PRO MATHEMATICA: *Vol. X, Nos. 19-20, 1996*

# HETEROGENEIDAD DE LOS AGENTES ECONOMICOS Y UNICIDAD DEL EQUILIBRIO WALRASIANO

*Alejandro* **Lugon**

*El presente artículo está basado en los trabajos de W. Hildenbrandt, Grodal-Hildenbrandt y J.M. Grandmont, los cuales tienen un análisis "econométrico" del problema de unicidad, esto es: intentan obtener condiciones que aseguren la unicidad y que puedan ser verificadas a partir de los datos que la economía provee y ya no, como con el axioma débil* [8], *condiciones sobre las características "teóricas" de la economía.*

## Heterogeneidad en las rentas.

Las economías que estudiaremos estarán formadas por un conjunto G de "Unidades Familiares" (UF), esto es: agregaremos los individuos en unidades de consumo, también tendremos un número relativamente pequeño (K) de "bienes agregados" (BA), básicamente K será igual a 9 (habitación, energía, alimentación, vestido, bienes durables, servicios, transporte, alcohol-tabaco, otros). El motivo de hacer esto es de ajustar la teoría que se desarrolla con los datos observados, o medibles, en la práctica y que pueden ser "manipulados".

➪ *Profesor del Departamento de Ciencias, Sección Matemáticas. PUCP.*

Denotemos por $y^i$ el vector de *BA* consumido por la *UF i*. El gasto de la *UF i* es el valor de este vector a precios $p$: $x^i := p.\, y^i$, consideraremos el vector $y^i$ como una función de los precios y de $x^i$. i.e :

$\forall i \in G$: $\quad y^i = f^{\,i}(p,x^i)$, asumiremos que $x^i$ es independiente de los precios y que $p.\, f^{\,i}(p,x) = x \quad \forall i \in G, \forall x \in \mathbb{R}_+$.

Con esto cada *UF i* es bien definida por el par $(f^{\,i}, x^i)$. Si indexamos el espacio de todas las posibles funciones $f$ por medio del índice $\alpha \in \mathcal{A}$, una economía será definida por una distribución de soporte compacto $\mu$ sobre $\mathcal{A} \times \mathbb{R}_+$.

Para cada $p$ consideremos la aplicación:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathbb{R}_+ &\mapsto \mathbb{R}_+^K \\ (\alpha, x) &\mapsto f^{\alpha}(p,x), \end{aligned}$$

y definamos la Demanda del Mercado como sigue:

$$F(p) := \int_{\mathcal{A} \times \mathbb{R}_+} f^{\alpha}(p,x)\, d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} \bar{f}(p,x)\, \rho(x)\, dx$$

donde $\rho(.)$ es la distribución del gasto inducida por $\mu$, y

$$\bar{f}(p,x) := \int_{\mathcal{A}} f^{\alpha}(p,x)\, d\mu \mid x$$

es la demanda media de los individuos con gasto $x$ a precios $p$, la cual llamaremos de Curva de Engels eStadística (CES).

Algunas de las siguientes suposiciones ya fueron hechas en las definiciones precedentes y es conveniente hacerlas explícitas.

**Suposición 1:**

(i) $\mu$ es una distribución sobre la $\sigma$-álgebra de los Borelianos de $\mathcal{A} \times \mathbb{R}_+$.

(ii) $\rho(.)$ existe para todo punto de $\mathcal{A}$, $\bar{x} := \int_{\mathbb{R}_+} x\rho(x)\, dx$ es finito y $\mu \mid x$ existe qtp.

(iii) $f^{\alpha}(p,x)$ es continuo en $(\alpha,p,x)$, y $C^1$ en $p$ y $x$.
Además,

$$\partial_p \int_{\mathcal{A}x\mathbb{R}_+} f^{\alpha}(p,x)d\mu = \int_{\mathcal{A}x\mathbb{R}_+} \partial_p f^{\alpha}(p,x)d\mu$$

$$\partial_p \int_{\mathcal{A}} f^{\alpha}(p,x)d\mu \mid x = \int_{\mathcal{A}} \partial_p f^{\alpha}(p,x)d\mu \mid x$$

$$\partial_p \int_{\mathbb{R}_+} \bar{f}(p,x)\, \rho(x)dx = \int_{\mathbb{R}_+} \partial_p \bar{f}(p,x)\, \rho(x)dx.$$

(iv) Para todo $x$ en el soporte de $\rho(.)$: la matriz de efecto sustitución de Slutsky de la demanda media de las $UF$ con gasto $x$: $S\bar{f}(p,x)$ es negativa semi definida.

Las tres primeras suposiciones son más bien técnicas, ya la última introduce una cierta racionalidad de los consumidores, hecho que no fue formulado en el modelo.

Diremos que la demanda de mercado: $F(p)$, es estrictamente monótona si $\forall p \neq q$ en $\mathbb{R}_+^K$:

$$(p-q) \cdot (F(p) - F(q)) \leq 0.$$

Por [8] sabemos que una condición suficiente para esto es que $\partial F(p)$ sea definido negativo para todo $p$ en $\mathbb{R}_+^K$.

De la descomposición de Slutsky para $\bar{f}(p,x)$, tenemos:

$$\partial_p \bar{f}(p,x) = S\bar{f}(p,x) - A\bar{f}(p,x),$$

donde recordemos que $A\bar{f}(p,x) = \partial_x \bar{f}(p,x)\, (\bar{f}(p,x))^T$.

Luego:

$$\partial_p F(p) = \int_{\mathbb{R}_+} S\bar{f}(p,x)\, \rho(x)dx - \int_{\mathbb{R}_+} A\bar{f}(p,x)\rho(x)dx$$

$$\partial_p F(p) = \bar{S}(p) - \bar{A}(p).$$

Por la Suposición 1(iv), $\overline{S}\,(p)$ es negativa semi definida, luego podemos centrar nuestra atención en la matriz $\overline{A}\,(p)$, y tentar probar que es positiva semi-definida. Para esto, consideremos la matriz:

$$B\,(p) = \overline{A}\,(p) + \overline{A}(p)^{\mathrm{T}} = \int_{\mathbb{R}_+} \partial_x \left( \bar{f}\,(p,x) \,.\, \bar{f}\,(p,x)^{\mathrm{T}} \right) \rho(x)dx.$$

El elemento $b_{jk}$ de $B(p)$ es de la forma:

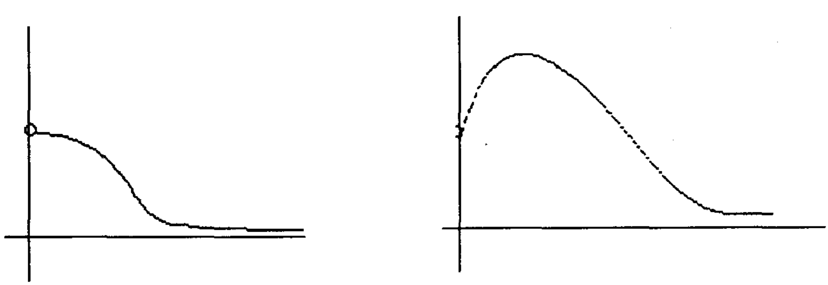
$$b_{jk} = \int_{\mathbb{R}_+} \partial_x \left( \bar{f}_j\,(p,x) \,.\, \bar{f}_k\,(p,x) \right) \rho(x)dx\;.$$

Un primer resultado que podemos citar, [5] y [6], dice que si la densidad $\rho(.)$ es decreciente, la demanda es monótona.

## Teorema 2. [6]

*Bajo la Suposición 1, si la distribución* $\rho(.)$ *es decreciente, la demanda del mercado es monótona.*

La hipótesis crucial de este resultado es que el gráfico de la distribución de renta tiene una forma como en la figura 1(a), siendo que en la realidad, las distribuciones de renta tienen una forma más parecida a la que se muestra en la figura 1(b).



(a) (b)

*Figura 1*

Con este argumento, este primer resultado pierde toda importancia práctica, pero es posible probar que si la densidad $\rho(.)$ no es decreciente, siempre se puede encontrar $\bar{f}\,(p,x)$ que hace que la matriz $\overline{A}(p)$ sea definida negativa, luego debemos hacer algún tipo de restricción sobre las CES, en ese sentido tenemos una hipótesis más:

**Suposición 3 :**

En el soporte de la densidad ρ, las CES toman la forma:

$$\bar{f}_j(p,x) = \alpha_1^j(p)\, b_1(x) + \ldots + \alpha_s^j(p)\, b_s(x)$$

donde $b_k(.)$ son funciones de $\mathbb{R}_+$ en $\mathbb{R}$, independientes de $p$ y $j$, con $b_k(0)=0$, y los coeficientes $\alpha_i^j(.) \in \mathbb{R}$ dependen solo de $j$ y $p$.

En términos generales, estas suposiciones no son muy restrictivas; si las CES son suaves estarán bien aproximadas por polinomios de grado suficientemente grande, pero no es conveniente que el número de funciones bases ($b_k(.)$) sea muy grande, ya que esto no restringiría lo suficiente al conjunto de CES posibles y, de nuevo, precisaríamos de una densidad decreciente. En [6], se formulan, basadas en métodos estadísticos, las funciones base:

$$b_1(x) = x \quad b_2(x) = x \operatorname{Log} x \quad b_3(x) = x \operatorname{Log}^2 x \quad b_4(x) = x \operatorname{Log}^3 x.$$

Veremos dos ejemplos de funciones base, pero antes estableceremos los resultados generales. En lo que sigue, $p$ será fijo.

Dada la familia de funciones $(b_1(.),\ldots,b_s(.)) = b$ definimos el conjunto: $\mathcal{L}(b) = \{g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^k \,/\, g(x) = \sum_{i=1}^{S} \alpha_i\, b_i(x),\ \alpha_i \in \mathbb{R}^k\}$, y para todo $g \in \mathcal{L}(b)$ y ρ densidad en $\mathbb{R}_+$ definimos las matrices:

$$B(g,\rho) := \Big[\int_0^\infty (g_i(x).\, g_j(x))'\, \rho(x)\, dx\Big]_{i,j=1,\ldots,k}$$

$$B(b,\rho) := \Big[\int_0^\infty (b_i(x).\, b_j(x))'\, \rho(x)\, dx\Big]_{i,j=1,\ldots,s}$$

Nótese que si hacemos $g_j(x) = \bar{f}_j(p,x)$ con $p$ fijo, tenemos que $B(g,\rho) = A + A^T = B(p)$, luego podemos concentrarnos en el análisis de $B(g,\rho)$. Así tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 4 :**

i) *El rango de la matriz* $B(g,\rho)$ *es menor o igual que el número de funciones bases:* $rank(B(g,\rho)) \leq s$.

ii) $B(g,\rho)$ *es positiva semi-definida si y solamente si* $B(b,\rho)$ *es positiva semi-definida.*

Ahora daremos dos ejemplos con funciones básicas específicas y veremos como se aplica el Teorema 4 en esos casos particulares. Cabe resaltar aquí, que los ejemplos tomados son utilizados frecuentemente en trabajos y estudios aplicados. La conclusión que podemos dar de estos dos ejemplos es que, para tener monotocidad, es preciso que la distribución del gasto sea suficientemente dispersa.

## CES polinomial.

Analizaremos el caso particular en el cual tenemos: $b_i(x) = x^i$ con $i$=1,...,$s$. Exigiremos también que la densidad $\rho$ garantice la existencia de:

$$m_k := \int_0^\infty x^k \rho(x)dx \qquad \forall i=1,\ldots,2s\text{-}1.$$

Luego, $B(b,\rho)_{kj} = \int_0^\infty (k+j)x^{k+j-1} \rho(x)dx = (k+j)m_{k+j-1}$ , y el Teorema 4 implica directamente el siguiente:

**Corolario 5**

*Si las CES son polinómios en x de grado s, es suficiente para que* $\bar{A}$ *sea potitiva semi-definida que la matriz:*

$$M(s,\rho) := [(k+j)m_{k+j-1}]_{k,j=1,\ldots,s}$$

*sea positiva semi-definida.*

Los $m_k$ dependen de la densidad $\rho$, veamos ahora como son para la distribución log-normal, que es usualmente empleada como distribución de renta:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^2}\ x} \exp\left(\frac{-(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

haciendo los cálculos para esta distribución tenemos que $m_k = \exp\{k\mu+(k\sigma)^2 / 2)\}$. Para simplificar una notación definamos $\alpha = \exp(\mu)$ y $\beta = \exp(\sigma^2/2)$, con

$$M(s,\rho)_{kj} = (k+j)\ \alpha^{k+j-1}\ \beta^{(k+j-1)2}\ .$$

**Teorema 6**

*Si una densidad* $\rho$ *es log-normal, la matriz* $M(s,\rho)$ *es definida positiva dependiendo solo de* $\sigma$ *(por lo tanto del coeficiente de variación). Pero, precisamente:* $\forall s \in \mathbb{N}$ *(el grado de polinomio de CES)* $\exists\ i(s)$ *tal que si* $CV(Y) > i(s)$ *entonces* $M(s,\rho)$ *es definida positiva.*

En la siguiente tabla vemos algunos de esos valores:

| $s$ | $i(s)$ |
|---|---|
| 2 | 0,36 |
| 3 | 0,50 |
| 4 | 0,59 |

**Demostración:**

Definimos la matriz $\tilde{M}$ poniendo: $\tilde{M}_{ij} = (i+j)\beta^{2(1-j)(1-i)}$, demostraremos primero que $M(s,\rho)$ es positiva definida si y solo si $\tilde{M}$ es positiva definida. Para esto, siendo $M(s,\rho)$ y $\tilde{M}$ simétricos, basta probar que todo menor principal de $M(s,\rho)$ tiene determinante positivo si y solo si, el determinante del menor principal correspondiente de $\tilde{M}$ es positivo.

Sean $1 \le i_1 < i_2 , < \ < i_N$, y los menores principales:

$$M\ (i_1,\dots,i_N) = [M_{ij}]_{i,j = i_1\ ,\dots, i_N}$$
$$\tilde{M}\ (i_1,\dots,i_N) = [\ \tilde{M}_{ij}]_{i,j = i_1\ ,\dots, i_N}$$

Sea $S$ el conjunto de permutaciones de $\{1,2,\dots,N\}$, luego:

$$\det M(i_1,\dots,i_N) = \sum_{\sigma\in S} sign(\sigma)\prod_{j=1}^{N} M_{i_j\, i_{\sigma(j)}}$$

y similarmente para $\tilde{M}$ . Definamos:

$$Q(\sigma) := \frac{sign(\sigma)\prod_{j=1}^{N} M_{i_j\, i_{\sigma(j)}}}{sign(\sigma)\prod_{j=1}^{N} \tilde{M}_{i_j\, i_{\sigma(j)}}} =$$

$$= \prod_{j=1}^{N} \frac{(i_j + i_{\sigma(j)})\ \alpha^{(i_j + i_{\sigma(j)} - 1)}\ \beta^{(i_j + i_{\sigma(j)} - 1)^2}}{(i_j + i_{\sigma(j)})\ \ \beta^2 (1 - i_j)(1 - i_{\sigma(j)})}$$

$$= \alpha^{(\Sigma_{j=1}^{N} (i_j + i_{\sigma(j)} - 1))}\ \beta^{(\Sigma_{j=1}^{N} (i_j^2 + i_{\sigma(j)}^2 - 1))}$$

$$= \alpha^{(2\sum_{j=1}^{N} i_j - N)}\ \beta^{(2\Sigma_{j=1}^{N} i_j^2 - N)}$$

Luego $Q(\sigma)$ no depende de $\sigma$ y como $\alpha,\beta > 0$, tenemos $Q(\sigma) = Q > 0$ $\forall\sigma \in S$, con esto $\det M(i_1,\ldots,i_N) = Q \det \tilde{M}(i_1,\ldots,i_N)$, y como $Q > 0$ queda probada la afirmación.

Ahora $\tilde{M}$ sólo depende de $\beta = \exp(\sigma^2 / 2)$, y por lo tanto, del coeficiente de variación, que en la log-normal es: $CV = \sqrt{\beta^2 - 1}$.

Hacemos los cálculos precisos de $\tilde{M}$ para $s = 3$ :

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4\beta^2 & 5\beta^4 \\ 4 & 5\beta^4 & 6\beta^8 \end{bmatrix},$$

será semi-definida positiva si:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4\beta^2 \end{bmatrix} > 0 \text{ y } \det \tilde{M} > 0,$$

luego necesitamos que:

$$\beta^2 > 9/8 \text{ y } (\beta^2 - 1)(6\beta^4 - \beta^2 - 8) > 0,$$

de donde se concluye que $\beta^2$ tiene que ser mayor que 1,241 y el CV mayor que 0,49.

## CES del tipo "working".

Ahora tomemos:

$b_1(x) = x \qquad b_2(x) = x \operatorname{Log} x \qquad b_3(x) = x \operatorname{Log}^2 x \qquad b_4(x) = \operatorname{Log}^3 x$

para estas funciones los elementos de $L(b)$ son llamados curvas Working.

Definamos $\qquad u_n = \int_0^\infty x \operatorname{Log}^n(x)\, \rho(x) dx.$

En el caso de $\rho(.)$, ser log-normal, se verificará fácilmente que:

$$u_0 = m := \exp(\mu + \sigma^2/2)$$
$$u_1 = m(\mu + \sigma^2)$$
$$u_n = (\mu + \sigma^2)u_{n-1} + (n+1)\sigma^2 u_{n-2}$$

y el elemento $b_{ij}$ de la matriz $B(b,\rho)$ tiene la forma general;

$$b_{ij} = 2u_{i+j-2} + (i+j-2)u_{i+j-3}.$$

Luego para que $B(b,\rho)$ sea positiva semi-definida necesitamos que:

$$2m \geq 0,\ m^2(4\sigma^2 - 1) \geq 0,\ 4m^3\sigma^4(4\sigma^2 - 3) \geq 0,\ 12m^4\sigma^8(16\sigma^4 - 24\sigma^2 + 3) \geq 0$$

Juntando las cuatro condiciones tenemos:

$$\sigma^2 \geq 1{,}36.$$

Resumiendo, tenemos el:

**Teorema 7.**
*Si las CES son de tipo Working y la distribución es log-normal, una condición suficiente para que la $\overline{A}$ correspondiente sea positiva semidefinida es que*

$$\sigma^2 \geq 1{,}36 \text{ o, equivalentemente, } CV \geq 1{,}70.$$

## Heterogeneidad en las preferencias

Ahora estudiaremos condiciones similares en la distribución de las preferencias dentro de la economía. Para hacer esto precisamos dotar el espacio de preferencias de una estructura en la cual tenga sentido definir una distribución.

La estructura que daremos al espacio de preferencias será generada partiendo de la siguiente familia de transformaciones afines, $\forall\ x \in \mathbb{R}^l$ y $\alpha \in \mathbb{R}^l$ definimos:

$$x_\alpha := e^\alpha \otimes x = (e^{\alpha_1} x_1, \ldots, e^{\alpha_\ell} x_\ell).$$

Directamente se verifica que $(x_\alpha)_\beta = x_{\alpha+\beta}$ . Con esto podemos definir las $\alpha$-transformaciones de una función útil de la siguiente manera:

$$u\,(\alpha,x) := u(x_{-\alpha}).$$

La siguiente proposición es obvia:

**Proposición 8** *Si $u(.)$ es $C^k$ ($k$ = 0,1,2), (estrictamente) convexa y/o creciente, entonces para todo $\alpha \in \mathbb{R}^\ell_{++}$ : $u\,(\alpha,.)$ es respectivamente $C^k$ ($k$ = 0,1,2), (estrictamente) convexa y/o creciente.*

A la vez, las $\alpha$-transformaciones de las utilidades inducen transformaciones en las demandas generadas por ellas, veamos: para una utilidad dada, la demanda $h(p,I)$ correspondiente proviene del problema:

$$\begin{gathered}\text{Max } u\,(x)\\ \text{s.a. } px = I\end{gathered}$$

donde $I$ es la renta del agente. Consideremos ahora el problema:

$$\begin{gathered}\text{Max } u\,(\alpha,x)\\ \text{s.a. } px = I\end{gathered}$$

teniendo en cuenta que $u\,(\alpha,x) = u(x_{-\alpha})$, y que $p.x = p_\alpha.x_{-\alpha}$ tenemos que la demanda asociada será: $e^\alpha \otimes h(e^\alpha \otimes p,I)$. Así es natural definir:

$$h(\alpha,p,I) := e^{\alpha}\otimes h(e^{\alpha}\otimes p,I).$$

Correspondientemente a la Proposición 8, tenemos la siguiente en términos de la demada:

**Proposición 9** *Si $h(p,I)$ es homogénea de grado 0, satisface la Ley de Walras y/o el Axioma Fraco, entonces $h(\alpha,p,I)$ es, respectivamente, homogénea de grado 0* (en $(p,I)$), *satisface la Ley de Walras y/o el Axioma Fraco.*

La proposición anterior no habla de diferenciación, en este aspecto tenemos una relación entre las derivadas respecto de los $\alpha_j$ y respecto de los precios.

**Proposición 10** *La función $h(\alpha,p,I)$ es (cont.) diferenciable en relación a p si y solo si es (cont.) diferenciable en relación a $\alpha$. En ese caso se verifica:*

i) $$\frac{\partial h_i}{\partial \alpha_j}(\alpha, p,I) = p_j \frac{\partial h_i}{\partial p_j}(\alpha,p,I) + \delta_{ij}\, h_i\,(\alpha,p,I)$$

ii) $$I\,\frac{\partial h_i}{\partial I}(\alpha, p,I) = h_i\,(\alpha, p,I) - \sum_j \frac{\partial h_i}{\partial \alpha_j}(\alpha, p,I)$$

**Demostración:**

La primera afirmación es inmediata, veamos las fórmulas.

i) Por la definición:

$$h_i\,(\alpha, p,I) = e^{\alpha}_i \,.\, h_i\,(e^{\alpha} \otimes p,I) \qquad \text{luego}$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j}(\alpha, p,I) = e^{\alpha}_i \,.\, \frac{\partial h_i}{\partial p_j}(e^{\alpha} \otimes p,I)\,, \qquad \text{y}$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial \alpha_j}(\alpha, p,I) = \delta_{ij}\; e^{\alpha}_i .\, h_i\,(e^{\alpha} \otimes p,I) + e^{\alpha}_i \,.\, \frac{\partial h_i}{\partial p_j}(e^{\alpha} \otimes p,I) + e^{\alpha}_i \,.\, p_j$$

Juntando las tres ecuaciones tenemos el resultado:

$$\frac{\partial h_i}{\partial \alpha_j}(\alpha, p, I) = \delta_{ij}\ h_i(\alpha, p, I) + p_j \frac{\partial h_i}{\partial p_j}(\alpha, p, I)\,.$$

ii) Como $h(\alpha, p, I)$ es homogénea de grado cero en $(p, I)$, vale la identidad de Euler:

$$\sum_j p_j \frac{\partial h_i}{\partial p_j}(\alpha, p, I) + I \frac{\partial h_i}{\partial I}(\alpha, p, I) = 0$$

$$\text{De i)}: \sum_j p_j \frac{\partial h_i}{\partial p_j}(\alpha, p, I) + \sum_j \frac{\partial h_i}{\partial \alpha_j}(\alpha, p, I) - h_i(\alpha, p, I)$$

$$\text{luego: } I \frac{\partial h_i}{\partial I}(\alpha, p, I) = h_i(\alpha, p, I) - \sum_j \frac{\partial h_i}{\partial \alpha_j}(\alpha, p, I)\,.$$

Si definimos la función gasto $w_i(\alpha, p, I) := p_i\ h_i(\alpha, p, I)$ podemos transfomar i) en una expresión más concisa:

$$p_i \frac{\partial h_i}{\partial \alpha_j}(\alpha, p, I) = p_i\, p_j \frac{\partial h_i}{\partial p_j}(\alpha, p, I) + \delta_{ij}\ p_1\, h_i\ (\alpha, p, I)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial \alpha_j}(\alpha, p, I) = p_i \frac{\partial p_j}{\partial \log\ p_j} \frac{\partial h_i}{\partial p_j}(\alpha, p, I) + \frac{\partial p_j}{\partial \log\ p_j} h_i(\alpha, p, I)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial \alpha_j}(\alpha, p, I) = p_i \frac{\partial h_j}{\partial \log\ p_j}(\alpha, p, I) + \frac{\partial p_j}{\partial \log\ p_j} h_i(\alpha, p, I)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial \alpha_j}(\alpha, p, I) = \frac{\partial w_i}{\partial \log\ p_j}(\alpha, p, I)$$

Antes de continuar, veamos un ejemplo simple con una función Cobb-Douglass: $u(x) = x_1^{\beta_1} \ldots x_\ell^{\beta_\ell}$, luego:

$$u(\alpha, x) = e^{-\Sigma \alpha_i}\ x_1^{\beta_1} \cdots x_\ell^{\beta_\ell}$$

y, como es conocido, para las funciones Cobb-Douglass:

$$h\,(p,I) = \left( \frac{\beta_1 I}{p_1}, \dots , \frac{\beta_\ell\, I}{p_\ell} \right)$$

Si vemos la función original y sus α-equivalentes, notaremos que representan la mismas preferencias, luego es de esperar que las funciones de demanda sean las mismas, de hecho:

$$h\,(\alpha,p,I) = e^{\alpha} \otimes \left( \frac{\beta_1 I}{e^{\alpha_1} p_1}, \dots , \frac{\beta_\ell\, I}{e^{\alpha_\ell} p_\ell} \right) = h\,(p,I)$$

Como se ve, si la función utilidad es de Cobb-Douglass, la demanda es invariante, en el siguiente sentido:

$$h\,(\alpha,p,I) = h\,(p,I) \forall\, (\alpha,p,I) \qquad (*)$$

en la proposición siguiente se prueba que las únicas funciones de demanda invariantes son las que provienen de una función del tipo Cobb-Douglas, recordando que una característica exclusiva de estas utilidades es que su función gasto es invariante en relación a los precios.

**Proposición 11** *Una función de demanda es invariante, en sentido de* (*), *si y solamente si proviene de utilidades del tipo Cobb-Douglass.*

**Demostración:** Una dirección ya está probada, en la otra supongamos que $h\,(\alpha,p,I) = h\,(p,I)$, en la definición de $h\,(\alpha,p,I)$ :

$$h\,(\alpha,p,I) = e^{\alpha} \otimes h(e^{\alpha} \otimes p,I)$$

si tomamos $\alpha_i := \log\,(\frac{q_i}{p_i})$, tenemos que $e^{\alpha} \otimes p = q$ y:

$$h_i\ (\alpha,p,I) = \frac{q_i}{p_i}\, h_i\,(q,I) = h_i\,(p,I),$$

luego:

$$q_i\, h_i\,(q,I) = p_i\, h_i\,(p,I)$$
$$w_i\,(q,I) = w_i\,(p,I).$$

Diremos que las dos utilidades $u,v$: $\mathbb{R}^{\ell}_{++} \to \mathbb{R}$ son equivalentes si una es la α-transformada de la otra, para algún α, i.e. si $\exists\alpha\in \mathbb{R}^{\ell}$ tal que $u(x) = v(\alpha,x)\ \forall x \in \mathbb{R}^{\ell}_{++}$ . Es evidente que esta es, de hecho, una equivalencia. Con esto, el espacio de utilidades (o demandas) queda dividido en clases de equivalencia, cada una de las cuales es isomorfa a $\mathbb{R}^{\ell}$ .

En lo que sigue, los agentes de la economía estarán caracterizados por su función demanda (continua, homogénea en $(p,I)$ y satisfaciendo la Ley de Walras $p.h\,(p,I) = I$) y su renta (independiente de los precios).

Nuevamente tenemos la economía siendo definida por una distribuición sobre $\overset{*}{\mathcal{A}} \times \mathbb{R}_+$ , donde $\overset{*}{\mathcal{A}}$ es el espacio de todas las funciones demanda "posibles". Asumiremos que $\overset{*}{\mathcal{A}}$ puede ser expresado como un producto de $\mathcal{A}$, el espacio de tipos básicos de demandas, e $\mathbb{R}^{\ell}$ , representan los índices de equivalencia de cada tipo.

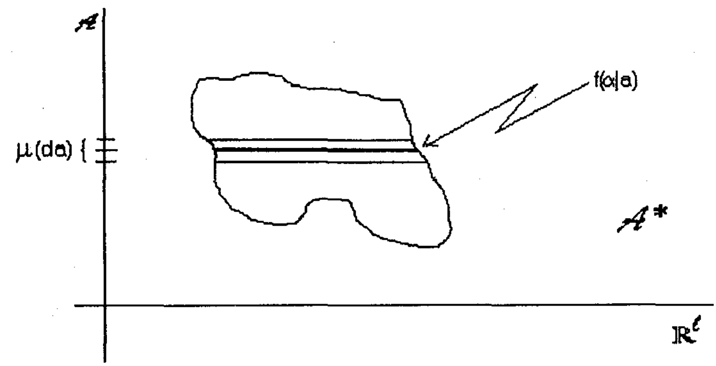



*Figura 2*

Así, para cada tipo $a \in \mathcal{A}$ tenemos una función demanda $h^a\,(p,I)$ y una renta $I^a$. La distribución en $\overset{*}{\mathcal{A}}$ estará dada por una medida μ y para cada $a \in \mathcal{A}$ la distribución $f\,(\alpha \mid a)$.

Dadas la medida μ y la distribución $f\,(\alpha|a)$, podemos agregar las demandas para algún tipo $a \in \mathcal{A}$:

$$H\,(a,p,I) := \int_{\mathbb{R}^{\ell}} h^a\,(\alpha,p,I)\, f\,(\alpha|a)\, d\alpha$$

para obtener la demanda del mercado (en términos per capita):

$$H\,(p) := \int_{\mathcal{A}} h\,(a,p,I^a)\; \mu\,(da).$$

Como en el capítulo anterior, precisaremos de algunas condiciones de regularidad para desarrollar el modelo:

**Suposición 12 :**

i) $I^a$ depende continuamente de $a$, y $\overline{I} := \int_{\mathcal{A}} I^a \, \mu(da)$. es finito.

ii) La densidad condicional $f\,(\alpha|a)$ es continua en $(\alpha,a)$, con derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial \alpha_k}$ $(\alpha|a)$ continuas en $(\alpha,a)$. Además, son uniformemente integrables, i.e. $\forall a \in \mathcal{A}$,

$$k=1, \ldots, \ell:\ m_k(a) := \int_{\mathbb{R}^\ell} \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} (\alpha,a) \right| d\alpha < +\infty.$$

iii) Para casi toda $a \in \mathcal{A}$, $m_k(a)$ es limitada superiormente por $m_k$ .

Con esto podemos provar a:

**Proposición 13 :**

*Bajo la Suposición 12, la demanda del mercado $H\,(p)$ esta bien definida, es no negativa, continuamente diferenciable y satisface la Ley de Walrass:* $p.H(p) = \overline{I}$, *con :*

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_j}(p) = \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial H_i}{\partial p_j}(a,p,I^a)\, \mu(da)$$

*y satisfaciendo:*

$$\left| p_j \frac{\partial H_i}{\partial p_j}(p) + \delta_{ij} H_i(p) \right| \le \frac{\overline{I}.m_j}{p_i} .$$

**Demostración :**

La demanda $h^a(\alpha,p,I)$ es continua, no negativa y satisface $p.h^a(\alpha,p,I) = I$, de donde $0 \le p_i\, h^a_i(\alpha,p,I) \le I$, además, $f\,(\alpha|a)$ es continua en $(\alpha,a)$. Todo esto implica que $h^a(\alpha,p,I)\, f(\alpha|a)$ es integrable, luego $H(a,p,I)$ está bien definida y es no negativa, continua y satisface la L.W.: $p.H\,(a,p,I) = I$, de nuevo $0 \le p_i\,.\,H_i\,(a,p,I) \le I$, y como $I^a$ depende continuamente de $a$: $H(p)$ está bien definida, es no negativa, continua y satisface la L.W. $p.H(p) = \overline{I}$.

Para la diferenciabilidad probaremos primero que $H_i\,(a,p,I)$ posee derivadas parciales continuas, para hacer esto consideremos la $\alpha'$-transformación de $H\,(a,p,I)$, recordando que $(x_\alpha)_{\alpha'} = x_{\alpha+\alpha'}$ :

$$H(\alpha',a,p,I) = \int_{\mathbb{R}^\ell} h^a(\alpha+\alpha',p,I)\, f(\alpha|a)\, d\alpha$$

haciendo el cambio de variable $\beta = \alpha+\alpha'$ tenemos:

$$H(\alpha',a,p,I) = \int_{\mathbb{R}^\ell} h^a(\beta,p,I)\, f(\beta-\alpha'|a)\, d\beta$$

la Suposición 5.5 ii) garantiza que podemos diferenciar $H(\alpha',a,p,I)$ en relación a $\alpha'_j$ $\forall j = 1,\ldots,\ell$, haciendo esto en el punto $\alpha' = 0$ :

$$\frac{\partial H_i}{\partial \alpha'_j}(0,a,p,I) = -\int_{\mathbb{R}^\ell} h^a(\beta,p,I)\,\frac{\partial f}{\partial \beta_j}(\beta \mid a)\, d\beta.$$

De la Proposición 10 i) $H(a,p,I)$ es diferenciable en relación a $p$ y se verifica que:

$$p_j \frac{\partial H_i}{\partial p_j}(0,a,p,I) + \delta_{ij} H_i(0,a,p,I) = \frac{\partial H_i}{\partial \alpha'_j}(0,a,p,I)$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^\ell} h^a(\beta,p,I)\,\frac{\partial f}{\partial \beta_j}(\beta \mid a)\, d\beta.$$

Simplificando y tomando valor absoluto:

$$\left| p_j \frac{\partial H_i}{\partial p_j}(a,p,I) + \delta_{ij} H_i(a,p,I) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^\ell} |h^a(\beta,p,I)| \left| \frac{\partial f}{\partial \beta_j}(\beta \mid a) \right| d\beta$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^\ell} \frac{I}{p_i} \left| \frac{\partial f}{\partial \beta_j}(\beta \mid a) \right| d\beta \leq \frac{I}{p_i} \int_{\mathbb{R}^\ell} \left| \frac{\partial f}{\partial \beta_j}(\beta \mid a) \right| d\beta$$

y finalmente:

$$\left| p_j \frac{\partial H_i}{\partial p_j}(a,p,I) + \delta_{ij} H_i(a,p,I) \right| \leq \frac{I\, m_j(a)}{p_i} \qquad (\#)$$

Esta expresión puede ser transformada en una del tipo:

$$\left| p_j \frac{\partial H_i}{\partial p_j}(a,p,I) \right| \leq g(a),$$

con $g(.)$ $\mu$-integrable en virtud de la Suposición 12, lo que asegura que la demanda del mercado $H(p)$ es continuamente diferenciable en relación a $p$, con:

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_j}(p) = \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial H_i}{\partial p_j}(a,p,I^a)\,\mu(da)$$

de donde:

$$p_j \frac{\partial H_i}{\partial p_j}(p) + \delta_{ij} H_i(p) =$$

$$= p_j \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial H_i}{\partial p_j}(a,p,I^a)\,\mu(da) + \delta_{ij} \int_{\mathcal{A}} H_i(a,p,I^a)\,\mu(da)$$

$$= \int_{\mathcal{A}} \left[ p_j \frac{\partial H_i}{\partial p_j}(a,p,I^a) + \delta_{ij} H_i(a,p,I^a) \right] \mu(da)$$

tomando valores absolutos:

$$\left| p_j \frac{\partial H_i}{\partial p_j}(p) + \delta_{ij} H_i(p) \right| \leq \int_{\mathcal{A}} \left| p_j \frac{\partial H_i}{\partial p_j}(a,p,I^a) + \delta_{ij} H_i(a,p,I^a) \right| \mu(da)$$

$$\leq \int_{\mathcal{A}} \frac{I^a m_j(a)}{p_i}\,\mu(da) \leq \frac{m_j}{p_i} \int_{\mathcal{A}} I^a\,\mu(da)$$

$$\leq \frac{m_j}{p_i}\,\bar{I}$$

con lo cual quedan probadas todas las afirmaciones.

**Nota:** De manera similar, y en virtud de la Proposición 10 ii) se puede probar que $H(a,p,I)$ es diferenciable en relación a $I$.

Los coeficientes $m_k$ presentes en 12 y 13 están relacionados con la dispersión dentro de cada clase de demandas, cuanto menor son los $m_k$ más dispersas son las distribuciones $f(\alpha|a)$. Para tener una visión más clara, veamos un ejemplo: supongamos que $\forall a$: $f(\alpha|a) = f(\alpha)$ Normal Multivariada con media cero y matriz de covarianza $\Sigma$ satisfaciendo $\Sigma_{ij} = 0$ y $\Sigma_{ii} = \sigma^2_i$, esto es:

$$f(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2}\sigma_1\cdots\sigma_\ell} \exp\left(-\sum_{i=1}^{\ell}\frac{\alpha_i^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

$$\frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha_j} = \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2}\sigma_1\cdots\sigma_\ell} \exp\left(-\sum_{i=1}^{\ell}\frac{\alpha_i^2}{2\sigma_i^2}\right)\frac{\alpha_j}{\sigma_j^2}$$

$$m_j = \int_{\mathbf{R}^\ell} \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2}\sigma_1\cdots\sigma_\ell} \exp\left(-\sum_{i=1}^{\ell}\frac{\alpha_i^2}{2\sigma_i^2}\right)\frac{|\alpha_j|}{\sigma_j^2}\, d\alpha$$

$$= \int_{\mathbf{R}^\ell} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma_j} \exp\left(-\frac{\alpha_j^2}{2\sigma_j^2}\right)\frac{|\alpha_j|}{\sigma_j^2}\, d\alpha_j$$

$$= \frac{(2/\pi)^{1/2}}{\sigma_j}.$$

En este ejemplo se ve claramente que, cuanto mayor la varianza (dispersión) de $f(\alpha \mid a)$ menores los coeficientes $m_k$. De acuerdo con esto, aumentar la dispersión de las distribuciones $f(\alpha|a)$ equivale a hacer que los $m_k$ tiendan a cero, en ese caso, la Proposición 13 nos dice que todas las derivadas parciales $\frac{\partial H_i}{\partial p_j}$ convergen a cero uniformemente si $i \neq j$, y que la elasticidad $\frac{p_i}{H_i(p)}\frac{\partial H_i}{\partial p_i}$ a -1, siempre que $H_i(p) \neq 0$. En términos de la función gasto, tenemos que $\frac{\partial w_i}{\partial \log P_i}(P)$ tiende a cero o, en otras palabras, la función gasto es asintóticamente independiente de los precios. Resumiendo, tenemos que, si hacemos los $m_k$ tender a cero, nuestra economía va a tender a comportarse como si fuera producto de utilidades Cobb-Douglass, y por tando satisfaciendo las buenas propiedades que ésta tiene.

Continuando el párrafo anterior, podemos esperar que para $m_k$ suficientemente pequeños, nuestra economía sea "bien comportada", o sea que suficiente heterogeneidad en las preferencias nos lleven a las propiedades deseadas, en nuestro caso a la unicidad del equilibrio. Para hacer esto formalmente necesitamos que la demanda del mercado, para cualquier bien, sea no nula, para tener esto haremos la siguiente:

**Suposición 14:**

i) Para $\mu$-casi todo $a \in \mathcal{A}$, la densidad $f(\alpha|a)$ es independiente de $a$.

ii) Para todo bien $i$, existe $\varepsilon_i > 0$, con $\sum_i \varepsilon_i < 1$, tal que para todo precio $p \in \mathbb{R}^{\ell}_{+}$:

$$p_i \cdot \int_{\mathcal{A}} h_i^a (p, I^a)\, \mu(da) \geq \varepsilon_i\, \overline{I}.$$

Ahora podemos formular el:

**Teorema 15** *Bajo las Suposiciones 12 y 14, tenemos que para todo bien $i$ y todo precio $p$: $p_i \cdot H_i(p) \geq \varepsilon_i\, \overline{I}$, además, la elasticidad precio de la demanda del mercado satisface:*

$$\left| \frac{\partial\, Log\, H_i}{\partial\, Log\, p_i}(p) + \delta_{ij} \right| \leq \frac{m_j}{\varepsilon_i}.$$

**Demostración:**

De 14 i):

$$p_i \cdot H_i(p) = p_i \int_{\mathcal{A}} \left[ \int_{\mathbb{R}^{\ell}} e^{\alpha_i}\, h_i^a (e^{\alpha} \otimes p, I^a) f(\alpha)\, d\alpha \right] \mu(da)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{\ell}} \left\{ p_i\, e^{\alpha_i} \left[ \int_{\mathcal{A}} h_i^a (e^{\alpha} \otimes p, I^a)\, \mu(da) \right] \right\} f(\alpha)\, d\alpha$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}^{\ell}} \{ \varepsilon_i\, \overline{I} \} f(\alpha)\, d\alpha = \varepsilon_i\, \overline{I}.$$

Luego, la demanda del mercado para todo bien es estrictamente positiva, con esto la conclusión de la Proposición 13 :

$$\left| p_j \frac{\partial H_i}{\partial p_j}(p) + \delta_{ij} H_j(p) \right| \leq \frac{\bar{I}.m_j}{p_i},$$

puede ser expresada como:

$$\left| \frac{p_j}{H_i(p)} \frac{\partial H_i}{\partial p_j}(p)\, \delta_{ij} \right| \leq \frac{\bar{I}.m_j}{p_i.H_i(p)} \leq \frac{m_j}{\varepsilon_i} \quad (*)$$

con lo que queda probado el teorema.

**Corolario 16 :**

i) *Si* $m_i < \varepsilon_i$ *la demanda del mercado del bien I es una función decreciente en relación a su propio precio.*

ii) *Sea* $m_i < \varepsilon_i$ *para todo bien i, y definamos el conjunto:*

$$DD(m,\varepsilon) := \left\{ p \in \mathbb{R}^{\ell}_{++} \,/\, \Sigma_i \frac{m_i}{p_i} < \frac{\varepsilon_j}{p_j} \quad \forall\, j=1,\ldots,\ell \right\}.$$

Entonces para todo $p \in DD(m,\varepsilon)$ el Jacobiano de la demanda del mercado tiene las siguientes propiedades:

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_i}(p) < 0 \quad \text{y} \quad \left| \frac{\partial H_i}{\partial p_i}(p) \right| > \sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial H_i}{\partial p_j}(p) \right|,$$

en otras palabras, el Jacobiano tiene diagonal dominante para precios en $DD(m,\varepsilon)$.

**Demostración:**

i) De (*):

$$\left| \frac{p_j}{H_i(p)} \frac{\partial H_i}{\partial p_j}(p) + 1 \right| \leq \frac{m_i}{\varepsilon_i} < 1$$

y como $p_i$ y $H_i(p)$ son estrictamente positivos:

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_i}(p) < 0 \qquad (**)$$

ii) De (*) :

$$\frac{p_i}{H_i(p)} \frac{\partial H_i}{\partial p_i}(p) + 1 \leq \frac{m_i}{\varepsilon_i}$$

$$\frac{1}{H_i(p)} \frac{\partial H_i}{\partial p_i}(p) \leq \frac{m_i - \varepsilon_i}{\varepsilon_i p_i}$$

tomando valor absoluto y notando que (**) vale en este caso:

$$\left| \frac{\partial H_i}{\partial p_j}(p) \right| \geq \frac{H_i(p)}{p_j} \frac{\varepsilon_i - m_i}{\varepsilon_i} \qquad (***)$$

Si $i \neq j$ (*) queda:

$$\frac{p_j}{H_i(p)} \left| \frac{\partial H_i}{\partial p_j}(p) \right| \leq \frac{m_j}{\varepsilon_i}$$

$$\left| \frac{\partial H_i}{\partial p_j}(p) \right| \leq \frac{H_i(p)}{p_j} \frac{m_j}{\varepsilon_i}$$

luego:

$$\sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial H_i}{\partial p_j}(p) \right| \leq \frac{H_i(p)}{\varepsilon_i} \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{p_j} < \frac{H_i(p)}{\varepsilon_i} \left( \frac{\varepsilon_i - m_i}{p_i} \right)$$

$$\leq \left| \frac{\partial H_i}{\partial p_i}(p) \right|$$

donde la segunda desigualdad viene de la definición de $DD(m,\varepsilon)$, y la tercera de (***).

Si los $\varepsilon_i$ estan dados, el conjunto $DD(m,\varepsilon)$, es un cono con vértice en el origen, con la propiedad de que si $m \leq m'$ entonces $DD(m',\varepsilon) \subset DD(m,\varepsilon)$, como se ve claramente en la figura 3:

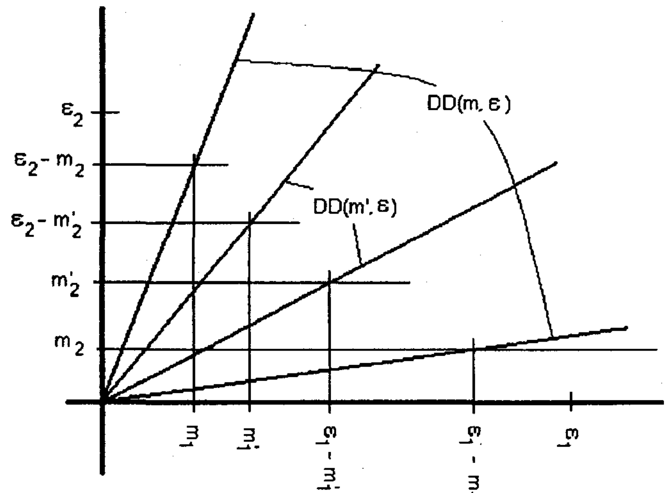



*Figura 3*

Esto nos asegura que dado un conjunto compacto de precios, podemos hacer que esté incluido en el conjunto $DD(m,\varepsilon)$ haciendo los $m_i$'s suficientemente pequeños.

El hecho de que el Jacobiano de la demanda tenga diagonal dominante nos asegura la unicidad del equilibrio. (Ver [1]).

Aquí, hemos considerado el caso en que la renta es fija, no el caso en que la renta depende de los precios. Pueden ser encontrados en [7]

## Bibliografía:

[1] *Arrow, K. y F. Hahn* "General competitive analysis". (1971).

[2] *Grandmont, J.M.* "Transformations of the commodity space, behavioral heterogeneity and the aggregation problem"; (1991) mimeo.

[3] *Grodal, B. y W. Hildenbrand* "The weak axiom of revealed preference in a production economie"; Review of economics studies, 56, pag. 635, (1989).

[4] *Grodal, B. y W. Hildenbrand* "Statistical engles curves, income distributions an the 'Law of demand' "; SFB 303, Universitat Bonn, Discution Paper N A-108, (1990).

[5] *Hildenbrand, W.* "On the 'Law of demand' "; Econometrica, 51, pag. 997, (1983).

[6] *Hildenbrand, W.* "Two essays on market demand"; mimeo. (1991).

[7] *Lugon, A.* "Sobre a unicidade global do eq. walrasiano". Informes de Matemática, serie D-049 - Março 1992. IMPA. Río de Janeiro.

[8] *Lugon, A.* "Sobre la ley de la demanda generalizada y la unicidad del equilibrio walrasiano". Revista Pro Mathematica, vol. IX, nos. 17-18, págs. 73-86, 1995. PUCP.

*alugon@pucp.edu.pe*