PRO MATHEMATICA: *Vol. X, Nos. 19-20, 1996*

# LA INTERSECCION ARBITRARIA DE UNA FAMILIA DE SUBCONJUNTOS ABIERTOS CON LA PROPIEDAD S-LOCALMENTE FINITA ES SEMI-ABIERTA

*Miguel* ***Caldas Cueva***

***Resumen***

*En este trabajo definimos el concepto de propiedad s-localmente finita relativamente a sub-conjuntos y usamos este concepto para obtener una condición necesaria y suficiente para que la intersección arbitraria de una familia de subconjuntos abiertos de un espacio topológico sea semi-abierta.*

⇨ *Departamento de Matemática Aplicada-IMUFF. Universidade Federal Fluminense. Brasil.*

## 1. INTRODUCCION

Los conjuntos semi-abiertos fueron introducidos e investigados por N. Levine en ([7], 1963). Posteriormente en ([6], 1973) se probó que la intersección de dos conjuntos semi-abiertos no es necesariamente semi-abierto. En este artículo definimos la noción de una familia s-localmente finita a través de conjuntos semi-abiertos y daremos una condición necesaria y suficiente para que la intersección arbitraria (resp. unión arbitraria) de conjuntos abiertos (resp. conjuntos cerrados) sea semi-abierta (resp. semi-cerrada).

Adoptaremos en este trabajo las notaciones y terminologías de [7], [4] y [3]. Para nuestro propósito, veamos primero las siguientes definiciones y teoremas, a ser usados en este trabajo.

**Definición 1.1.** *Sea $(X,\tau)$ un espacio topológico. Diremos que el conjunto $A \subset X$ es semi-abierto* [7], *denotando por $A \in SO\ (X,\tau)$, si y solamente si, existe $O \in \tau$ tal que $O \subset A \subset Cl(O)$, donde $Cl(O)$ indica la clausura de $O$ en $X$.*

De [7]: $A \in SO\ (X,\tau) \Leftrightarrow A \subset Cl\ (Int\ (A))$

**Definición 1.2.** *Sean $(X,\tau)$ un espacio topológico y $A$, $B \subset X$. Diremos que $A$ es semi-cerrado* [2], *si y solamente si, el complementario $A^c$ es semi-abierto y la semi-clausura de $B$, denotada por $sCl(B)$, es la intersección de todos los conjuntos semi-cerrados conteniendo $B$.*

De [6]: $A$ es semi-cerrado $\Leftrightarrow sCl\ (A) = A$.

**Definición 1.3.** *Sea $(X,\tau)$ un espacio topológico. Un conjunto $M_x \subset X$ es llamado una semi-vecindad de un punto $x \in X$* [1], *si y solamente si, existe $A \in SO\ (X,\tau)$ tal que $x \in A \subset M_x$.*

**Teorema 1.4.** *Sean $(X,\tau)$ un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces $A \in SO\ (X,\tau)$, si y solamente si, $A$ es una semi-vecindad de cada $x \in A$* [1].

*Demostración:*

(Necesaria): Es inmediata.

(Suficiencia): Por hipótesis $\exists A_x \in SO\ (X,\tau)\ /\ x \in A_x \subset A$ para cada $x \in A$. Entonces por ([7], Teorema 2) $\bigcup_{x \in A} A_x = A \in SO\ (X,\tau)$.

**Teorema 1.5.** *Sea $(X,\tau)$ un espacio topológico. Si $A \in \tau$* y *$O \in SO(X,\tau)$, entonces $A \cap O \in SO(X,\tau)$* [6].

*Demostración:* Como $O \in SO(X,\tau)$, $\exists G \in \tau \ / \ G \subset O \subset Cl(O)$. Se sigue del hecho de $A$ ser abierto que $A \cap Cl(G) \subset Cl\,(A \cap G)$. Por tanto $A \cap G \subset A \cap O \subset Cl\,(A \cap G)$, de donde por la Definición 1.1, $A \cap O \in SO(X,\tau)$.

**Nota 1.**

(i) La intersección de dos sub-conjuntos semi-abiertos no es semi-abierto ([7], Observación 5).

(ii) Si $A$ es abierto y $O$ semi-abierto, entonces $A \cap O$ es semi-abierto (Teorema 1.5).

(iii) La intersección $\bigcap_{\lambda \in \Omega} A_\lambda$ de una familia $(A_\lambda)_{\in \Omega}$ de subconjuntos semi-abiertos (en particular subconjuntos abiertos) no es necesariamente semi-abierto.

El siguiente ejemplo muestra esta afirmación.

**Ejemplo 1.6.** Sea $X = \mathbf{R}$, donde $\mathbf{R}$ es la línea real con la topología usual $\tau$. Sea $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbf{N}$. Entonces la intersección $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ de la familia $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de subconjuntos abiertos no es semi-abierto, pues $A \subset Cl(Int(A))$. Los siguientes resultados duales son obtenidos como una consecuencia de la Nota 1.

(i') La unión de dos conjuntos semi-cerrados no es, en general, semi-cerrado [2].

El siguiente ejemplo, muestra esta afirmación.

**Ejemplo 1.7.** Sean $X = \{a,b,c,d\}$ y $\tau = \{\phi, \{a\}, \{a,b\}, X\}$. Si $A = \{a\}$ y $B = \{b\}$, entonces $sCl(A) = \{a\} = A$ y $sCl(B) = \{b\} = B$. También vemos que $A$ y $B$ son semi-cerrados, pero $A \cup B$ no es semi-cerrado.

(ii') Si $F$ es cerrado y $B$ semi-cerrado, entonces $A \cup B$ es semi-cerrado.

(iii') La unión $\bigcup_{\lambda \in \Omega} B_\lambda$ de una familia $(B_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ de sub-conjuntos semi-cerrados (en particular subconjuntos cerrados) de $(X,\tau)$ no es necesariamente semi-cerrada como indica el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.8.** Sean $X = \mathbf{R}$ y $B = \{\lambda \in X \,/\, 0 < \lambda < 1, \lambda \neq \frac{1}{2}\}$. Entonces $B = \bigcup_{\lambda \in B} \{\lambda\}$ donde cada $\{\lambda\}$ es cerrado, no es semi-cerrado puesto que $sCl(B) = (0,1) \subset (0,1) \setminus \{\frac{1}{2}\} = B$.

## 2. PROPIEDAD S-LOCALMENTE FINITA

Razonando como en [8], daremos aquí una condición tal que las propiedades (iii) y (iii') manteniendo sus caracteres de suficiencias, sean también necesarias.

**Definición 2.1** *Una familia* $(A_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ *de subconjuntos de un espacio topológico* $(X,\tau)$, *tiene la propiedad s-localmente finita (en forma abreviada:* (SLF)) *si para cada* $x \in X$, *existe una semi-vecindad* $V$ *de* x tal que $V \cap A_\lambda = \phi$ *para todo salvo un número finito de índices* $\lambda \in \Omega$.

Equivalentemente: Una familia $(A_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ tiene la propiedad-(SLF) en $x$ si existe una semi-vecindad $V$ de $x$ y un subconjunto finito $\Omega_0$ de $\Omega$ tal que

$$V \subset \bigcap_{\lambda \in \Omega - \Omega_0} A_\lambda^c .$$

**Definición 2.2** *Una familia* $(A_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ *de subconjuntos de un espacio topológico* $(X,\tau)$, *tiene la propiedad-*(SLF) *relativa a un subconjunto* $T$, *si esta familia tiene la propiedad-*(SLF) *en cada punto de* $T$.

Es claro que si la familia $(A_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ tiene la propiedad-(SLF) de subconjuntos y si $B_\lambda \subset A_\lambda$ para cada $\lambda \in \Omega$, entonces la familia $(B_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ satisface la propiedad-(SLF).

Este concepto es relativo a la posición de los $A_\lambda$ en $X$, y es completamente irrelevante a la intersección que ocurre entre los $A_\lambda$ .

**Ejemplo 2.3.**

(a) La familia $(A_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ puede tener la propiedad-(SLF) a pesar que cada $A_\lambda$ intersecta infinitamente muchos otros $A_\alpha$. Por ejemplo: en $X = \mathbf{R}$ basta tomar la familia $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ con $A_n = \{x \,/\, x. > n\}$.

(b) La familia $(A_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ puede tener la propiedad-(SLF) a pesar que los $A_\lambda$ no intersecten a cualquier otro $A_\alpha$. Por ejemplo: en $X = \mathbf{R}$, basta tomar la familia $(A_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$, donde $A_\lambda = \{\lambda\}$.

**Teorema 2.4.** *Una condición necesaria y suficiente para que la intersección arbitraria de una familia* $(A_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ *de subconjuntos abiertos de un espacio topológico* $(X,\tau)$ *sea semi-abierta es que la familia* $(A_\lambda^c)_{\lambda\in\Omega}$ *tenga la propiedad-*(SLF) *relativamente al subconjunto* $A = \bigcap_{\lambda\in\Omega} A_\lambda$.

*Demostración:* (Suficiencia): Supongamos que la familia $(A_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ tenga la propiedad-(SLF) relativamente al subconjunto $A = \bigcap_{\lambda\in\Omega} A_\lambda$ donde $A_\lambda \in \tau$ $(\lambda\in\Omega)$. Supongamos también que $x\in A$. Entonces por hipótesis existe un subconjunto finito $\Omega_0$ de $\Omega$ y una semi-vecindad $V$ de $x$ tal que $V\subset \bigcap_{\lambda\in\Omega-\Omega_0} A_\lambda$.

Por tanto $U = V \cap (\bigcap_{\lambda\in\Omega_0} A_\lambda) \subset (\bigcap_{\lambda\in\Omega-\Omega_0} A_\lambda) \cap (\bigcap_{\lambda\in\Omega_0} A_\lambda) = A$, esto es, $A$ contiene al conjunto $U$. Por la Nota 1 (ii) y puesto que $A = \bigcap_{\lambda\in\Omega_0} A_\lambda \in \tau$, deducimos que $U$ es una semi-vecindad de $x$, lo que implica que $A$ es una semi-vecindad de cada una de sus puntos. De aquí, y del Teorema 1.4, tenemos que $A$ es semi-abierto en $X$.

(Necesidad): Supongamos ahora que $A = \bigcap_{\lambda\in\Omega} A_\lambda$ sea semi-abierto. Entonces $A^c = \bigcap_{\lambda\in\Omega} A_\lambda^c$ es semi-cerrado, siendo cada $A_\lambda^c$ subconjunto cerrado. Sea $V = A$. Entonces $V$ es una semi-vecindad de cada uno de sus puntos tal que $V \cap A^c = \phi$.

Como $V \cap A^c = V \cap (\bigcup_{\lambda\in\Omega} A_\lambda^c) = \bigcup_{\lambda\in\Omega}(V \cap A_\lambda^c)$, entonces $V \cap A_\lambda^c = \phi$ para todo $\lambda\in\Omega$. Esto muestra que la familia $(A_\lambda^c)_{\lambda\in\Omega}$ satisface la propiedad-(SLF) en cada punto de $A = \bigcap_{\lambda\in\Omega} A_\lambda$.

**Teorema 2.5.** *Una condición necesaria y suficiente para que la unión* $B = \bigcup_{\lambda\in\Omega} B_\lambda$ *de una familia* $(B_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ *de subconjuntos cerrados de un espacio topológico* $(X,\tau)$ *sea semi-cerrada es que la familia* $(B_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ *tenga la propiedad-*(SLF) *relativamente al subconjunto* $B^c$.

*Demostración:* Los Teoremas 2.4 y 2.5 son duales y equivalentes por complementación. Realmente: Si $A_\lambda$ es el complementario $B_\lambda^c (\lambda \in \Omega)$ en la situación del Teorema 2.5, entonces $A_\lambda$ es abierto en $X$. Por otro lado, vemos que las hipótesis del Teorema 2.5 nos llevan a las hipótesis del Teorema 2.4, pues: como la familia $(B_\lambda^c)_{\lambda\in\Omega}$ de subconjuntos cerrados tiene la propiedad-(SLF) relativamente a $B^c$, resulta entonces que la familia $(A_\lambda^c)_{\lambda\in\Omega}$ también tiene la propiedad-(SLF) relativamente al sub-conjunto $A = \bigcap_{\lambda\in\Omega} A_\lambda$. De donde concluímos por el Teorema 2.4 que $A \in SO(X,\tau)$. Por complementario obtenemos que: $B = \bigcup_{\lambda\in\Omega} B_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Omega} A_\lambda^c = (\bigcap_{\lambda\in\Omega} A_\lambda)^c = A^c$ es un sub-conjunto semi-cerrado en $X$.

Usando la misma técnica, sobre la base del Teorema 2.4 obtenemos la condición necesaria. Esto es, el Teorema 2.4 implica al Teorema 2.5, (y en un raciocinio similar en el sentido inverso, probamos la implicación contraria).

**Ejemplo 2.6.** El Ejemplo 1.6, muestra que la condición de que la familia tenga la propiedad-(SLF), no puede ser omitida del Teorema 2.4 .

**Nota 2.** Si reemplazamos en la Definición 2.1 (ó en la Definición 2.2) semi-vecindad por vecindad, entonces obtenemos la definición de conjunto localmente finito [9] y los Teoremas 2.4 y 2.5 continúan aún siendo válidos.

Como consecuencia de lo anterior y teniendo en cuenta la Nota 2, conseguimos la siguiente proposición:

**Proposición 2.7.** *La intersección de una familia* $(V_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ *de vecindades de un punto x es una vecindad de x, si y solamente si, la familia* $(V_\lambda^c)_{\lambda\in\Omega}$ *verifica la propiedad localmente finita en x.*

*Demostración: (Necesidad):* Si $\bigcap_{\lambda\in\Omega} V_\lambda$ es una vecindad de $x$, entonces existe un abierto $U$ el cual contiene $x$ tal que $U \subset \bigcap_{\lambda\in\Omega} V_\lambda$. Por tanto $U \cap V_\lambda^c = \phi$ para todo $\lambda \in \Omega$; de donde deducimos que la familia $(V_\lambda^c)_{\lambda\in\Omega}$ tiene la propiedad localmente finita en $x$.

(*Suficiencia):* Supongamos que la familia $(V_{\lambda}^{c})_{\lambda\in\Omega}$ tenga la propiedad localmente finita en $x$. Entonces existe una vecindad abierta $W$ de $x$ tal que $V_{\lambda}^{c} \cap W = \phi$ excepto para un número finito de λ's. Por tanto $Cl(V_{\lambda}^{c}) \cap W = \phi$ excepto para los mismos λ's, pues si este no fuese el caso, tendríamos un $z \in Cl(V_{\lambda}^{c}) \cap W$, de donde $W$ sería una vecindad de $z$, con $z \in Cl(V_{\lambda}^{c})$. Esto es $V_{\lambda}^{c} \cap W \neq \phi$, lo que nos llevaría a una contradicción. Luego la familia $(Cl(V_{\lambda}^{c}))_{\lambda\in\Omega}$ tiene la propiedad localmente finita en $x$, lo que implica que exista una vecindad abierta $V$ de $x$ tal que $Cl(V_{\lambda}^{c}) \cap V = \phi$ para todo salvo un número finito de λ's. Como $x \in Int(V_{\lambda})$ para todo $\lambda \in \Omega$ (donde $Int(V_{\lambda})$ es el interior de $V_{\lambda}$), tenemos, que $U \supset \bigcap_{\lambda\in\Omega} (Int\,(V_{\lambda}) \cap V)$ con $x \in \bigcap_{\lambda\in\Omega} (Int(V_{\lambda}) \cap V)$ donde $U = \bigcap_{\lambda\in\Omega} Int(V_{\lambda})$. Por tanto es suficiente, probar que $O = \bigcap_{\lambda\in\Omega} (Int\,(V_{\lambda}) \cap V) \in \tau$, lo cual indicaría que $U$ sería una vecindad de $x$. En virtud de la Nota 2 y del Teorema 2.4 bastaría entonces probar que la familia $((Int\,(V_{\lambda}) \cap V)^{c})_{\lambda\in\Omega}$ tenga la propiedad localmente finita relativamente a $O$, donde $O_{\lambda} = Int(V_{\lambda}) \cap V \in \tau$. Pero esto se sigue del hecho que $V$ es una vecindad de todo punto de $O$ y $O_{\lambda}^{c} \cap V = ((Cl(V_{\lambda}^{c}) \cap V) \cup (V^{c} \cap V) = \phi$ para todo salvo un número finto de λ's. Puesto que $U \subset \bigcap_{\lambda\in\Omega} V_{\lambda}$, entonces la intersección $\bigcap_{\lambda\in\Omega} V_{\lambda}$, es una vecindad de $x$, lo que prueba nuestra proposición.

**Nota 3.** Leopoldo Nachbin en [5], da una condición suficiente para que la intersección compacta (definición dada por El) de una familia de vecindades de un punto sea vecindad del punto, pero en una versión totalmente diferente a la tratada en este trabajo.

## Bibliografías:


[1] Bohn, E. and Lee, J. *Semi-topological Groups.* Amer. Math. Monthly 72 (1965), 996-998.

[2] Biswas, N. *On Characterization of Semi-Continuous Function,* Atti. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis Mat. Natur. 48 (1970), 399-402.

[3] Caldas, M. *Semi-Generalized Continuous Maps in Topological Spaces,* Portugaliae Math. 52 (1995), 399-402.

[4] Caldas, M. *Further Results on Generalized Open Mappings in Topological Spaces*, Bull Cal. Math. Soc. 88 (1996), 27-32.

[5] Nachbin, L. *Compact Unions of Closed Subsets are Closed and Compact Intersections of Open Subsets are Open.* Portugaliae Math. 49 (1992), 403-409.

[6] Noiri, T. *On Semi-Continuous Mappings,* Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 54 (1973), 210-215.

[7] Levine, N. *Semi-Open and Semi-Continuity in Topological Space,* Amer. Math. Monthly, 70 (1963), 36-41.

[8] Silva, R. *Nota Sobre la Unión de una Familia Localmente Finita de Cerrados.* Memorias de la Fac. de Cien. 3(1967), 63-65.

[9] Willar, S. *General Topology,* Addison-Wesley, Reading (ass), 1970.

*Miguel Caldas*

*Departamento de Matemática Aplicada-IMUFF*
*Universidade Federal Fluminense*
*Rua São Paulo s/n., CEP: 24020-005,*
*Niteroi, R.J. Brasil*
*E-mail: gmamccs@vmhpo.uff.br*