PRO MATHEMATICA: *Vol. X, Nos. 19-20 1996*

# LA PARADOJA DE BANACH-TARSKI

*Juan* ***Rivera***

## *0. Introducción*

*En este artículo se hará una demostración elemental del teorema debido a S. Banach y A. Tarski, demostrado en 1924, ver [1], más conocido como Paradoja de Banach-Tarski y que, informalmente, podemos enunciar:*

*Dados $X, Y \subset \mathbb{R}^3$, acotados y con interior no vacío, podemos dividir X en un número finito de partes, reordenarlas, sin superposiciones, (a través de movimientos rígidos) para formar Y.*

*En particular, podemos dividir una bola en número finito de partes, reordenarlas y obtener un cubo,! aunque la bola y el cubo no tengan el mismo volumen!.*

*Instituto de Matemática Pura y Aplicada (IMPA), Río de Janeiro. Brasil*

Se advierte al lector que este teorema sólo trata con objetos idealizados, y no podemos, en principio, afirmar que, por ejemplo, podemos obtener un elefante a partir de un granito de arena, pues tendríamos que asumir que el espacio donde estamos inmersos es continuo, que el granito de arena realmente tiene interior no vacío, ... etc.

Este teorema se puede generalizar a dimensiones mayores que tres, sin embargo no es cierto en dimensiones uno y dos. También existen teoremas análogos en $\mathbb{H}^n$ (espacio hiperbólico de dimensión $n$), y en $\mathbb{S}^n$ (la esfera de dimensión $n$), para $n \geq 2$, ver [9]. Es importante resaltar que estos teoremas, tanto en el caso de $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{H}^n$ , y $\mathbb{S}^n$ dependen del axioma de elección.

Para mayor información sobre el teorema de Banach-Tarski, ver [1], [3] y [7].

**Notación:** Entendemos por bola, una bola euclidiana. Un conjunto se dice acotado si está contenido en alguna bola y se dice de interior no vacío si contiene alguna bola. Como siempre, un movimiento rígido es la composición de una rotación y una traslación. + y $\sum$ denotarán unión dijunta.

Diremos que $A$ y $B \subset \mathbb{R}^3$ son congruentes si existe un movimiento rígido $T$ tal que $T(A) = B$ y lo denotaremos: $A \equiv B$.

Dados $A$, $B \subset \mathbb{R}^3$ , una equivalencia entre $A$ y $B$ es una función $f\colon A \rightarrow B$ tales que existen $A_1, A_2,...,A_k$ y movimientos rígidos $T_1,T_2,...,T_k$ que verifican:

$$A = A_1 + A_2 + ... + A_k\ , \quad B = T_1\,(A_1) + T_2\,(A_2) + ... + T_k\,(A_k\,).$$

y para todo $x \in A_i$ , $f(x) = T_i\,(x)$, $i$=1,2,...,$k$, (en particular $f$ es una biyección).

Diremos que $A$ y $B$ son equivalentes, y lo denotaremos, $A \cong B$, si existe una equivalencia entre $A$ y $B$.

Dados $A,B,C \subset \mathbb{R}^3$ el lector puede verificar los siguientes hechos elementales:

i) $A \cong A$
ii) $A \cong B$, implica $B \cong A$.

iii) $A \cong B$ y $B \cong C$ implica $A \cong C$.

iv) si $f$ es una equivalencia entre $A$ y $B$, y $C \subset A$ entonces $f$ es una equivalencia entre $C$ y $f(C)$.

Ahora, formalmente podemos enunciar **la paradoja de Banach-Tarski**:

**Teorema:** *Si* $X$ y $Y \subset \mathbb{R}^3$, *son acotados y de interior no vacío entonces* $X \cong Y$.

## 1. DESCOMPOSICION DE LA ESFERA

**Teorema 1:** *Dada una esfera* $S$, *existen* $S_0$, $S_1$, $S_2$, $P \subset S$, *$P$ enumerable tales que:* $S = S_0 + S_1 + S_2 + P$ y $S_0 \equiv S_1 \equiv S_2 \equiv S_1 + S_2$.

**Nota 1:** Este teorema fue demostrado por F. Hausdorff en 1914, con el cual demostró la no existencia de medidas invariantes por isometrías y definidas en todo subconjunto de $\mathbb{R}^3$ y que posteriormente motivó la paradoja aquí en cuestión, ver [3] y [4].

**Demostración:**

**1.1 Construcción del grupo de acción.** Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la esfera está centrada en el origen de coordenadas. Consideremos $\tau$ y $\psi'$ dos rotaciones en el eje $z$, del 120° y 180° respectivamente, y $\theta_\alpha$ una rotación en un ángulo de $\alpha°$, alrededor del eje $x$.

Sea $G_\alpha = < \{\tau, \psi_\alpha\} >$, ($\psi_\alpha = \theta_\alpha \circ \psi' \circ \theta_\alpha^{-1}$) el grupo generado por $\tau$ y $\psi_\alpha$. ($\psi_\alpha$ corresponde a una rotación de 180° en un eje $\ell$, ubicado en el plano $yz$, formando un ángulo de $\alpha°$ con el eje $z$).

Como $\tau^3 = id$ y $\psi_\alpha^2 = id$ todo elemento de $G_\alpha$ lo podemos escribir de la forma:

$$\rho = \tau^{n_0} \circ \psi_\alpha \circ \ldots \circ \psi_\alpha \circ \tau^{n_k},\ 0 \le n_0, n_k \le 2,\ 1 \le n_i \le 2, \quad i = 1,2,\ldots,k\text{-}1.$$

La idea es escoger $\alpha$ tal que esta representación sea única[1], (En la demostración original de Hausdorff [4] se demuestra que cualquier $\alpha$ tal que *cos* ($\alpha$) sea trascendental sirve, y en [8] se demuestra que $\alpha = 45°$ también sirve). Suponiendo que ésta no fuera única, tendríamos $\rho \in G_\alpha$ con dos presentaciones, llamémoslas $\rho_1$ y $\rho_2$. Consideremos la representación de $\rho_1 \circ \rho_2^{-1}$:

---

[1] *Lo que en realidad se busca, es un* $\alpha$ *tal que* $G_\alpha$ *sea isomorfo a un grupo generado por dos elementos, a y b tal que* $a^3 = id$, $b^2 = id$ *y sin otras relaciones.*

(1) $id = \rho_1 \circ \rho_2^{-1} = \tau^{n_0} \circ \psi_\alpha \circ \ldots \circ \psi_\alpha \circ \tau^{n_k}$, $0 \leq n_0, n_k \leq 2$, $1 \leq n_i \leq 2$, $i = 1,2,\ldots,k-1$.

Para cada $(k, n_0, n_1,\ldots, n_k)$ tenemos a lo más un número finito de $\alpha$'s para los cuales (1) se cumple (el lector puede verificar este hecho, considerando la ecuación con matrices, pues quedará un polinomio en $sen(\alpha)$ y $cos(\alpha)$, que tiene a lo más un número finito de raíces reales), y considerando que $\{(k, n_0, n_1, \ldots, n_k) \mid 0 \leq n_0, n_k \leq 2, 1 \leq n_i \leq 2, i=1,2,\ldots,k-1\}$ es enumerable, concluímos que existe, a lo más, un conjunto enumerable de ángulos $\alpha$ en que la representación no es única. Escogiendo un ángulo cualquiera que no sea de este conjunto, conseguiremos un ángulo en que la representación de los elementos de $G_\alpha$ es única. Una vez escogido $\alpha$ sean: $G = G_\alpha$, $\psi = \psi_\alpha$.

**1.2 Descomposición de** $G$. Dado $\rho \in G$, sean $G(\rho) = \{\sigma \in G \mid n_k \neq 0$ donde $n_k$ es el último exponente de $\tau$ en la representación única de $\sigma \circ \rho^{-1}\}$ y $G_0(\rho) = \{\sigma \in G \mid n_k \neq 0$ y $n_0 = 0$ donde $n_0$ y $n_k$ $(k \geq 1)$ son el primer y último exponente de $\tau$ en la representación única de $\sigma \circ \rho^{-1}\}$.

Claramente para todo $\rho \in G$, $G_0(\rho) \subset G(\rho)$,

(2) $G(\rho) = (\sum_{r=0}^{2} \tau^r (G_0(\rho))) \cup \{\tau \circ \rho, \tau^2 \circ \rho\}$ y

$\psi(G_0(\rho)) = \tau(G_0(\rho)) + \tau^2(G_0(\rho))$.

Dado $\tau^{n_0} \circ \psi \circ \ldots \circ \psi \circ \tau^{n_k} \circ \rho \in G(\rho)$ (es decir $n_k \neq 0$), lo podemos escribir como: $\tau^{n_0} \circ \psi \circ \ldots \circ \psi \circ \tau^{n_k} \circ \psi \circ \tau \circ (\tau \circ \psi \circ \rho) \in G(\tau \circ \psi \circ \rho)$. Luego $G(\rho) \subset G(\tau \circ \psi \circ \rho)$, por lo tanto:

$$G(id) \subset G(\tau \circ \psi) \subset G((\tau \circ \psi)^2) \subset G((\tau \circ \psi)^3) \subset \ldots$$

Similarmente, podemos demostrar:

$$G_0(id) \subset G_0(\tau \circ \psi) \subset G_0((\tau \circ \psi)^2) \subset G_0((\tau \circ \psi)^3) \subset \ldots$$

Nótese que $G = \bigcup_{r=0}^{\infty} G((\tau \circ \psi)^r)$, en efecto dado $\rho = \tau^{n_0} \circ \psi \circ \ldots \circ \psi \circ \tau^{n_k} \in G$, arbitrario tenemos: si $n_k \neq 0$, entonces $\rho \in G(id)$. Si $n_k = 0$ y $n_i = 1$,

$i$=0,1,2,...,$k$-1 entonces $\rho = \psi \circ \tau \circ (\tau \circ \psi)^{k+1} \in G((\tau \circ \psi)^{k+1})$, y finalmente, si $n_k = 0$ y existe $m'$ tal que $n_{m'} \neq 1$, entonces sea $m$ el mayor número tal que $n_m \neq 1$ y sea $n'_m = n_m - 1$ si $n_m \neq 0$ y 2 si $n_m = 0$ entonces $\rho = \tau^{n_0} \circ \psi \ldots \circ \psi \circ \tau^{n'_m} \circ (\tau \circ \psi)^{k-m} \in G((\tau \circ \psi)^{k-m})$.

Sea $G_0 = \bigcup_{r=0}^{\infty} G_0((\tau \circ \psi)^r)$ y para $i = 1,2$, sea $G_i = \tau^i(G_0)$. Luego por (2) tenemos:

(3) $$G = G_0 + G_1 + G_2 \text{ y } G = G_0 + \psi(G_0).$$

**1.3 Demostración del Teorema 1.** Sea $P = \{p \in S \mid \text{existe } \rho \in G, \rho \neq id, \rho(p) = p\}$, como $G$ es enumerable y toda rotación distinta de la identidad sólo tiene dos puntos fijos en $S$, concluímos que $P$ es enumerable.

Dado $p \in S - P$, sea $G(p) = \{q \in S \mid \text{existe } \rho \in G, \rho(p) = q\}$.

Consideremos la función que asocia $\rho \in G$ con $\rho(p) \in S$. Esta función es una biyección, porque: es sobreyectiva (por la definición de $G(p)$) y es inyectiva, pues si $\rho_1(p) = \rho_2(p)$ ($\rho_1, \rho_2 \in G$) entonces: $\rho_1 \circ \rho_2^{-1}(p) = p$, y como $p \notin P$ tenemos $\rho_1 \circ \rho_2^{-1} = id$, $\rho_1 = \rho_2$. Luego, definiendo $G_i(p) = \{q \in S \mid \text{existe } \rho \in G_i, \rho(p) = q\}$, $i$=0,1,2, tenemos, $G_i(p) = \tau^i(G_0(p))$, $i$=1,2 y por (3), $G(p) = G_0(p) + G_1(p) + G_2(p)$ y $\psi(G_0(p)) = G_1(p) + G_2(p)$.

Nótese que $S - P$ es particionado por los $G(p)$, pues todo $q \in S - P$ esta en algún $G(p)$ (en particular $q \in G(q)$) y si $p,q \in S-P$, $G(p) \cap G(q) \neq \phi$ entonces $G(p) = G(q)$.

(En el siguiente paso donde se hace uso del axioma de elección). Luego, existe $\{p_\beta\}_\beta$ tal que $S\text{-}P = \sum_\beta G(p_\beta)$. Definiendo $S_i = \sum_\beta G_i(p_\beta)$, $i = 0,1,2$ tenemos, por (3):

$$S - P = S_0 + S_1 + S_2, \quad S_i = \tau^i(S_0),\ i=1,2,\ \psi(S_0) = S_1 + S_2$$

## 2. Obtención de dos esferas a partir de un

**Teorema 2:** *Sea S una esfera, entonces* $S \cong S + S'$, *donde* $S' \equiv S$

**Nota 2:** La escomposición aquí presentada consiste en siete partes, el mínimo posible es con 4, ver [5].

**2.1 Lema:** **[6]** *Sea $S$ una esfera centrada en el origen, dado $P \subset S$ enumerable, existen $Q$ enumerable y una rotación $\omega$ tal es que $P \subset Q \subset S$ y $\omega(Q) = Q - P$.*

*Demostración:* Como $P$ es enumerable podemos escoger una recta $l$, que pase por el centro de $S$ y que sea disjunta de $P$.

Dados $p,q \in P, n \in \mathbb{N}$ existen a lo más $n$ rotaciones $\rho$, (con eje $l$) tal que $\rho^n(p) = q$, es decir:

$$|\{\rho, \text{ rotación con eje } l \mid P \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n(P) \neq \phi\}| \leq |P \times P \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}|.$$

Y como $P$ y $\mathbb{N}$ son enumerables $P \times P \times N \times N$ también lo es, por lo tanto, $\{\rho$ rotación con eje $l \mid P \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega^n(P)) \neq \phi\}$ es, a lo más, enumerable. Escogiendo una rotación $\omega$ (con eje $l$), que no esté en este conjunto tendremos: $P \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega^n(P)) = \phi$, sea $Q = P \bigcup (\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega^n(P))$, por lo tanto: $\omega(Q) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega^n(P) = Q - P$

**Nota 3:** Una aplicación interesante del lema es que podemos dividir una circunferencia, $C \subset \mathbb{R}^2$, que por simplicidad suponemos centrada en el origen, en tres partes, reordenarlas y obtener $C$ más un punto, como sigue: sea $p \in C$ un punto, $\omega$ una rotación en un ángulo irracional y $Q = \bigcup_{m=0}^{\infty} \omega^m(p)$, entonces $C = (C - Q) + \omega(Q) + p$ y $C = (C - Q) + Q$.

**2.2 Demostración del teorema 2**

Sean: $Q_0 = Q \cap S_0$, $S'_0 = S_0 - Q_0$, $Q_1 = \tau \circ \psi(Q) \cap S_1$, $S'_1 = S_1 - Q_1$, $S'_2 = \tau^2 \circ \psi(S_1)$, $S'_3 = \tau^2 \circ \psi(S_2)$.

Tomando en cuenta que $S - P = S_0 + \psi(S_0)$, tenemos:

- $S'_0 + \psi \circ \tau^2(S'_1) = (S_0 - Q \cap S_0) + (\psi(S_0) - Q \cap \psi(S_0)) = (S_0 + \psi(S_0))$ - - $Q \cap (S_0 + \psi(S_0)) = (S - P) - Q \cap (S - P)$, y como $P \subset Q \subset S$: $S'_0 + \psi \circ \tau^2(S'_1) = S - Q$.

- $Q_0 + \psi \circ \tau^2 (Q_1) = Q \cap S_0 + Q \cap \psi (S_0) = Q \cap (S - P)$, y como $P \subset Q \subset S$ : $Q_0 + \psi \circ \tau^2 (Q_1) = Q - P$, $\omega^{-1} (Q_0) + \omega^{-1} \circ \psi \circ \tau^2 (Q_1) = Q$.

- $S'_2 + S'_3 = \tau^2 \circ \psi (S_1+S_2) = \tau^2 \circ \psi (\psi(S_0)) = \tau^2(S_0) = S_2$, $S'_2 + S'_3 = S_2$.

- $\tau^2 \circ \psi \circ \tau(S'_2) + \psi \circ \tau \circ \psi \circ \tau (S'_3) = \tau^2 \circ \psi \circ \tau (\tau^2 \circ \psi(S_1)) + \psi \circ \tau \circ \psi \circ \tau (\tau^2 \circ \psi (S_2)) =$

$$\tau^2 (S_1) + \psi \circ \tau (S_2) = S_0 + \psi (S_0) = S - P,$$

$$\tau^2 \circ \psi \circ \tau (S'_2 + \psi \circ \tau \circ \psi \circ \tau (S'_3) = S - P.$$

Por lo tanto

i) $S = S'_0 + Q_0 + S'_1 + Q_1 + S'_2 + S'_3 + P$.
ii) $S = \tau^2 \circ \psi \circ \tau (S'_2) + \psi \circ \tau \circ \psi \circ \tau (S'_3) + P$.
iii) $S = S'_0 + \psi \circ \tau^2 (S'_1) + \omega^{-1} (Q_0) + \omega^{-1} \circ \psi \circ \tau^2 (Q_1)$.

Es decir que $S$ es equivalente a dos copias disjuntas de sí mismo.

## 3. Construcción de equivalencias sobreyectivas

**Proposición:** *Existe una equivalencia X y algún conjunto que contiene a Y.*

**Demostración:** Por hipótesis, $X$ tiene interior no vacío, luego existe una bola $B \subset X$, que podemos suponer que no contiene su centro.

Generalizando la descomposición de la esfera usando radios de $B$ en vez de puntos obtenemos, $B \equiv B + B'$, donde $B \cong B'$(ver Nota 4).

Usando repetidamente este hecho, conclufmos que, dado $n$ arbitrario $B$ es equivalente a $n$ copias disjuntas de sí mismo.

Escogiendo $n = k^3$ y sacando a cada una de estas copias un cubo cerrado, menos tres caras (con un mismo vértice en común), todos del mismo tamaño, y uniéndolos (disjuntamente) podemos formar un cubo similar a éstos pero con arista $k$ veces mayor.

Y es acotado, luego podemos escoger $k$ lo suficientemente grande para que el cubo formado cubra a $Y$. Mapeando todo lo que sobró (disjuntamente) en cualquier otro lugar, obtenemos una equivalencia entre $X$ y un conjunto que contiene a $Y$.

**Nota 4:** Haciendo una pequeña modificación de esta demostración podemos (usando el lema) construir una disección de $B$" (la bola $B$ más su centro) en diez partes para formar dos copias de $B$", el mínimo de partes es cinco, ver [5].

## 4. Construcción de la equivalencia entre X e Y

El siguiente paso es la demostración de una variante del teorema Schröder-Berstein, debida a S. Banach, ver [10]

Sea $f: X \rightarrow \mathbb{R}^3$ la equivalencia (como en 3) y $G$: $Y \rightarrow \mathbb{R}^3$ una equivalencia entre $Y$ y algún conjunto que contenga a $X$.

Sea $X_{-1} = g(Y)$, $Y_{-1} = f(X)$ para $n \geq 0$ definimos: $X_{n+1} = f^{-1}(Y_n)$, $Y_{n+1} = g^{-1}(X_n)$, recordamos al lector que por definición de equivalencia tanto $f$ como $g$ son biyectivas.

Nótese que $X_0 = X \subset g(Y) = X_{-1}$, similarmente $Y_0 \subset Y_{-1}$. En general suponiendo que: $X_n \subset X_{n-1}$ y $Y_n \subset Y_{n-1}$ tenemos: $X_{n+1} = g^{-1}(Y_n) \subset g^{-1}(Y_{n-1}) = X_n$, $X_{n+1} \subset X_n$ y similarmente $Y_{n+1} \subset Y_n$. Hemos demostrado:

$$\ldots \subset X_{n+1} \subset X_n \subset \ldots \subset X_0 \text{y} \quad \ldots \subset Y_{n+1} \subset Y_n \subset \ldots \subset Y_0 .$$

Entonces podemos definir:

$$X' = \sum_{m=0}^{\infty} (X_{2m} - X_{2m+1}),\ X'' = \sum_{m=0}^{\infty} (X_{2m+1} - X_{2m+2}),$$

$$Y' = \sum_{m=0}^{\infty} (Y_{2m} - Y_{2m+1}),\ Y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (Y_{2m+1} - Y_{2m+2}).$$

Claramente $f(X'') = Y'$, $g(Y'') = X'$, luego $X'' \cong Y'$ y $Y'' \cong X'$ y como $X = X' + X''$ y $Y = Y' + Y''$ concluímos que: $X \cong Y$.

## Referencias:


[1] S. Banach y A. Tarski, *Sur la décomposition desensembles do points en parties respectivement congruentes*, Fund. Math.6 (1924) 244-277.

[2] K. Stromberg, *The Banach-Tarski Paradox*, Amer. Math. Monthly 86 (1979) 151-161.

[3] J. Czyz', *Paradoxes of measures and dimensiós originating in Felix Hausdorff's ideas,* Utopia Press, Singapore, 1994.

[4] F. Hausdorff, *Grundzügeder Mengenlehre*, Leipzing, 1914.

[5] R. Robertson, *On the decomposition of spheres*, Fund. Math.34 (1947), 246-260.

[6] W. Sierpinski, *Congruence of sets*, Chelesa, New York, 1953.

[7] S. Wagon, *The Banach-Tarski paradox*, Cambrige Univ. Press, 1985.

[8] B. Osofsky, S. Adams, *Amer. Math.* Monthly 85 (1978) 504-505.

[9] J. Mycielski, *The Banach-Tarski paradox for the hyperbolic plane*, Fund. Math. 132 (1989) 143-149.

[10] S. Banach, *Un théorème sur les transformations biunivoques*, Fund. Math. 6 (1924) 236-239.

IMPA, Estrada Dona Castorina 110, Jardim Botanico, RJ-Rio de Janeiro

e-mail: *juan@impa.br*