PRO MATHEMATICA: *Vol. X, Nos. 19-20, 1996*

SEMIGRUPOS DE WEIERSTRASS

Fernando ***Torres***

1. Introducción

En estas notas por una curva entenderemos una algebraica, no singular, proyectiva e irreducible definida sobre un campo K algebraicamente cerrado (por ejemplo, una superficie de Riemann compacta). Sea X una curva y $P \in X$. Entonces existe un semigrupo numérico H(P) (esto es, un subsemigrupo de $(\mathbb{N}, +)$ cuyo complemento es finito) llamado de "semigrupo de Weierstrass en P" del cual se obtiene información sobre la estructura de la curva.

$H(P)$ se define como sigue:

"un número natural $n \in H(P) \Leftrightarrow$ existe una función racional sobre X tal que es regular en $X \setminus \{P\}$ y tiene en P un polo de orden n".

International Centre for Theoretical Pysics
Maths. Group, P.O. Box 586 34100 Trieste - Italy.
feto@ictp.trieste.it

Es trivial el hecho de que $H(P)$ es un subsemigrupo de $(\mathbb{N},+)$. Lo que no lo es, es que $\mathbb{N} \setminus H(P)$ es finito. Esto se sigue del Teorema de Riemann-Roch [F-K, Thm. III 5.3]. De la prueba de este resultado, se sigue que $\#(\mathbb{N} \setminus H(P)) = g =$ el género de X.

Recíprocamente, en 1893 Hurwitz cuestionó la situación anterior para el caso en que el cuerpo K es de característica cero. Explícitamente, preguntó si dado un semigrupo numérico H existe una curva X tal que para algún punto $P \in X$, $H(P) = H$. Si este es el caso, diremos que H es un "semigrupo de Weierstrass". Después de varias respuestas equivocadas (ver [E-H] para más detalles históricos), solo en 1980 Buchweitz [B1] construyó un semigrupo numérico que no es de Weierstrass. Su construcción está basada en una condición necesaria que el dedujo usando múltiplos del divisor canónico. Sin embargo –como fue observado por Oliveira [O, Thm. 1.5] y Oliveira-Stöhr [O-S]– el método de Buchweitz no se aplica a los semigrupos numéricos llamados simétricos y cuasi-simétricos. Usando un resultado de [T], en 1993 Stöhr construyó semigrupos simétricos que no son de Weierstrass, y en 1994 Oliveira y Stöhr construyeron semigrupos cuasi-simétricos que no son de Weierstrass. Para esto último usaron los resultados de [T1]. Sin embargo hasta hoy es un problema abierto el conocimiento de condiciones suficientes para que un semigrupo numérico sea de Weierstrass. Con todo, tenemos los siguientes resultados parciales:

1.1 Un semigrupo numérico es de Weierstrass si su primer término no negativo es a lo más cinco ([K], [M], [Ko1], [Ko2]).

1.2 Un semigrupo numérico es de Weierstrass si su peso es a lo más la mitad del género ([E-H]).

1.3 Un semigrupo numérico es de Weierstrass si sus generadores satisfacen ciertas restricciones ([P], [R-V], [W], [Kn]).

Aquí, presentaré los resultados obtenidos de [T] y [T1]. En la sección 2 expongo hechos básicos de semigrupos numéricos y la sección 3 es en si lo esencial de las notas.

Finalmente, remarco que por la construcción de Buchweitz tiene sentido hablar o distinguirse entre las propiedades "aritméticas" y "geométricas" de semigrupos numéricos, siendo estas últimas las que dependen del hecho de ser, el semigrupo, un semigrupo de Weierstrass.

2. Propiedades Aritméticas de semigrupos numéricos

Sea H un semigrupo numérico. De ahora en adelante hablaremos simplemente de semigrupo. El número $g = g(H) = \#(\mathbb{N} \setminus H)$ se llama el 'género" de H (justificado por lo que se dijo en la introducción). Los casos $g \in \{0,1\}$ son triviales: $g = 0 \Rightarrow H = \mathbb{N}$ y $g = 1 \Rightarrow H = \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Luego consideramos $g \geq 2$ en todo lo que sigue. Los elementos positivos de H serán llamados de "no-lagunas" y $m_i = m_i(H)$ denotará la i-ésima no-laguna". m_1 se llama la "multiplicidad" de H y el número

$$w = w(H) := \sum_{i=1}^{g} (l_i - i)$$

es llamado el "peso" de H, donde

$$G = G(H) = \{l_1 = l_1(H) < \ldots < \lg = \lg(H)\}$$

es el complemento de H y a cuyos elementos se les llama "lagunas". Si $m_1 = 2$, H se llama "hiperelíptico" (justificación: ver la próxima sección) y caso contrario H se llama no-hiperelíptico. El siguiente lema establece una restricción para las lagunas ó no-lagunas que son consecuencias de la propiedad de semigrupo de H.

Lema 2.1 ([*B*]) *Sea H un semigrupo numérico de género g. Entonces:*
(a) *H es hiperelíptico* $\Leftrightarrow m_i = 2i$ *para* $i = 1,\ldots,g$.
(b) *H es no-hiperelíptico* $\Leftrightarrow m_i \geq 2i+1$ *para* $i = 1,\ldots,g\text{-}2$, $m_{g-1} \geq 2g\text{-}2$ y $m_g = 2_g$

Se sigue de este lema que $l_g \leq 2g\text{-}1$. Cuando se cumple la igualdad H se dice "simétrico". Esto se justifica porque "H es simétrico $\Leftrightarrow$ ($n \in H \Leftrightarrow 2g\text{-}1 - n \notin H$)" (Prueba: ejercicio para el lector). Asímismo, H se llama "cuasi-simétrico" si $l_g = 2g\text{-}2$. En este caso tenemos una propiedad similar al caso simétrico a saber: "Si $n \in \mathbb{N}$, $n \neq g\text{-}1$ entonces: $n \in H \Leftrightarrow 2g\text{-}2\text{-}n \notin H$" (Prueba: ejercicio o ver [O, Prop. 1.2]). Otra consecuencia del Lema 2.1 es que el peso w de H puede escribirse como

$$w = (3g^2 + g)/2 - \sum_{i=1}^{g} m_i \,.$$

En efecto, basta observar que $\sum_{i=1}^{g} l_i + \sum_{i=1}^{g} m_i = \sum_{i=1}^{2g} i$. Ahora estudiaremos ciertos elementos "distinguidos" (¿por qué los " " ?) y una fórmula para el género. Fije una no-laguna $m \in H$. Para $j = 1,...,m-1$ sea $s_j = s_j(H,m)$ el menor elemento de H tal que $s_j \equiv j$ (mod m) y luego defina $e_j = e_j(H,m)$ por

$$s_j = me_j + j.$$

Lema 2.2 *Los números e_j definidos arriba satisfacen*

$$e_i + e_j \geq e_{i+j} \qquad \text{si} \quad i+j < m,$$

$$e_i + e_j \geq e_{i+j-m} - 1 \quad \text{si} \quad i+j > m.$$

Además $g = \sum_{j=1}^{m-1} e_j$.

Prueba. Para las desigualdades envolviendo e_i's observe que $s_i + s_i \geq s_{i+j}$ si $i+j < m$ y que $s_i + s_j \geq s_{i+j-m}$ si $i+j > m$. De esto se siguen estas desigualdades. Para la fórmula del género, observe que $\{s_j + im : i \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ y que

$$mi + j \notin H$$

para todo $j = 1,...,m-1$, para todo $i \leq e_j - 1$. Luego las lagunas de H l tal que $l \equiv j (\text{mod } m)$ son $\{mi + j : i = 0,...,e_j - 1\}$ y sigue la prueba.

Ahora podemos establecer un resultado que tiene importantes consecuencias geométricas.

Lema 2.3 ([T1, Lemma 2.1]) *Sea H un semigrupo numérico de género g, $N \geq 2$ un entero y γ el número de lagunas l para los cuales $l \equiv 0$ (mod. N). Si $h \in H$ tal que mcd $(h,N) = 1$, entonces*

$$h \geq \frac{2g - 2N\gamma}{N-1} + 1.$$

Resultados geométricos, envolviendo el peso de un semigrupo, puede verse en [E-H] y [T]. A continuación solo estudiamos resultados envolviendo el 'tipo" de semigrupo.

3. Propiedades geométricas de semigrupos numéricos

Sea H un semigrupo (numérico). Entenderemos por una propiedad geométrica de H aquella que se obtenga por el hecho de ser H de Weierstrass, esto es, cuando existe una curva X, $P \in X$ tal que $H(P) = H$. Denotamos por $G(P)$ a las lagunas de $H(P)$.

3.1 Método de Buchweitz ([B1]) Este método sirve para construir semigrupos numéricos que no son de Weierstrass. Está basado en la siguiente caracterización de las lagunas de un semigrupo de Weierstrass.

Lema 3.1.1 *Sea X una curva, $P \in X$ y $u \in \mathbb{Z}^+$. Luego, $l \in G(P) \Leftrightarrow$ existe una diferencial holomorfa φ sobre X tal que* $\mathrm{ord}_P\, \varphi = u-1$.

Prueba. Usaremos la notación aditiva del problema de Riemann-Roch y los resultados de [F-K, III.5]. Sea $\mu \in \mathbb{N}$. Por definición $\mu \in H(P) \Leftrightarrow \exists f \in K(X)$ tal que $div_\infty(f) = \mu\, P$. Esto es lo mismo que $l(\mu\, P) - l((\mu - 1)P) = 1$. Como $l(\mu\, P) - l((\mu - 1)P) \leq 1$, tenemos que $\mu \in G(P) \Leftrightarrow l(\mu P) = l((\mu-1)\, P)$. Luego, por Riemann-Roch tenemos que $i(\mu-1)P = i(\mu_P)+1$. Esto último significa que existe un diferencial holomorfo φ cuyo orden en P es μ - 1.

Ahora, si μ y $u' \in G(P)$ entonces $u+u' = \mathrm{ord}_P(\varphi\varphi') = \mathrm{ord}_P\, \varphi + \mathrm{ord}_P\, \varphi'$ donde φ y φ' son dadas por el lema anterior. La diferencial "biholomorfa" $\varphi\varphi'$ está asociada a un divisor "2-canónico" ya que φ y φ' lo están a divisores "canónicos" de la curva. Ahora, es fácil ver que usando propiedades de valoraciones (ya que ord_P lo es) se cumple que si $\varphi_1\varphi_1', \ldots, \varphi_k\varphi_k'$ son diferenciales biholomorfos con $\mathrm{ord}_P\, \varphi_i\varphi_i' \neq \mathrm{ord}_P\, \varphi_j\varphi_j'$ para $i \neq j$ entonces $\varphi_1\varphi_1', \ldots, \varphi_k\, \varphi_k'$ son K-linealmente independientes. Esto significa que:

$$\#\{u+u' : u, u' \in G(P)\} \leq \dim_K\, L(2C)$$

donde $L(2C)$ es el espacio de las diferenciales biholomórficas con C un divisor canónico. Como la dimensión de este último espacio puede ser calculada usando (¡una vez más!) Riemann-Roch, generalizando lo anterior para $n \geq 2$, tenemos:

Lema 3.1.2 ([B1]) *Sea X una curva, $P \in X$, $n \geq 2$ y sea $\mathbb{L}(n) = \mathbb{L}(n,P)$ el conjunto obtenido al sumar n lagunas de $H(P)$. Entonces*

$$\#\mathbb{L}(n) \leq (2n-1)(g-1).$$

Prueba. Como en el caso $n = 2$, obtenemos

$$\#\mathbb{L}(n) \leq \dim_k L(nC).$$

Por Riemann-Roch este último es

$$(2g - 2)\, n + 1 - g$$

de donde sigue la prueba.

Luego, este último lema establece el método de Buchweitz quien, después de casi 90 años, presentó el siguiente semigrupo que no es de Weierstrass.

Lema 3.1.3 (Semigrupo de Buchweitz, [B1]). *El semigrupo numérico H de género $g = 16$,*

$$H = \{0, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 22, 23, 26\ 27, \ldots\}$$

no es de Weierstrass.

Prueba. Es sorprendentemente simple pues se aplica el caso $n = 2$ del Lema 3.2 para probar que

$$\#\, \mathbb{L}(2) > 3(g - 1).$$

Más aún, Buchweitz, probó para cada $n \geq 2$ existe un semigrupo numérico que satisface el Lema 3.1.2 para n-1, pero no lo hace para n. En particular, esto implica que existen infinitos semigrupos numéricos que no son de Weierstrass. Daremos otra prueba en la Observación 3.2.5

Ahora, observe que el Lema 3.1.2 no da información cuando

$$\#\, \mathbb{L}(n) \leq (2n\text{-}1)(g\text{-}1).$$

De hecho, Oliveira [Thm.1.5] probó que un semigrupo numérico H es simétrico si y sólo si, $\#\ \mathbb{L}(n) = (2n\text{-}1)(g\text{-}1)$ para todo $n \geq 2$. También, él y Stöhr [S-O, 01] probaron que si un semigrupo H es cuasi-simétrico, entonces

$$\#\, \mathbb{L}(n) = (2n\text{-}1)(g\text{-}1) - (n\text{-}2).$$

En consecuencia, el problema de la existencia (o no) de un semigrupo simétrico que no sea de Weierstrass, permaneció abierto hasta junio de 1993.

3.2 Semigrupos simétricos

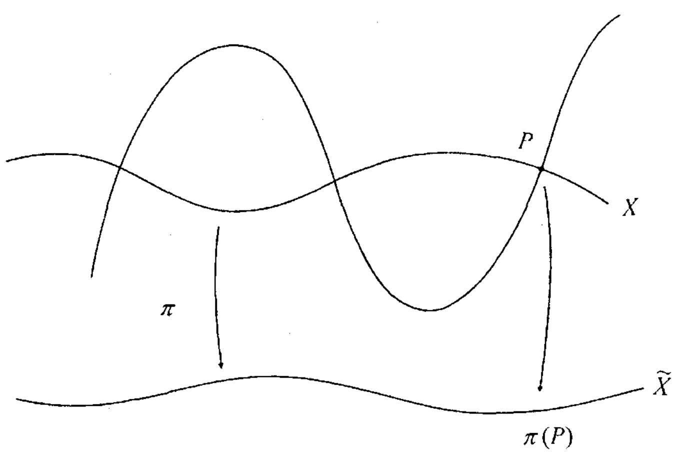
Aquí expondremos la construcción de Stöhr de semigrupos simétricos que no son de Weierstrass. Está basado en un resultado de [T]. En este artículo se estudió recubrimientos dobles de curvas. Explícitamente, consideremos un recubrimiento doble

$$\pi : X \to \tilde{X}$$

de curvas de géneros g y γ, respectivamente. A modo de terminología, X es llamado de una curva γ-hiperelíptica (aquí O-hiperelíptica es el caso clásico de las curvas hiperelípticas). Asociado a π tenemos una involución (involución γ- hiperelíptica) J_γ, definida por

$$ord(J_\gamma) = 2, \quad v(J_\gamma) = 2g - 4\gamma + 2,$$

siendo este último el número de sus puntos fijos. Si $g > 4\gamma + 1$ se prueba que $J\gamma$ es única [F-K, V.1.9] y luego $\tilde{X} = X / < J_\gamma >$ donde este último es la curva cociente de X por el grupo de automorfismos $\{I, J\gamma\}$ (I = identidad). Esquemáticamente, los cubrimientos dobles pueden verse en la siguiente figura



Aquí, P es un punto totalmente ramificado (o un punto fijo de J_γ) de π. Sea P un punto tal (en símbolos: $P \in Fix(J_\gamma)$). Primero estableceremos una relación entre los semigrupos de Weierstrass de P y $\pi(P)$. Sea $\tilde{m} \in H(\pi(P))$.

Por definición existe $\tilde{f} \in K(\tilde{X})$, cuyo divisor de polos es $\tilde{m}\pi(P)$. Luego, $\tilde{f} \circ \pi \in K(X)$. Siendo P totalmente ramificado (esta observación es esencial para generalizar este método en el caso de recubrimientos de grado $N \geq 2$), entonces P es el único polo de $\tilde{f} \circ \tilde{h}$ de orden $2\tilde{m}$ y luego por definición $2\tilde{m} \in H(P)$. En particular, si consideramos las primeras γ no-lagunas en $H(P)$ $\tilde{m}_1, \ldots, \tilde{m}_\gamma = 2\gamma$ y $2\gamma + 1 \in H(P)$ (ver Lema 2.1), tenemos que

$$H(P) \supseteq \{2\tilde{m}_1, \ldots, 2\tilde{m}_\gamma = 4\gamma, 4\gamma + 2\}.$$

Este es el punto de partida para la axiomatización del tipo de semigrupos numéricos que sirven para caracterizar cubrimientos dobles. Asi tenemos la siguiente definición ([T]).

Definición 3.2.1 *Un semigrupo numérico H se dirá γ - hiperlíptico si satisface lo siguiente:*

(γ 1) *H tiene γ no-lagunas pares en* $[2, 4\gamma]$,

(γ 2) $4\gamma + 2 \in H$.

Observe que un semigrupo O-hiperelíptico no es otra cosa que un semigrupo hiperelíptico definido en la Sección 2. Note, también, que el semigrupo $H(P)$ anterior de hecho contiene a $\{4\gamma+2i \colon i \in \mathbb{N}\}$ $m \in J$, esto será una consecuencia de (γ 1) y (γ 2).

Lema.3.22 [T, Lemma 2.6)] *Si H es un semigrupo γ-hiperelíptico, entonces*

$$H \supseteq \{4\gamma + 2i : i \in \mathbb{N}\}.$$

Prueba. Supongamos que $H \not\supseteq F := \{4\gamma + 2i : i \in \mathbb{N}\}$ y sea $4\gamma + 2i = mín(G(H) \cap F)$. Sean $f_1 < \ldots < f_\gamma$ las γ no-lagunas de H en $[2, 4\gamma]$. Luego, $4\gamma + 2i - f_j$ para $j = 1, \ldots, \gamma$ son las γ lagunas de H en $[2, 4\gamma]$. Aquí se usa la propiedad de semigrupo de H. En particular, siendo $\gamma \geq 1$, $4\gamma + 2i - f_\gamma$ es la menor laguna por 0. Sea $4\gamma + 2i - f_\gamma = 2$. Ahora, usando nuevamente la propiedad de semigrupo de H, se prueba que $f_\gamma = 4_\gamma$ de donde $i = 1$, lo cual es una contradicción porque $4\gamma + 2 \in H$.

Teorema 3.2.3 [T, Thm.A] *Sea X una curva de género $g \geq 6\gamma + 4$. Entonces son equivalentes:*

(i) *X es γ-hiperelíptica,*

(ii) $\exists\, P \in X$ tal que $H(P)$ *es γ- hiperelíptico.*

Prueba (Esbozo).
(i) $\Rightarrow$ (ii) Por lo visto, al inicio de esta sección, cualquier $P \in J_\gamma$ es tal que $H(P)$ es γ-hiperelíptico.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Usando el Lema 2.3 (con $N = 2$) y el lema anterior, y la hipótesis $g \geq 5\gamma+2$, obtenemos que $m_{2\gamma+1} = 6\gamma+2$. De aquí obtenemos un morfismo:

$$\pi: X \to \mathbb{P}^{2\gamma+1}(K)$$

de grado $6\gamma+2$. Ahora, usando un resultado de Castelnuovo ([ACGH, Lemma p.116]), obtenemos que

$$\pi : X \to \tilde{X}$$

donde $\tilde{X}$ es la normalización de $\pi(X)$ es un recubrimiento doble o que X es γ -hiperelíptico.

Remarcamos que $g \geq 6\gamma+4$ se usa para el lema de Castelnuovo. A partir de la prueba de este resultado, obtenemos los ejemplos de Stöhr:

Lema 3.2.4 *Si $\tilde{H}$ es un semigrupo no realizable como semigrupo de Weierstrass (e.g. $\tilde{H}$ el semigrupo de Buchweitz), entonces el siguiente conjunto:*

$$H := \{2h : h \in \tilde{H}\} \cup \{2g-1-l : l/2 \notin \tilde{H}\}$$

donde g es un entero tal que $g \geq 6\gamma + 4$, siendo γ el género de $\tilde{H}$, satisface:

(a) *H es γ-hiperelíptico y simétrico*
(b) *H no es de Weierstrass.*

Observación 3.2.5 Si $\tilde{H}$ es como en el lema anterior, entonces

$$H := \{2h : h \in \tilde{H}\} \cup \{2g-(2i-1) : i \leq \gamma\} \quad \text{con } g \geq 6\gamma+4$$

no es realizable. Como vale para todo γ, obtenemos infinitos semigrupos que no son de Weierstrass.

3.3 Semigrupos cuasi-simétricos

Aquí estudiaremos cubrimientos de grado $N \geq 2$ con N primo, y generalizamos el Teorema anterior y los ejemplos de Stöhr. Empezamos por observar que el método de 3.2 no se aplica a los cuasi-simétricos porque $2g$-2 es laguna en éstos. Con la misma filosofía del inicio de la sección anterior, introducimos las siguientes definiciones:

Definición 3.3.1 *Una curva X es de tipo* (N,γ) *si es un cubrimiento de grado N de una curva de género* γ *con, al menos, un punto totalmente ramificado.*

Definición 3.3.2 *Un semigrupo numérico H se dice de tipo* (N,γ) *si se satisface:*

(i) *H tiene* γ *no-lagunas múltiplos de N en* $[N,2N\gamma]$
(ii) $(2\gamma+1)N\in H$

Ahora es fácil ver qué curvas o semigrupos de tipo $(2,\gamma)$ son los objetos que estudiamos en la sección 3.2. Resultados similares a los de semigrupos en 3.2, se obtienen para $N\geq 2$ (ver [T1]) y, en particular.

Teorema 3.3.3 [T1,Thm.A] *Sea N un número primo,* γ *un entero no negativo, tal que* $N\gamma+\gamma+1\not\equiv 0$ *(mod. t) para* $2\leq t\leq N-1$ *y* $mcd(t,N+1)=1$. *Son equivalentes:*

(i) *X es una curva de tipo* (N,γ).
(ii) $\exists P\in X$ *tal que H(P) es de tipo* (N,γ), *siempre que*

$$g\geq\begin{cases}\dfrac{(N-1)(N-2)}{2}+1 & \text{si} \quad \gamma=0\\ \dfrac{N^2(N+1)}{2}\gamma+N^2 & \text{si} \quad \gamma\geq 1\end{cases}$$

Aquí se observa que las restricciones aritméticas se satisfacen para $\gamma=0$ ó $N\in\{2,3,5\}$. Estas restricciones son usadas para garantizar que el respec-tivo morfismo (como la prueba anterior) sea de grado N. Así, el análogo del Lema 3.2.4 es el Lema 3.3.4 ([O1], [O-S]). Sea $\tilde{H}=\{0<\tilde{m}_1<\tilde{m}_2<\ldots\}$ un semigrupo no realizable de género γ y g un entero tal que $g\not\equiv 1$ (mod 3), $g\geqq 18\gamma+9$. Entonces el conjunto

$$H:=A\cup\{3h\colon h\in\tilde{H}\}\cup\{2g-2-3t\colon t\in\mathbb{Z}\setminus\tilde{H}\}$$

donde

$$A=\begin{cases}\{2g-1-3t\colon t\in\mathbb{Z}\setminus\{\tilde{m}_j\colon j\geq k-\gamma\}, & \text{si} \quad g=3k\\ \{2g-3t\colon \quad t\in\mathbb{Z}\setminus\{\tilde{m}_j\colon j\geq k+1-\gamma\}, & \text{si} \quad g=3k+2,\end{cases}$$

satisface

(i) H es un semigrupo de tipo $(3,\gamma)$
(ii) H no es semigrupo de Weierstrass.

Referencias

[ACGH] *Abanello, E.; Cornalba, M.; Griffiths, P.A. and Harris, J.:* Geometry of algebraic curves. Vol. I, Springer-Verlag, New York (1985).

[B] *Buchweitz, R..O. :* Über deformationem monomialer kurven-singularitäten und Weierstrasspunkte auf Riemannschen flächen. Thesis, Hannover (1976).

[B1] *Buchweitz, R.O. :* On Zariski's criterion for equisingularity and non-smoothable monomial curves. Thése, Paris VII (1981).

[E-H] *Eisenbud, D; Harris, J. :* Existence, decomposition and limits of certain Weierstrass points. Invent. Math., 87, 495-515 (1987).

[F-K] *Farkas, H.M.; Kra, I. :* Riemann surfaces. 2nd. edition, Springer-Verlag, New York (1992).

[K] *Kato, T. :* On Weierstrass points whose first non-gaps are three, J. serie angew. Math. 316, 99-109 (1980).

[Kn] *Knebl, H. :* Ebene algebraische Kurven von Type p.q. Manuscripta Math., 49, 165-175 (1984)

[Ko1] *Komeda, J. :* On Weierstrass points whose first non-gaps are four. J. seire angew. Math. 341, 68-86 (1983).

[Ko2] *Komeda, J. :* On the existence of Wierstrass points whose first non-gaps are five. Manuscripta Math. 76, 193-211 (1992).

[M] *Maclachlan, C. :* Weierstrass points on compact Riemann surfaces. J. London Math. Soc. (2), 3, 722-724 (1971).

[O] *Oliveira, G. :* Weierstrass semigroups and the canonical ideal of non-trigonal curves. Manuscripta Math. 71, 431-450 (1991).

[O1] *Oliveira, G. :* Sobre a realização de semigrupos numéricos como semigrupos de Weierstrass. Conferencia en la "Escola de Algebra" de Brasil (1994).

[O-S] *Oliveira, G. ; Stöhr, K.O. :* Gorenstein curves with quasi-symmetric Weierstrass semigroups, Preprint (1994).

[P] *Pinkham, H. :* Deformations of algebraic varieties with G_m action. Asterisque 20, Soc. Math. France (1974).

[R-V] *Rim, D.; Vitulli, M. :* Weierstrass points and monomial curves. J. of Algebra 48, 454-476 (1977).

[T] *Torres, F. :*Weierstrass points and double coverings of curves with application ... Manuscripta Math. 83, 39-58 (1994).

[T1] *Torres, F. :* On certain N-sheeted coverings of curves and symmetric numerical semigroups which cannot be realized as Weierstrass Semigroups. Alg. geom. e-prints 9407012 (1994).

[W] *Waldi, R. :* Äquivariante Deformation monomialer Kurven. Regensburger Math. Schriften 4 (1980).

Postdata: El teorema 3.3.3 fue mejorado en la versión final de [T1] que apareció en *Comm. Algebra, 1995.*

feto@ictp.trieste.it