)  $q_1 > 1 \Rightarrow |\delta_{1,Q}| =$

$$\begin{aligned} |\lambda_2| \left| (1 - q_1) \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{q_2}{1 - q_1} \right| \right| &\geq |\lambda_2| \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{q_2}{q_1 - 1} \right| = |\lambda_2| \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{q_2}{q_1 - 1} \right) \\ &\geq |\lambda_2| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0 \end{aligned}$$

ii)  $q_1 = 1 \Rightarrow q_2 \geq 1$  y se tiene  $|\delta_{1,Q}| = |\lambda_2| |0 - q_2| \geq |\lambda_2| > 0$

iii)  $q_1 = 0 \Rightarrow q_2 \geq 2$  y se tiene  $|\delta_{1,Q}| = |\lambda_2| \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - q_2 \right|$ . Sea  $a = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0$ .

Si  $a < q_2$  entonces  $a < [a] + 1 \leq q_2$ , luego:

$$|a - q_2| = q_2 - a = (q_2 - 1 - [a]) + (1 + [a] - a) \geq 1 + [a] - a > 0$$

Si  $2 < q_2 < a$  entonces  $q_2 \leq [a] \leq a$ , luego:

$$|a - q_2| = a - q_2 = (a - [a]) + ([a] - q_2) \geq a - [a]$$

Como  $a > 2$  y no hay resonancia entre  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ ,  $a$  no puede ser entero positivo y por tanto  $a - [a] > 0$  (es aquí donde usamos la hipótesis de resonancia). La acotación de  $|\delta_{2,Q}|$  es similar y por tanto el Lema está probado.

*Observación.*- Cuando  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_p$  y hay resonancia entre  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , sabemos que  $\exists m \geq 2$  tal que  $\lambda_1 = m \lambda_2$  (ó  $\lambda_2 = m \lambda_1$ ), si al conjunto  $\{|\delta_{j,Q}| \mid j = 1, 2; |Q| \geq 2\}$  le quitamos el elemento  $|\delta_{1,(0,m)}|$  (ó  $|\delta_{2,(m,0)}| = 0$ ), entonces el mínimo de éste conjunto sigue siendo positivo.

Estamos ahora en condiciones de responder a las dos preguntas del inicio de la sección:

**Teorema 4.2 (Poincare).** Sea  $X \in \mathcal{D}_p$  con ecuación diferencial asociada:

$$\frac{dx_j}{dT} = \lambda_j x_j + A_j(x), \quad A_j(x) = \sum_{|Q|=2}^{\infty} a_{j,Q} x^Q, \quad j=1,2 \quad (4.1)$$

Si no hay resonancia entre  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  entonces existe un cambio de coordenadas holomorfo del tipo:

$$x_j = u_j + \xi_j(u), \quad \xi_j(u) = \sum_{|Q|=2}^{\infty} \xi_{j,Q} u^Q, \quad j=1,2 \quad (4.2)$$

tal que (4.1) es transformado en:

$$\frac{du_j}{dT} = \lambda_j u_j, \quad j=1,2 \quad (4.2)$$

*Prueba.*- Como no hay resonancia entre  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  y  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_p$ , entonces  $\delta_{j,Q} \neq 0 \quad \forall j=1,2 \quad \forall |Q| \geq 2$ ; luego por el Lema 3.1, existe un cambio formal de coordenadas  $x = \xi(u)$ , del tipo (4.2) tal que (4.1) es transformado en (4.3). Restaría probar que el cambio de coordenadas es convergente en alguna vecindad del  $0 \in \mathbb{C}^2$ , para ello usamos un método conocido como el de las mayorantes de Poincaré. Antes necesitamos algunas notaciones:

$$\text{Sean } P(u_1, u_2) = \sum_{|Q|=k}^{\infty} P_Q u_1^{q_1} u_2^{q_2} \text{ y } R(u_1, u_2) = \sum_{|Q|=k}^{\infty} R_Q u_1^{q_1} u_2^{q_2} \quad (k \geq 0)$$

dos series de potencias en dos variables con coeficientes no negativos (i.e.  $P_Q, R_Q \geq 0 \quad \forall |Q| \geq k$ ), en éstas condiciones definimos:

$$P < R \Leftrightarrow P_Q \leq R_Q \quad \forall |Q| \geq 2 \quad (4.4)$$

Si  $P(u_1, u_2) = \sum_{|Q|=k}^{\infty} P_Q u_1^{q_1} u_2^{q_2}$  es una serie de potencias en dos variables con coeficientes complejos (i.e.  $P_Q \in \mathbb{C} \quad \forall |Q| \geq 2$ ), denotamos por  $\hat{P}(u_1, u_2)$  a la serie de dos variables con coeficientes no negativos de  $P$  mediante:

$$\hat{P}(u_1, u_2) = \sum_{|Q|=k}^{\infty} |P_Q| u_1^{q_1} u_2^{q_2} \quad (4.5)$$

y denotamos por  $\tilde{P}(u)$  a la serie de una variable con coeficientes no negativos obtenida de  $P$  mediante:

$$\tilde{P}(u) = \hat{P}(u, u) = \sum_{|Q|=k}^{\infty} |P_Q| u_1^{q_1} u_2^{q_2} = \sum_{|n|=k}^{\infty} \left( \sum_{|Q|=n} |P_Q| \right) u^n \quad (4.6)$$

El lector no tendrá dificultad en demostrar los siguientes resultados:

- i) Si  $\hat{P}(u_1, u_2)$  es convergente en el polidisco  $\Delta(u_1, u_2; R) = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{C} \mid |u_1| \leq R \text{ y } |u_2| \leq R\}$  entonces  $P(u_1, u_2)$  es convergente en el polidisco  $\Delta(u_1, u_2; R)$ .
- ii) Si  $\tilde{P}(u)$  es convergente en la bola  $B_R(0)$  entonces  $\hat{P}(u_1, u_2)$  es convergente en el polidisco  $\Delta(u_1, u_2; R)$ .

Pasamos a demostrar de la convergencia de  $\xi(u) = (u_1 + \xi_1(u_1, u_2), u_2 + \xi_2(u_1, u_2))$ . De (3.8) tenemos que:

$$\sum_{|Q|=2}^{\infty} \delta_{j,Q} \xi_{j,Q} u^Q = -A_j(u_1 + \xi_1(u_1, u_2), u_2 + \xi_2(u_1, u_2)) \quad j = 1, 2$$

Si llamamos  $P_j(u)$  a la serie del lado izquierdo, un fácil cálculo prueba que:

$$\hat{P}_j(u_1, u_2) \leq \hat{A}_j(u_j + \hat{\xi}_1(u_1, u_2), u_2 + \hat{\xi}_2(u_1, u_2)) \quad (4.7)$$

Por el Lema 4.1, sabemos que  $\delta = \inf\{|\delta_{j,Q}| \mid j = 1, 2, |Q| \geq 2\} > 0$ , luego:

$$\hat{P}_j(u_1, u_2) = \sum_{|Q|=2}^{\infty} |\delta_{j,Q}| |\xi_{j,Q}| u^Q \leq \delta \sum_{|Q|=2}^{\infty} |\xi_{j,Q}| u^Q = \delta \hat{\xi}_j(u_1, u_2)$$

De (4.7) :

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{\xi}_j(u) &= \delta \tilde{\xi}_j(u, u) \leq \hat{A}_j(u + \tilde{\xi}_1(u), u + \tilde{\xi}_2(u)) \\
&\leq \hat{A}_j(u + \tilde{\xi}_1(u) + \tilde{\xi}_2(u), u + \tilde{\xi}_1(u) + \tilde{\xi}_2(u)) \\
&= \tilde{A}_j(u + \tilde{\xi}_1(u) + \tilde{\xi}_2(u)) \quad j = 1, 2
\end{aligned}$$

Llegamos a:

$$\tilde{\xi}_1(u) + \tilde{\xi}_2(u) \leq \delta^{-1} \sum_{j=1}^2 \tilde{A}_j(u + \tilde{\xi}_1(u) + \tilde{\xi}_2(u)) \quad (4.8)$$

De acuerdo a los resultados (i) y (ii), será suficiente probar que  $\exists R > 0$  tal que  $\tilde{\xi}_1(u) + \tilde{\xi}_2(u)$  sea convergente en  $B_R(0)$ .

Si denotamos:

$$\begin{aligned}
F(u) &= \delta^{-1} \sum_{j=1}^2 \tilde{A}_j(u) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n u^n & f_n &= \delta^{-1} \sum_{|Q|=n} (|a_{1,Q}| + |a_{2,Q}|) \quad n \geq 2 \\
S(u) &= \sum_{j=1}^2 \tilde{\xi}_j(u) = \sum_{n=2}^{\infty} s_n u^n & s_n &= \sum_{|Q|=n} (|\xi_{1,Q}| + |\xi_{2,Q}|) \quad n \geq 2
\end{aligned}$$

(4.8) se expresa como:

$$S(u) \leq F(u = S(u)) \quad (4.9)$$

en donde  $F$  es una función analítica, (puesto que, por hipótesis,  $A_j$  son funciones analíticas) en una vecindad del  $0 \in \mathbb{C}^2$  y  $S$  es una serie de potencias. Motivados por (4.9), definimos la función  $f$  en una vecindad del  $0 \in \mathbb{C}^2$ , a valores complejos mediante:

$$f(u, v) = v - F(u + v) \quad (4.10)$$

esta función satisface  $f(0,0) = 0$  y  $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 1$  luego por el Teorema de la función implícita en varias variables complejas [4], existe una función analítica  $S_0$  definida en  $B_R(0) \subseteq \mathbb{C}$  a valores complejos tal que  $S_0(0) = 0$  y  $(u, S_0(u)) = 0$  en  $B_R(0)$ . De (4.10) tenemos:

$$S_0(u) = F(u + S_0(u)) \quad \forall u \in B_{\mathbb{R}}(0) \quad (4.11)$$

Como  $S'_0(0) = 0$ , se tiene que  $S_0$  es de la forma:

$$S_0(u) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n u^n .$$

Por tanto, de (4.11) tenemos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n u^n = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(u + S_0(u))^n \quad (4.12)$$

Igualando los términos de (4.12); llegamos a:

$$\begin{aligned} c_2 &= f_2 \\ c_3 &= 2c_2 f_2 + f_3 \\ c_4 &= c_2^2 f_2 + 2f_2 c_3 + 3f_3 c_2 + f_4 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

De esta manera  $S_0(u)$  es una serie de términos no negativos y por inducción se cumple que  $c_n \geq f_n \quad \forall n \geq 2$ . Luego por (4.9) tenemos que  $c_n \geq s_n \quad \forall n \geq 2$ , i.e.

$$S(u) \prec S_0(u) \quad \forall u \in B_{\mathbb{R}}(0)$$

y por tanto  $S(u) = \tilde{\xi}_1(u) + \tilde{\xi}_2(u)$  es convergente en el disco  $B_{\mathbb{R}}(0)$  lo cual prueba el Teorema.

Hemos probado que cuando  $X \in \mathcal{D}_p$  y no hay resonancia, existe un difeomorfismo analítico  $\xi$  que transforma  $X$  en su parte lineal  $J_0^1(X) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)$  en una vecindad del  $0 \in \mathbb{C}^2$ . Decimos entonces que  $\xi$  es una *Conjugación Analítica Local* entre  $X$  y su parte lineal  $J_0^1(X)$  ó igualmente que  $X$  y  $J_0^1(X)$  son *Analíticamente Conjugados*. De esta manera el comportamiento local de las hojas de  $\mathcal{F}_X$  es el mismo que el de las hojas de  $\mathcal{F}_{J_0^1(X)}$  el cual ya hemos estudiado (Ver sección 2, Teorema 2.5).

Cuando  $X \in \mathcal{D}_p$  y no hay resonancia, ya no es posible conjugar analíticamente  $X$  con su parte lineal, sin embargo, tenemos el siguiente:

**Teorema 4.3 (DULAC).** Sea  $X \in \mathcal{D}_p$  con ecuación diferencial asociada:

$$\frac{dx_j}{dT} = \lambda_j x_j + A_j(x) \quad A_j(x) = \sum_{|Q|=2}^{\infty} a_{j,Q} x^Q \quad j=1,2 \quad (4.13)$$

Si existe resonancia entre  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  entonces existe un cambio de coordenadas holomorfo del tipo:

$$x_j = u_j + \xi_j(u) \quad \xi_j(u) = \sum_{|Q|=2}^{\infty} \xi_{j,Q} u^Q \quad j=1,2 \quad (4.14)$$

tal que (4.13) es transformado en:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dT} = \lambda_1 u_1 + a u_2^n \\ \frac{du_1}{dT} = \lambda_2 u_2 \end{cases} \quad (4.15)$$

ó

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dT} = \lambda_1 u_1 \\ \frac{du_1}{dT} = \lambda_2 u_2 + b u_1^n \end{cases} \quad (4.16)$$

en donde  $a, b \in \mathbb{C}$  y  $n \geq 2$ .

**Prueba.-** Por hipótesis  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_p$  y existe resonancia, luego por el lema 3.2 -(i)  $\exists n \geq 2 / \lambda_1 = n\lambda_2$  ó  $\lambda_2 = n\lambda_1$ , trabajando con el primer caso y denotando  $Q_0 = (0, n)$  tenemos que  $\delta_{1,Q} \neq 0$  si  $Q \neq Q_0$ ,  $|Q| \geq 2$  y  $\delta_{2,Q} \neq 0$ ,  $\forall |Q| \geq 2$ . Por el Lema 3.1, existe un cambio de coordenadas formal  $x = \xi(u)$  del tipo (4.14) que transforma (4.13) en:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dT} = \lambda_1 u_1 + \Psi_{1,(0,n)} u_2^n \\ \frac{du_2}{dT} = \lambda_2 u_2 \end{cases} \quad \Psi_{1,(0,n)} \in \mathbb{C} \text{ y } n \geq 2$$

(La ecuación (4.16) se obtiene cuando trabajamos con  $\lambda_2 = n\lambda_1$ )

Para probar la convergencia del cambio de coordenadas, procedemos como en el Teorema 4.2, teniendo en cuenta la observación al Lema 4.1 . Dejamos los detalles al lector.

De esta manera, cuando  $X \in \mathcal{D}_p$  y existe resonancia entonces  $X$  es analíticamente conjugado al campo  $X_1(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1 + ax_2^n, \lambda_2 x_2)$  (ó a  $X_2(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1 \lambda_2 x_2 + bx_1^n)$ ) el estudio local de  $X_1$  en una vecindad del  $0 \in \mathbb{C}^2$  es similar al realizado en la sección 2 para campos lineales en vista que podemos parametrizar explícitamente las hojas de  $\mathcal{F}_{X_1}$  mediante:

$$\varphi(T, x_1, x_2) = ((ax_2^n T + x_1)e^{\lambda_1 T}, e^{\lambda_2 T} x_2)$$

Para mayor información el lector puede consultar [3].

### 5. Breve estudio en la vecindad del origen de una foliación inducida por un campo $X$ en $\mathcal{D}_s$

Los métodos de la sección anterior no pueden ser aplicados cuando  $X \in \mathcal{D}_s$ , ya que en este caso no es posible obtener un resultado similar al Lema 4.1 ni siquiera suponiendo ausencia de resonancias. Sin embargo, podemos transformar formalmente el campo  $X$  en otro más simple:

**Teorema 5.1** *Sea  $X \in \mathcal{D}_s$  con ecuación diferencial asociada:*

$$\frac{dx_j}{dT} = \lambda_j x_j + A_j(x), \quad A_j(x) = \sum_{|Q|=2}^{\infty} a_{j,Q} x^Q \quad j=1,2 \quad (5.1)$$

*Si existe resonancia entre  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  entonces existe formal de coordenadas del tipo:*

$$x_j = u_j + \xi_j(u) \quad \xi_j(u) = \sum_{|Q|=2}^{\infty} \xi_{j,Q} u^Q \quad j=1,2 \quad (5.2)$$

*tal que (5.1) es transformado en:*

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dT} = \lambda_1 u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_1^{nm_1+1} u_2^{nm_2} \\ \frac{du_2}{dT} = \lambda_2 u_2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_1^{nm_1} u_2^{nm_2+1} \end{cases} \quad (5.3)$$

*Demostración:* Por hipótesis  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_s$  y son resonantes, en este caso el Lema 3.2 (ii) nos dice que existen  $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 = 0$ , obérvese que para cualquier entero positivo  $n$   $nm_1 \lambda_1 + nm_2 \lambda_2 = 0$ , luego:

$$\begin{cases} \lambda_1 = (nm_1 + 1)\lambda_1 + m_2 \lambda_2 \\ \lambda_2 = (nm_1 \lambda_1) + (nm_2 + 1)\lambda_2 \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}^+ \quad (5.4)$$

en donde  $nm_1 + 1 + nm_2 = n(m_1 + m_2) + 1 \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$ .

De (5.4), todos los  $\delta_{j,Q}$  ( $j=1,2 \quad |Q| \geq 2$ ) son distintos de cero a excepción de aquellos de la forma  $\delta_{2,(nm_1+1, nm_2)}, \delta_{2,(nm_1, nm_2+1)}$ , los cuales son ceros para cualquier  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Por el Lema (3.1), existe un cambio formal de coordenadas del tipo (5.2) que transforma (5.1) en:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dT} = \lambda_1 u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1,(nm_1+1, nm_2)} u_1^{nm_1+1} u_2^{nm_2} \\ \frac{du_2}{dT} = \lambda_2 u_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{2,(nm_1, nm_2+1)} u_1^{nm_1} u_2^{nm_2+1} \end{cases}$$

lo cual prueba el Teorema.

Antes de finalizar, debemos advertir que todos los resultados obtenidos hasta aquí, pueden ser generalizados a dimensiones mayores que 2 [2].



## Referencias:

- [1] A. Brjuno *Analytical Forms of Differential Equations*. Trans.Moscow Math. Soc. 25 (1971), 131-288.
- [2] C. Camacho *Holomorphic Dynamical Systems*. Summer School on Dynamical Systems (1st-25th august 1983) Trieste P.O.B. 586 Italy.
- [3] C. Camacho - P.Sad *Pontos Singulares de Equações Diferenciais Analíticas*. 16 Coloquio Brasileiro de Matemática IMPA, 1987.
- [4] R. Gunning-H.Rossi *Analytic Functions of Several Complex Variables* Prentice Hall (1965).
- [5] J. Mattei - R. Moussu *Holonomie et Intégrales Premières*. Ann. Scie. Ec. Norm. Sup. (4) 13 (1980) 469 - 523.
- [6] J. Sotomayor *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides (1979).