PRO MATHEMATICA: *Vol. X, Nos. 19-20, 1996*

DENSIDAD EN EL ESPACIO DE FOLIACIONES

Alberto ***Sarmiento***

Introducción

Una foliación de dimensión p (codimensión m - p) en la variedad M^m es una descomposición de M en subvariedades de dimensión p.

Por ejemplo, la descomposición en curvas generada por campo vectorial (no singular) sobre M. Tales subvariedades son llamadas hojas de la foliación.

Las hojas compactas y aisladas de una foliación son conjuntos de acumulación para hojas no compactas. Así, defininiendo la C^r-topología sobre el espacio de foliaciones Fol (M), estudiamos la "estabilidad" de las hojas compactas por C^r - perturbaciones en la foliación.

El resultado que mostramos para foliaciones de codimensión 1 sobre una variedad compacta M^m es:

➪ *Departamento de Matemática, Pontificia Universidad Católica-PUC-Río. Brasil.*

Teorema 1 *El conjunto de foliaciones con apenas un número finito de hojas compactas siendo cada una de estas C^r-estable, es denso en $Fol\,(M) \setminus O_0^r$, con la C^r-topología, $r \in \{0,1\}$.*

Donde O_0^r denota el interior en la C^r-topología del conjunto de foliaciones con hoja compacta, cuyo primer grupo de homología real es trivial $(H_1(\cdot, \mathbb{R}) = \{0\})$.

1 Nociones preliminares

Una foliación $\mathcal{F}$ de codimensión 1 sobre la variedad diferenciable M de clase C^∞, es dada localmente por cartas de coordenadas llevando pedazos de hojas en (m-1)-planos paralelos de $\mathbb{R}^m$. La foliación $\mathcal{F}$ es diferenciable y de clase C^r, si estas cartas son todas de clase C^r, o sea difeomorfismos con derivadas continuas hasta oden r (ver [C-N]).

Diremos que $\mathcal{F}$ es *transversalmente orientable*, si admite un campo vectorial diferenciable X no nulo y transversal a $\mathcal{F}$. (Esto es: para todo punto $x \in M$, y siendo L la hoja de $\mathcal{F}$ que pasa por x, entonces $T_x L \oplus X(x) = T_x M$, donde $T_x L$ es el plano tangente a L en el punto x). De ahora en adelante trabajaremos en el espacio de foliaciones de clase C^∞, codimensión 1 y transversalmente orientable sobre la variedad compacta M, el cual denotaremos por Fol (M).

En Fol (M) se define la C^r-topología de Epstain [E], $0 \leq r \leq \infty$, y es definida por la proximidad en las cartas de las foliaciones hasta orden r. También podemos definir la C^r-topología a través de la C^r-topología de campos de planos. Aquí, usaremos la C^r-topología de Epstain cuando $r \geq 1$, y en el caso $r = 0$ usaremos la C^0-topología de campos de planos.

Sean, **C** una hoja compacta de la foliación $\mathcal{F}$, $I \subset$ M un pequeño segmento de curva transversal a $\mathcal{F}$ interceptando **C** en el punto x_0, y α un lazo que pertenece al conjunto Ω (**C**,x_0) de curvas cerradas sobre **C** con punto base x_0. Entonces existe una aplicación $h_\alpha : U \to I$, definida sobre una vecindad $U \subset I$ de x_0, el cual es un difeomorfismo local llamado *difeomorfismo de holonomía* de **C** a lo largo de α, y definido por levantamientos de α en las hojas de $\mathcal{F}$ próximas de **C** (ver [C-N]).

Similarmente reduciendo U si fuera necesario tenemos que, dada otra foliación $\mathcal{G}$ suficientemente próxima de $\mathcal{F}$ el *difeomorfismo de holonomía perturbada* $h_{\mathcal{G}}(\alpha)$: $U \to I$ es definida por: $h_{\mathcal{G}}(\alpha)(x) = \tilde{\alpha}$ (1), donde para todo $x \in U$, $\tilde{\alpha} : [0,1] \to M$ es el levantamiento de α sobre las hojas de $\mathcal{G}$ que pasa por el punto x. Definimos $\tilde{\alpha}$ como el levantamiento de α a través de las fibras de una vecindad tubular (fija a priori) π: $N \to \mathbf{C}$ de modo que $I \subset \pi^{-1}(x_0)$. Entonces, fácilmente vemos que $\tilde{\alpha}$ es únicamente determinada, desde que $\tilde{\alpha}(t)$ debe estar en la intersección de la hoja pasando por $\tilde{\alpha}(0)$ y el intervalo transversal $\pi^{-1}(\alpha(t))$. Obviamente si $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, tenemos que $h_\alpha = h_{\mathcal{F}}(\alpha)$.

Fijada (N,π); una vecindad tubular de $\mathbf{C}$, decimos que $\mathbf{C}$ es C^r *- estable*, si existe vecindad $V \subset$ Fol (M) de $\mathcal{F}$ en la C^r -topología tal que para toda foliación $\mathcal{G} \in V$, existe $\tilde{\mathbf{C}} \subset N$ hoja compacta de $\mathcal{G}$ próxima y difeomorfa a $\mathbf{C}$ (próxima en el sentido que la proyección $\pi : \tilde{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ es un difeomorfismo C^r -próximo de la identidad).

Denotando por Diff(I,x_0) el grupo de gérmenes de difeomorfismos locales definidos en una vecindad de $x_0 \in I$, dejando fijo el punto x_0. Tenemos que los gérmes de difeomorfismo de holonomía de $\mathbf{C}$, inducen el homorfismo $h_{\mathcal{F}}$:$\pi_1(\mathbf{C},x_0) \to$ diff(I,x_0), definido por $h_{\mathcal{F}}(\alpha) = \overline{h_\alpha} \in$ Diff (I,x_0). Dados, α,β: $[0.1] \to \mathbf{C}$, lazos en $\Omega(\mathbf{C},x_0)$; definimos el lazo $\alpha*\beta$: $[0.1] \to \mathbf{C}$, como siendo

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Con esto $h_{\mathcal{F}}$ satisface: $h_{\mathcal{F}}(\alpha*\beta) = h_{\mathcal{F}}(\beta)$ o $h_{\mathcal{F}}(\alpha)$. El conjunto $\mathcal{H}(\mathbf{C},x_0) = h_{\mathcal{F}}$ $(\pi_1(\mathbf{C},x_0))$ es llamado *grupo de holonomía* de la hoja $\mathbf{C}$ con punto base x_0

Fijos $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_n \in \Omega(C, x_0)$ lazos sobre $\mathbf{C}$ cuyas clases de homotopía $\overline{\alpha_i}$ forman un conjunto de generadores del grupo fundamental $\pi_1(\mathbf{C}, x_0)$, y sean $r_1, r_2,\ldots,r_k$ las relaciones en este grupo de modo que $(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n; r_1, r_2,\ldots,r_k)$ es una representación del grupo $\pi_1(C,x_0)$ por generadores y relaciones. Recordemos que una relación r_i es la palabra cuyas letras son los α_i y sus inversos. Existen $U \subset I$ vecindad de x_0 y difeomorfismos de holonomía de **C** definidos sobre U, $h_{\alpha_i}: U \to I$, $i=1,2,\ldots,n$ (U no depende de los lazos α_i) de modo que los h_{α_i} verifican las relaciones r'_i (r'_i son las palabras invirtiendo el orden de las letras de r_i) en una vecindad de $x_0, U_0 \subset U$.

Paul Schweitzer, en el apéndice de [Sc] Lema 2.1, prueba una condición básica sobre estabilidad de hojas compactas (para foliaciones de codimensión cualquier). El cual enunciamos a seguir en las condiciones estipuladas arriba. Si fuera necesario reducimos el intervalo U, así tenemos:

Teorema (Estabilidad condicional) *Para toda vecindad de* **C**, *existe una vecindad tubular* (**N**,π) *de* **C** *y un abierto* $V \subset$ Fol(M) *de* $\mathcal{F}$ *en la* C^r *-topología* $r \geq 1$, *tal que para toda foliación* $\mathcal{G} \in N$ *tenemos:*

1. *Para todo* α_i, *está asociado un difeomorfismo de holonomía* $h_{\mathcal{G}}$ (α_i) *definido sobre U.*
2. *Los* $h_{\mathcal{G}}(\alpha_i)$, $i=1,\ldots,n$ *verifican las relaciones* r'_j, $j=1,\ldots,k$, *en* U_0.
3. *Si* $h_{\mathcal{G}}(\alpha_i)(x) = x$, *para todo* $i=1,\ldots,n$; *entonces la hoja L de* $\mathcal{G}$ *que pasa por x está contenida en N y* $\pi|_L : L \to$ **C** *es un difeomorfismo* C^r *-próximo de la identidad. En particular, L es compacta.*

Determinar si una hoja compacta **C** de la foliación $\mathcal{F} \in$ Fol (M) es estable o inestable no es a priori un problema local más los medios que se dispone para abordar este problema son locales. Por ejemplo, perturbar la foliación de modo a no modificar está fuera de una pequeña vecindad de la hoja compacta **C** (estas perturbaciones son llamadas *perturbaciones globales con soporte local*). Bonatti y Haefliger en [B-H] muestran que podemos realizar perturbaciones globales con soporte local a partir de perturbaciones en la representación de difeomorfismos de holonomía.

Teorema (Realización de perturbaciones de holonomía) *Si* $f_1,\ldots,f_n$ *son n difeomorfismos locales definidos sobre* $U \subset I$, C^r *-próximos de los* $h_{\mathcal{F}}(\alpha_i)$, $i=1,\ldots,n$, *respectivamente, con* $1 \leq r \leq \infty$, *satisfaciendo las relaciones* $r_1,\ldots,r'_k$ *en* U_0 *y coincidiendo con los* h_{α_i} *fuera de una pequeña vecindad de* x_0 . *Entonces, existe una foliación* $\mathcal{G}$ *en Fol(M)* C^r *-próximo de la foliación* $\mathcal{F}$, *tal que* $\mathcal{G}$ *coincide con* $\mathcal{F}$ *fuera de una pequeña vecindad de* **C** *y de modo que los difeomorfismos de holonomía* $h_{\mathcal{G}}(\alpha_i)$, *son los* f_i .

Los primeros resultados sobre estabilidad de hojas compactas son debidos a G. Reeb [C-N], posteriormente generalizadas por W. Thurston [T], Langevin Rosenberg [L-R].

Teorema (Thurston-Langevin-Rosenberg) *Sea* **C** *una hoja compacta de la foliación* $\mathcal{F} \in$ Fol (M), *con primer grupo de homología real trivial,* $H(\mathbf{C},\mathbf{R}) = 0$. *Entonces :*

1. *La foliación* $\mathcal{F}$ *es inducida por un fibrado* $p: M \to S^1$, *con fibra* **C**. *Esto es, toda fibra de* p ($p^{-1}(x), x \in S^1$) *es hoja de* F.
2. *Para toda foliación* $\mathcal{G}$, C^r *-próxima de* $\mathcal{F}$ ($r \geq 1$), *la foliación* $\mathcal{G}$ *también es inducidad por un fibrado* $\tilde{p}: M \to S^1$ *con fibra difeomorfa a* **C**, y $\tilde{p}: M \to S^1$ *con fibra difeomorfa a* **C**, y $\tilde{p}$ *es* C^r *-próximo de* p.

El teorema anterior es valido para C^0 -topología, con la hipótesis de primer grupo fundamental finito (π_1 (C) finito), y este resultado es conocido como teorema de Reeb.

A seguir, enunciamos algunos resultados recientes debidos a C. Bonatti y S. Firmo [B-F], los cuales son fundamentales para el desarrollo de este artículo

Teorema (finitud) *El conjunto de foliaciones que tienen un número finito* ($\geq$ 0) *de hojas compactas, es denso en* $Fol\ (M) \setminus \mathcal{O}_0^r$, *con la* C^r*-topología,* $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$.

C. Bonatti y S. Firmo [B-F], para estudiar las hojas compactas de una foliación, agrupan estas en paquetes compactos a través de una relación de equivalencia.

Definición. *Decimos que dos hojas compactas* $\mathbf{C}_0$ y $\mathbf{C}_1$ de $\mathcal{F}$ *son equivalentes si existe un intervalo* $[a,b] \subset \mathbf{R}$, $a \leq b$ *y una incrustación* i: $\mathbf{C}_0 \times [a,b] \to M$ *con las siguientes propiedades:*

1. $i\,|_{\mathbf{C}_0 \times (a,b)}$ *es una incrustación inyectora.*
2. $i\,(\mathbf{C}_0 \times \{a\}) = \mathbf{C}_0$ *y* $i\,(\mathbf{C}_0 \times \{b\}) = \mathbf{C}_1$.
3. *Para todo punto* $x \in \mathbf{C}_0$, *el camino* $i_x : (a,b) \to M$ *definido por* $i_x(t) = i\,(x,t)$ *es transversal a la foliación* $\mathcal{F}$.

En este caso decimos que i realiza la equivalencia entre $\mathbf{C}_0$ y $\mathbf{C}_1$. Obviamente esta es una relación de equivalencia en el conjunto de hojas compactas de $\mathcal{F}$. Si **C** es una hoja compacta de $\mathcal{F}$, denotamos por [**C**] su clase de equivalencia correspondiente.

Bonatti y Firmo prueban que, toda foliación tiene como máximo un número finito (≥ 0) de clases de equivalenia; toda clase de equivalencia [**C**] admite una incrustación i global (esto es, existe aplicación i cuya imagen contiene todas las hojas compactas equivalentes a **C**, tal conjunto llamaremos de soporte de [**C**] y denotaremos por Supp[**C**]. Todo conjunto de acumulación en el Supp[**C**] es una hoja compacta. Diremos que una clase de equivalencia [**C**] es C^r*-estable*, si para toda foliación $\mathcal{G}$ C^r-próxima de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ tiene hoja compacta difeomorfa a **C**, y próxima de alguna hoja compacta de $\mathcal{F}$ contenida en el Supp[**C**]. Bonatti y Firmo en [B-F] prueban también el siguiente teorema.

Teorema (abertura y densidad) *El conjunto de foliaciones sobre M que tienen todas sus clases de equivalencia de hojas compactas* C^r*-estables, contiene un subconjunto abierto y denso en* $Fol(M)$ *con la* C^r*-topología* $r\in\{0,1\}$.

Para demostrar este teorema se definen los siguientes conjuntos abiertos y disjuntos, cuya unión resulta ser un conjunto denso en Fol (M) :

$\mathcal{O}_0^r$ = El interior, en la C^r-topología, del conjunto de foliaciones con hoja compacta **C** tal que $\mathbf{H}_1(\mathbf{C}, \mathbf{R}) = 0$, $r\in \mathrm{N} \cup \{\infty\}$.

$\mathcal{O}_1^r$ = El conjunto de foliaciones con por lo menos una hoja compacta **C** tal que $\mathbf{H}_1(\mathbf{C}, \mathbf{R}) \neq 0$, y todas las clases de equivalencia de hojas compactas son C^r-estables, $r\in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$.

$\mathcal{O}_2^r$ = El conjunto de foliaciones sin hojas compactas y con por lo menos un difeomorfismo de holonomía contractil.

$\mathcal{O}_3^r$ = El interior, en la C^r-topología, del conjunto de foliaciones con todas sus hojas densas y ningún difeomorfismo de holonomía es contractil.

Del teorema de Thurston-Langevin-Rosenberg tenemos que, para $r \geq 1$, $\mathcal{O}_0^r$ es igual al conjunto de foliaciones cuyas hojas compactas **C**, tienen $\mathbf{H}_1(\mathbf{C}, \mathbf{R}) = 0$. En particular el soporte de la clase de equivalencia de la hoja compacta es la variedad M toda, y esta clase es C^r-estable.

2 Prueba del teorema A

Antes de comenzar la prueba del teorema necesitamos de algunos conceptos y resultados específicos. Sean $J \subset \mathbf{R}$ una vecindad de cero, y f, g: $J \to \mathbf{R}$ funciones de clase C^{∞}, con $f(0) = g(0)$. Diremos que *f tiene contacto de orden k* con *g* en cero ($0 \leq k \leq \infty$), si: $f^{(i)}(0) = g^{(i)}(0)$, $0 \leq i \leq k$ y $f^{(k+1)}(0) \neq g^{(k+1)}(0)$. Si para todo $i \in \mathbf{N}, f^{(i)}(0)$ diremos *que f tiene contacto infinito con g en cero.*

Con esta noción decimos que la hoja compacta **C**, *tiene holonomia C^k-tangente a la identidad,* $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ si: existe, $\gamma \in \Omega$ (**C**, x_0), tal que el difeomorfismo de holonomía $h_\gamma : J \to \mathbf{R}$ definido sobre algún intervalo J transversal a la foliación, tiene contacto de orden k con la identidad (Id) en x_0 . Y para todo $\delta \in \Omega$ (**C**, x_0) el difeomorfismo de holonomía $h_\delta : J \to \mathbf{R}$ tiene contacto de orden $s \geq k$, con la Id. en x_0 .

Esta noción permite identificar comportamientos totalmente distintos para las hojas compactas, cuando realizamos una C^r-perturbación en la foliación. La primera que básicamente depende del estudio de comporta-miento por C^r-perturbaciones, de los difeomorfismos de la recta con un único fijo y de contacto k con la Id en este. Así, en [S] mostramos que:

Lema 1 *Sea* **C** *una hoja compacta aislada de la foliación* $\mathcal{F} \in$ *Fol* (M) *con holonomía* C^k*-tangente a la Id,* $0 \leq k < r \leq \infty$. *Entonces, para toda foliación* $\mathcal{G} \in$ *Fol(M) suficientemente* C^r*-próximo de* $\mathcal{F}$ *tenemos :*

1. *El número de hojas compactas de* $\mathcal{G}$*, próximas de* **C** *es* $\leq k+1$, *y cada una de ellas tiene holonomía con orden de tangencia* $\leq k$.
2. *Si el número de hojas compactas de* $\mathcal{G}$ *próximas de* **C** *es* ≥ 2, *entonces cada un de ellas tiene holonomía con orden de tangencia estrictamente* $< k$.

En otras palabras, fijando $0 \leq r \leq \infty$, la proposición anterior dice: Si **C** es una hoja compacta aislada de $\mathcal{F}$, con holonomía C^k-tangente a la Id, $0 \leq k \leq r$ (*tangencia finita*), entonces pequeñas perturbaciones de $\mathcal{F}$ en la C^r-topología generan a lo más (k+1) hojas compactas, próximas y difeomorfas a **C**, y el orden de contacto de éstas decae. Por otro lado, en el caso $k \geq r$

($tangencia$ $infinita$) podemos encontrar foliaciones próximas de $\mathcal{F}$ conteniendo un número arbitrario (> 0) de hojas compactas próximas de **C**, ver [S]. Una manera de controlar el número finito de hojas compactas es dado por el siguiente lema. Antes debemos fijar en la variedad M una métrica Riemanniana (los resultados son independientes de la elección de esta métrica).

Lema 2 *Sean* **C** *una hoja compacta aislada de* $\mathcal{F}$ *con holonomía* C^{k} *-tangente a la Id,* $0 \leq r \leq k \leq \infty$. *Entonces para toda foliación* $\mathcal{G}$ *suficientemente próxima de F tenemos :*

1. O, $\mathcal{G}$ *restricta a una pequeña vecindad tubular abierta de* **C** *no tiene hojas compactas.*

2. O, $\mathcal{G}$ *contiene hojas compactas próximas de* **C**. *En este caso, existe foliación* $\tilde{\mathcal{G}}$, C^{r} *-próximo de* $\mathcal{F}$ *que coincide con* $\mathcal{G}$ *fuera de una pequeña vecindad tubular* (N,π) *de* **C**, y $\tilde{\mathcal{G}}|_{N}$ *contiene una única hoja compacta próxima de* **C** *con holonomía* C^{∞} *-tangente a la Id.*

Prueba. Fijado T, un intervalo transversal a $\mathcal{F}$ interceptando **C** en el punto $x_0 \in \mathbf{C} \cap T$, e identificando T con un intervalo de recta de modo que $x_0 \approx 0 \in \mathbf{R}$. Por el teorema de estabilidad condicional tenemos que, los puntos fijos de los difeomorfismos h_i (Fij (h_i), satisfacen $\bigcap_{i=1}^{p}$ Fij(h_i) = $\{0\}$. Dado $\varepsilon > 0$ tenemos que para foliaciones G suficientemente C^{r} -próximas de $\mathcal{F}$, los difeomorfismos de holonomía perturbada $h_{\mathcal{G}}(\alpha_1),\ldots,h_{\mathcal{G}}(\alpha_n)$ satisfacen :

$$\bigcap_{i=1}^{p} \text{Fij}\,(h_{\mathcal{G}}(\alpha_i)) \subset (-\varepsilon,\varepsilon) \subset J.$$

Sea $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una secuencia de números reales positivos estrictamente decreciente y que converge para cero cuando n tiende a ∞. Entonces para cada ε_n fijo existe foliación $\mathcal{F}_n$, C^{r} -próximo de $\mathcal{F}$, de modo que la holonomía perturbada $h_{n,i} = h_{\mathcal{F}_n}(\alpha_i)$, satisface :

$$\bigcap_{i} \text{Fij}\,(h_{n,i}) \subset (-\varepsilon_n,\varepsilon_n), \qquad i = 1,\ldots,p;\ n\in\mathbf{N}.$$

La sucesión de foliaciones así construida converge a $\mathcal{F}$ en la C^r-topología. Obviamente, si $\bigcap_{i=1}^{p}$ Fij$(h_{n,i})$ es vacío o unitario, el lema está probado.

Supongamos entonces que la cardinalidad $\# \cap_i$ Fij $(h_{n,i}) \geq 2$ para todo $n \in \mathbf{N}$. En este caso, construiremos una secuencia de foliaciones $\tilde{\mathcal{F}}_n$, por perturbaciones globales con soporte local a partir de $\mathcal{F}_n$. La idea para hacer esto es retirar de $\mathcal{F}_n$ la vecindad tubular, limitada por las hojas compactas que pasan por los puntos a_n , b_n; luego "identificar" estas. Para esto denotemos por $a_n = \inf\{\cap_i \text{ Fij } (h_{n,i})\}$ y $b_n = \sup\{\cap_i \text{ Fij } (h_{n,i})\}$, tenemos entonces que a_n , $b_n \in (-\varepsilon_n, \varepsilon_n)$, y $a_n \leq b_n$ para todo n; además $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, $b_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por el teorema de realización de perturba- ciones de holonomía, generamos nuevas holonomías colando los difeomor- fismos $h_{n,i\,|(-\infty,\,a_n)}$ y $h_{n,i\,|(b_n,\infty)}$ identificando $a_n \approx b_n$. La sutileza de este colamiento es que, el orden de tangencia de estos difeomorfismos no necesariamente es el mismo, así los difeomorfismos resultantes podrían no ser ni de clase C^1 . Más, esto es superado usando el Lema de M. Muller-T. Tsuboi (ver apéndice B en [B-F]). Este lema permite conseguir difeomorfismos C^r-próximos de $h_{n,i\,|(-\infty,\,a_n)}$ y $h_{n,i\,|(b_n,\infty)}$ respectivamente, coincidiendo fuera de una vecindad de los puntos fijos y C^∞-tangente a la Id en estos puntos.

Finalmente, probaremos el teorema A. Sea $\mathcal{F} \in$ Fol $(M) \setminus \mathcal{O}_0^r$. *Primer caso.* Supongamos que $\mathcal{F} \notin \tilde{\mathcal{O}}_0^r$, entonces por el teorema de abertura y densidad, existe $\tilde{\mathcal{F}} \in \mathcal{O}_1^r \cup \mathcal{O}_2^r \cup \mathcal{O}_3^r$ próximo de $\mathcal{F}$, $r \in \{0,1\}$. Si $\tilde{\mathcal{F}}$ pertenece a $\mathcal{O}_2^r \cup \mathcal{O}_3^r$ estaría probado porque no tendría hojas compactas. El caso importante es cuando $\tilde{\mathcal{F}} \in \mathcal{O}_1^r$. Por el teorema de finitud, podemos suponer que $\tilde{\mathcal{F}}$ tiene un número finito (> 0) de hojas compactas, denotemos estas por $\mathbf{C}_1,\dots,\mathbf{C}_m$. Las clases de equivalencia de estas hojas son C^r-estables $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Consecuentemente, si una clase de equivalencia de hoja compacta contiene una única hoja compacta, esta será estable.

Reordenando las hojas, supongamos que $\mathbf{C}_1$,..., $\mathbf{C}_l$, $l \leq m$ son hojas compactas C^k-tangentes a la Id, con $k < r$ (tangencia finita), y $\mathbf{C}_{l+1}$,...., $\mathbf{C}_m$, son hojas compactas C^k-tangentes a la Id, con $r \leq k \leq \infty$ (tangencia infinita). La prueba procede así, supongamos que existe $\mathbf{C}_j$ (para algún $1 \leq j \leq m$) hoja compacta C^r-inestable de $\tilde{\mathcal{F}}$, por definición significa que existe foliación $\mathcal{F}_1$ $\in \mathcal{O}_1^r$ arbitrariamente C^r-próximo de $\tilde{\mathcal{F}}$ tal que $\mathcal{F}_1$ restricto a una pequeña vecindad tubular abierta de $\mathbf{C}_j$ no tiene hoja compacta. Notemos que si no existe tal hoja compacta $\mathbf{C}_j$, entonces $\tilde{\mathcal{F}}$ ya sería la foliación deseada.

Mismo que con $\mathcal{F}_1$ hayamos eliminado por lo menos una hoja compacta de $\tilde{\mathcal{F}}$, el número total de hojas compactas de $\mathcal{F}_1$ puede haber crecido absurdamente. Desde que toda hoja compacta de $\mathcal{F}_1$ aparece muy próxima de alguna hoja de $\tilde{\mathcal{F}}$, entonces del Lema 1, las hojas compactas de tangencia finita $\tilde{\mathcal{F}}$ generan un número finito y limitado de hojas compactas en $\mathcal{F}_1$ y con tangencia finita; más aun si el número de hojas aumenta, el orden de tangencia de estas decrece. Por otro lado del Lema 2, podemos encontrar foliación $\tilde{\mathcal{F}}_1 \in \mathcal{O}_1^r$, C^r-próximo de $\mathcal{F}_1$, de modo que coincide con $\mathcal{F}_1$ fuera de pequeñas vecindades de las hojas compactas de tangencia infinita, y $\tilde{\mathcal{F}}_1$ restricto a estas vecindades contiene a lo más una hoja compacta próxima y difeomorfa a la respectiva $\mathbf{C}_i$.

Si $\tilde{\mathcal{F}}_1$ no contiene hoja compacta C^r-inestable, esta será la foliación deseada. Caso contrario, existirá hoja compacta de $\tilde{\mathcal{F}}_1 C^r$-inestable, entonces recomenzamos el proceso anterior, obteniendo así $\tilde{\mathcal{F}}_2 \in \mathcal{O}_1^r$, C^r-próximo de $\tilde{\mathcal{F}}_1$ (por lo tanto próximo de $\mathcal{F}$) que elimina por lo menos tal hoja compacta. Este proceso es finito, porque si el número de hojas compactas con holonomía de tangencia finita aumenta, el orden de tangencia decrece estrictamente. Así, o encontramos una foliación próxima sin hojas compactas inestables, u obtenemos una foliación donde las hojas compactas de tangencia finita son de orden cero (hiperbólicas). A partir de esto, cada nueva aproximación decrece estrictamente el número de hojas compactas, esto prueba el primer caso.

Segundo caso, Si $\tilde{\mathcal{F}} \in \overline{\mathcal{O}_0^r} \setminus \mathcal{O}_0^r$, primero si $\mathcal{F}$ no tiene hoja compacta, entonces esta será la foliación deseada en otro caso siempre es posible aproximar $\mathcal{F}$ por foliaciones con hojas compactas teniendo difeomorfismo de holonomía hiperbólica por lo tanto no pertenecen a $\overline{\mathcal{O}_0^r}$, luego aplicamos el caso anterior. Esto demuestra el teorema.

Referencias

[B-H] C. Bonatti-A. Haefliger. - *Déformation de feuilletages,* Topology, Vol. 29 p. 205-229.

[B-F] C. Bonatti-S. Firmo. - *Feuilles compactes d'un feuilletages générique en codimension un. Scient.* Éc. Norm. Sup. 4° Série, t 27 (1994), p. 407-462.

[C-N] C. Camacho - A. Lins Neto. *Teoría geometrica das folheações,* proyecto Euclides (1979).

[L-R] R. Langevin - H. Rosenberg. *On stability of compact leaves and fibration,* Topology Vol. 16 (1977) p. 107-111.

[S] A. Sarmiento. *Folheações com todas as folhas compactas estáveis e semi-estabilidade estructural para folheações de codimensão um.* Tesis de Doctorado en la Pontifícia Universidad Católica de Rio de Janeiro (PUC-RIO) - Brasil (1994).

[Sc] P. Schweitzer - *Stability of compact leaves with trivial linear holonomy.* Topology vol. 27.1 (1988) p. 35-56.

[T] W. Thurton - *A generalization of the Reeb stability theorem.* Topology vol. 13 (1974) p. 347-352.

Alberto B. Sarmiento V.
Departamento de Matemática, Pontificia
Universidad Católica PUC - Rio.
Rio de Janeiro 22453 Brasil