

APLICACIONES DE LAS ONDALETES A LA FISICA

David Thompson

*Examinaremos algunas de las aplicaciones de las ondaletes
a la Física,
en particular: al procesamiento de señales;
a la comprensión de datos;
y al grupo de renormalización en la teoría de transiciones
de fase.*

1. Introducción.

Dada una función cualquiera $f(x)$, es siempre posible desarrollarla en términos de un conjunto completo de funciones $\psi_n(x)$

$$f(x) = \sum_n c_n \psi_n(x). \quad (1.1)$$

El ejemplo más familiar de este proceso es el análisis de Fourier, donde las funciones de base son los exponenciales complejos

$$\psi_n(x) = \exp[in kx], \quad (1.2)$$

donde k es $2\pi/L$ con L la duración de la función o su período, si la función es periódica. Sin embargo, las exponenciales complejas no son las únicas funciones de base que podemos utilizar. En realidad, existe una infinidad de conjuntos de los cuales solamente unos pocos tienen propiedades interesantes.

El análisis de Fourier o su generalización, la transformada de Fourier

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \exp[-ikx] dk, \quad (1.3)$$

permite dos descripciones equivalentes de una función; podemos expresarla en el espacio directo como la función $f(x)$, o en el espacio recíproco como la función $\hat{f}(k)$. Las descripciones son equivalentes porque contienen exactamente la misma información. Si tenemos la función $\hat{f}(k)$, la ec. (1.3) permite reconstruir la función $f(x)$. La invertibilidad de la transformada de Fourier

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[ikx] dx \quad (1.4)$$

también permite el cálculo de $\hat{f}(k)$ a partir de $f(x)$.

Si tenemos una función $f(x)$ que está localizada en el espacio directo, como la función delta de Dirac, por ejemplo

$$f(x) = \delta(x - x_0), \quad (1.4)$$

la transformada de Fourier está completamente deslocalizada en el espacio recíproco

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \exp[ikx] dx = \frac{\exp[ikx_0]}{2\pi}. \quad (1.5)$$

Es decir, la magnitud de $\hat{f}(k)$ tiene el mismo valor, independientemente del valor de k .

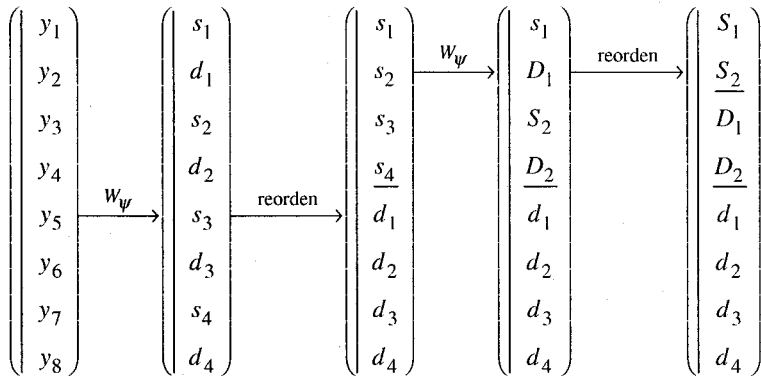


Figura 1.1: La transformada ondalette en un análisis multiresolución. Los s y S son las componentes suaves a cada nivel, y los d y D las componentes detallados.

El efecto de la primera fila es formar un medio ponderado de los cuatro primeros elementos de datos. En otras palabras, suaviza los datos. La segunda fila hace lo opuesto cuando se puede escoger los coeficientes c de tal forma que el resultado sea cero si los datos son suficientemente suaves. Por lo tanto, saca los detalles de los datos que son evidentes sobre una escala de cuatro puntos. La transformada ondalette continúa con un reordenamiento de los datos, agrupando los componentes suaves por separado. (ver la fig. 1.1). Aplicando de nuevo la matriz W_ψ solamente a las componentes suaves se produce componentes suaves y componentes con detalles sobre la escala $4^2 = 16$ puntos de los datos originales. El proceso continúa hasta que quedan sólo dos componentes suavísimos. Lo que hemos descrito es un análisis multiresolución. No solamente obtenemos información sobre las frecuencias presentes en los datos, sino también, cuándo o dónde están presentes.

Para determinar los coeficientes c en la matriz W_ψ , imponemos el requisito de que W_ψ sea ortogonal a fin de facilitar la inversión de la transformada. Esto da dos ecuaciones

$$c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \quad (1.9)$$

y

$$c_2 c_0 + c_3 c_1 = 0. \quad (1.10)$$

Si, además requerimos que las componentes detalladas sean cero cuando los cuatro datos formen una recta, obtenemos dos ecuaciones más

$$c_3 c_2 + c_1 c_0 = 0. \quad (1.11)$$

y

$$-c_2 + 2c_1 - 3c_0 = 0. \quad (1.12)$$

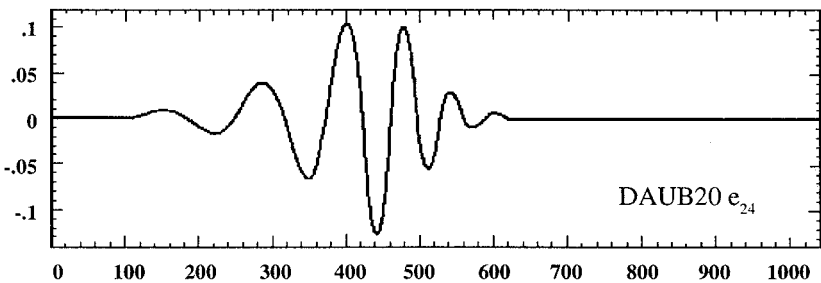
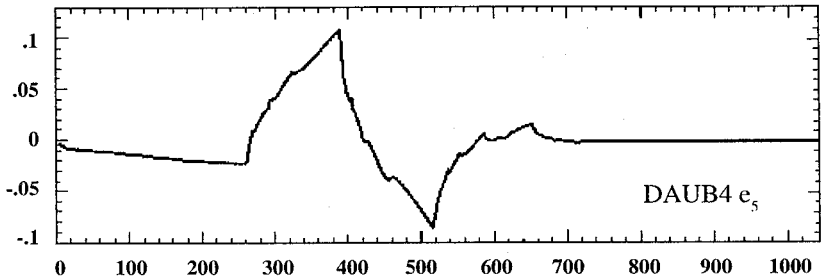


Figura 1.2: Arriba: la transformada ondalette inversa de e_5 con cuatro coeficientes.
Debajo: la transformada inversa de e_{24} con 20 coeficientes.

Las soluciones de las ecuaciones (1.9-12) son:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= (1 + \sqrt{3}) / 4\sqrt{2} \\
 c_1 &= (3 + \sqrt{3}) / 4\sqrt{2} \\
 c_2 &= (3 - \sqrt{3}) / 4\sqrt{2} \\
 c_3 &= (1 - \sqrt{3}) / 4\sqrt{2}.
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

En la fig. 1.2 mostramos la transformada inversa de dos vectores unitarios de longitud 1024; es decir, \hat{e}_5 , que está en el espacio recíproco, y tiene ceros para todas las componentes, salvo el quinto que es uno. También se ve una ondaleta que tiene 20 coeficientes en la matriz W_Ψ .

2. Procesamiento de señales

La frase “procesamiento de señales” produce una respuesta Pavloviana en la mayoría de físicos; “Transformada de Fourier”. Las razones son dos: muchas veces la transformada de Fourier de una señal es en sí misma, una magnitud de significancia física; y existe un método computacional muy eficiente -la transformada rápida de Fourier (FFT. del inglés “Fast Fourier Transform”)- para calcular la transformada de Fourier de un conjunto de datos. Si captamos los datos en el dominio del tiempo $f(t)$, la transformada de Fourier

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i\omega t] dt
 \tag{2.1}$$

está en el dominio de frecuencia $\hat{f}(\omega)$. Generalmente, aun si la función $f(t)$ fuera real, la transformada $\hat{f}(\omega)$ es compleja, pero $|\hat{f}(\omega_0)|^2 d\omega$ es la potencia de la señal entre las frecuencias ω_0 y $\omega_0 + d\omega$.

La invertibilidad de la transformada de Fourier es importante. De la transformada podemos recuperar la señal original por

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp[i\omega t] d\omega.
 \tag{2.2}$$

La invertibilidad de la transformada de Fourier nos permite manejar los datos en el dominio que más conviene. Por ejemplo, si queremos eliminar de una señal en el dominio del tiempo el ruido a bajas frecuencias -el ruido $1/f$ - lo

más fácil es hacer la transformada de Fourier y en $\hat{f}(\omega)$ poner igual a cero la parte que corresponde a frecuencias menores en magnitud que el valor crítico que nos interesa. Cuando invertimos la transformada, la señal modificada en el dominio del tiempo será más o menos horizontal, solamente con oscilaciones alrededor del valor medio. La fig. 2.1 presenta la idea.

Puede parecer que la transformada de Fourier tenga varios problemas para su aplicación a datos reales. La función $f(t)$ en la ec. (2.1) es continua, mientras que en la mayoría de casos los datos reales, al menos una vez captados en la computadora, son discretos. Además, la integral es sobre todo el tiempo, pasado y futuro, y un conjunto de datos es siempre finito. Sin embargo, la transformada de Fourier es de gran utilidad para conjuntos de datos discretos y finitos.

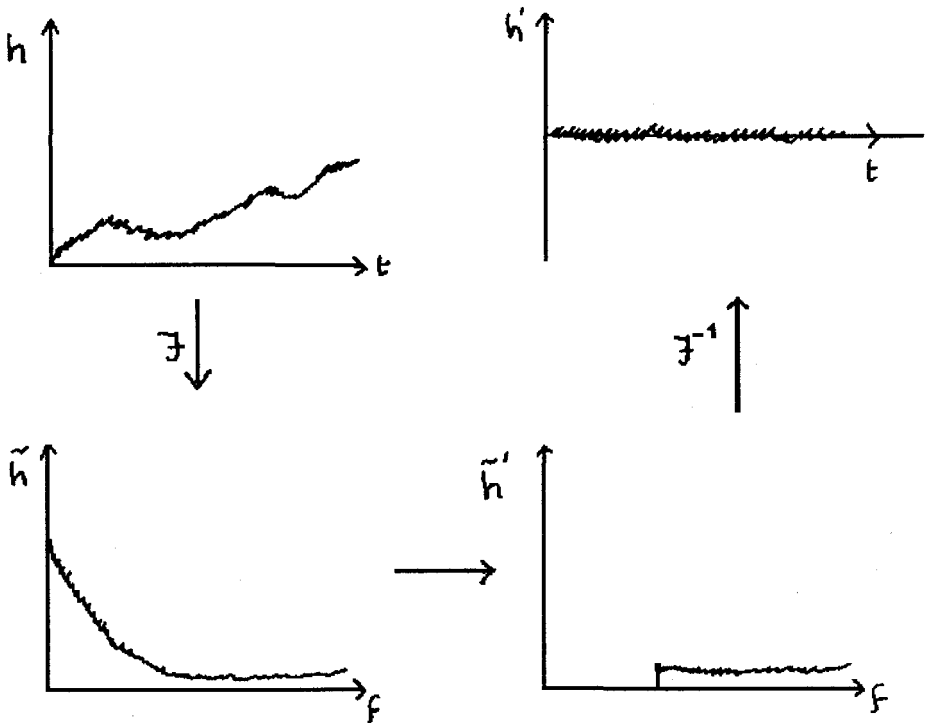


Figura 2.1: El uso de la transformada de Fourier en un filtro que pasa las altas frecuencias.

Esencialmente, la FFT trata un juego de datos finitos como un periodo de una función infinita en duración y calcula el valor de la transformada $\hat{f}(\omega)$ en N valores uniformemente separados de ω , donde N es el número de datos discretos en $f(t)$. Desde el punto de vista práctico, existen ciertas sutilezas asociadas con discontinuidades en la función ficticia que es periódica e infinita en duración, y la naturaleza discreta de los datos que es el problema de la frecuencia de Nyquist. (Ver el libro por Press *et al.*)

A pesar de estos problemas, la transformada de Fourier es una herramienta increíblemente útil y es sin duda la primera a probar en el procesamiento de una señal. Sin embargo, la transformada de Fourier no es apropiada para ciertas clases de problemas. Si la señal que captamos es solamente una muestra finita de algo que es en realidad infinito en duración, tenemos que suponer que la muestra es típica del fenómeno. Cuando calculamos la transformada de Fourier, el valor $\hat{f}(\omega_0)$ es un promedio de la contribución de la frecuencia ω_0 durante la duración de la muestra. Pero existe una infinidad de posibilidades de producir el valor $\hat{f}(\omega_0)$; puede ser que esta componente esté presente todo el tiempo con el coeficiente $\hat{f}(\omega_0)$, o que esté presente solamente la mitad del tiempo, pero con dos veces la amplitud, etc. La transformada de Fourier no es capaz de identificar ni coeficientes ni frecuencias que cambien en el tiempo.

Tal vez queremos analizar la señal en el plano $t-\omega$ para identificar en qué tiempo las frecuencias presentes son importantes. En principio, se puede dividir la muestra en pedacitos y transformar cada pedacito por separado, pero esto amplía los problemas prácticos asociados con la duración finita y la naturaleza discreta de la muestra. La solución es la transformada de ondaletes porque la función transformada está localizada a la vez en el tiempo y en la frecuencia y no trae efectos de contorno problemáticos. Si definimos la transformada de ondalette por

$$(W_{\psi} f)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* [(t-b)/a] f(t) dt. \quad (2.3)$$

$(W_{\psi} f)(a, b)$ está dominada por los valores de $f(t)$ en el rango (ver Chui, cap.1)

$$b + at_0 - a\Delta_{\psi} < t < b + at_0 + a\Delta_{\psi} \quad (2.4)$$

donde t_0 es el centro de la ondaleta $\psi(t)$

$$t_0 = \frac{1}{|\psi|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |\psi(t)|^2 dt \quad (2.5)$$

y Δ_ψ es la anchura

$$\Delta_\psi^2 = \frac{1}{|\psi|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (t-t_0)^2 |\psi(t)|^2 dt. \quad (2.6)$$

Si la función $\hat{\psi}(\omega)$ es la transformada de Fourier de la ondaleta $\psi(t)$, es también una ondaleta, centrada en ω_0 y con una anchura $\Delta_{\hat{\psi}}$. Con la definición $\eta(\omega) = \hat{\psi}(\omega + \omega_0)$ y la identidad de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^*(t) f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \hat{g}^*(\omega) \hat{f}(\omega) d\omega, \quad (2.7)$$

podemos escribir

$$(W_\psi f)(b, a) = \sqrt{\frac{|a|}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp[ib\omega] \eta^*(a\omega - \omega_0) d\omega \quad (2.8)$$

que está dominado por las frecuencias

$$(\omega_0 - \Delta_{\hat{\psi}}) / a < \omega < (\omega_0 + \Delta_{\hat{\psi}}) / a. \quad (2.9)$$

Es decir, la función $W_\psi f$ está localizada en el plano $t - \omega$.

La transformada de Gabor también está localizada en el plano $t - \omega$, pero la transformada ondaleta tiene ventajas, siendo la más importante de ellas el grado de localización que no es una constante en el plano $t - \omega$. Para altas frecuencias la anchura de la ventana en el tiempo es pequeña, mientras que se abre para bajas frecuencias; exactamente el comportamiento que se necesita para maximizar la precisión del cálculo.

3. La compresión de datos

Para tratar imágenes como fotos con la computadora, estamos obligados a digitalizarlos; dividimos la imagen por medio de una red donde cada malla de la red se llama un *pixel*. Para una foto en blanco y negro representamos todo el contenido de información de un pixel por un solo número que representa el nivel de gris del pixel. Para un foto de color cada pixel genera tres números, uno para cada uno de los colores primarios. Cuando buscamos recrear la imagen desde su forma digitalizada, la calidad dependerá del número de pixeles utilizados y el número de niveles de gris permitidos. Para una imagen de alta calidad, la cantidad de información en la forma digitalizada es enorme. Pero la digitalización de imágenes es importante para su transmisión. Señales digitales son menos susceptibles a la corrupción por ruido en los procesos de transmisión y recepción. Sin embargo, la cantidad de información en la digitalización de una imagen puede ser tan grande que presenta problemas por su almacenamiento y transmisión. Por ejemplo, no es muy útil una filmadora que sólo almacena una imagen por segundo.

La solución del problema es la compresión de datos. Digitalizamos la imagen con alta definición; es decir, utilizando un gran número de pixeles y después identificamos la información más importante para la reconstrucción de la imagen. Almacenamos o transmitimos solamente esta información, en una forma que permita la reconstrucción de la imagen. Por supuesto, se puede utilizar la transformada de Fourier (el algoritmo de FFT se generaliza a dos o más dimensiones). Transformamos la imagen y almacenamos solamente las componentes de $\hat{f}(k)$ que son mayores que un cierto tamaño; 0.1% de la componente más grande, por ejemplo. Evidentemente, se puede hacer lo mismo con la transformada ondulate. Gracias a la localización simultánea en el espacio directo (\mathbf{r}) y en el espacio recíproco (\mathbf{k}), la transformada es más eficiente que la transformada de Fourier, (ver la fig. (3.1)).

En la transformada de Fourier las funciones base son las exponenciales complejas $\exp[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}]$ que están completamente deslocalizadas en el espacio directo. Pero una foto como la de la fig. 3.1 no es inherentemente homogénea. Existen grandes áreas donde el nivel de gris es casi constante (el fondo por ejemplo) y porciones donde cambia muy rápidamente. Para describir los cambios bruscos necesitamos componentes en la transformada de Fourier con grandes valores de \mathbf{k} , es decir con pequeñas longitudes de ondas. A pesar de que necesitamos estas contribuciones en las regiones muy

detalladas de la imagen, la naturaleza de las funciones base está introducida en toda la imagen. Para que no aparezca en las áreas donde el nivel gris no cambia, tenemos que introducir otras componentes con vectores de onda cercanos de modo que los detalles sobrevivan en las zonas donde existan, y las dos componentes se anulen en las otras regiones.



a)



b)



c)



d)

Figura 3.1: a) La imagen original; b) La imagen reconstruida de la transformada ondalete, pero solamente utilizando el 23% de las componentes más grandes; c) como b) pero con 5.5% de las componentes; d) La reconstrucción con 5.5% de las componentes de la transformada de Fourier.

Al contrario, las funciones de base de la transformada ondalette están localizadas en el espacio directo y las ondalettes con valores grandes de \mathbf{k} están localizadas en la parte de la imagen donde se las necesita. No estamos obligados a introducir otras para anular sus efectos en otros lugares. Por lo tanto, la transformada ondalette produce una imagen mejor respecto a la transformada de Fourier para el mismo nivel de compresión.

4. El grupo de renormalización

En muchos problemas físicos es posible identificar una escala de longitud para caracterizar el sistema. En átomos, por ejemplo, es el radio de Bohr, el radio de la órbita del electrón alrededor del protón en el estado fundamental de un átomo de hidrógeno. Cuando es posible identificar tal longitud, es posible solucionar el problema considerando solamente los procesos apropiados para la longitud característica. Procesos con una variedad de escalas de longitud presentes son mucho más difíciles de solucionar.

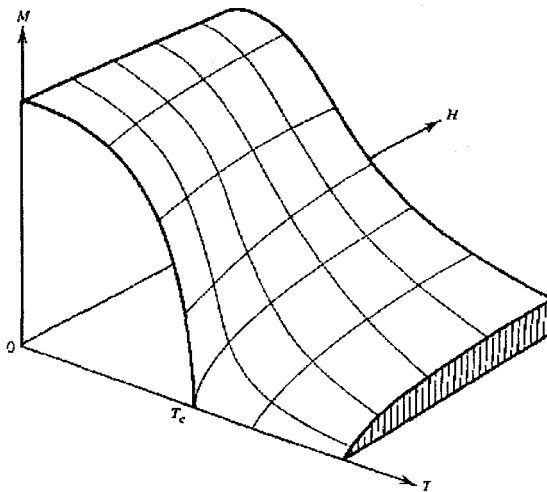


Figura 4.1: Momento magnético M del hierro..

Ejemplos son turbulencia en fluidos y transiciones de fase de segundo orden. La congelación de agua es una transición de fase de primer orden porque está asociada con un calor latente y una diferencia entre el volumen de las dos fases, agua y hielo. Un ejemplo de una transición de segundo orden es la

transición ferromagnética-paramagnética en hierro. A temperaturas por encima de los 770°C el hierro es paramagnético, posee un momento magnético sólo si aplicamos un campo magnético. Debajo de los $T_c = 770^{\circ}\text{C}$, llamada temperatura crítica o temperatura de Curie, es ferromagnético con un momento aun en ausencia de un campo magnético. La figura 4.1 presenta el comportamiento del momento magnético como función de la temperatura. El momento magnético crece suavemente de cero a $T = T_c$ y no hay ni un calor latente ni un cambio de volumen asociado con la transición.

A pesar de que no exista un momento magnético espontáneo en la fase paramagnética, medidas microscópicas muestran la existencia de zonas con momentos magnéticos distintos de cero. Pero las zonas diferentes tienen sus momentos apuntando en direcciones aleatorias de modo que el momento total es igual a cero (ver la fig. 4.2). Estas fluctuaciones en el momento magnético tienen una dimensión lineal del orden de la longitud de correlación $\zeta(T)$ que es una función de la temperatura y es divergente en la temperatura crítica. Lo que hace tan difícil el desarrollo de una teoría de transiciones de fase de segundo orden es que las fluctuaciones están presentes sobre todas las escalas de longitud entre el mínimo determinado por la separación de los átomos en el sólido y la longitud de correlación, y ninguna escala de longitud domina sobre las otras.

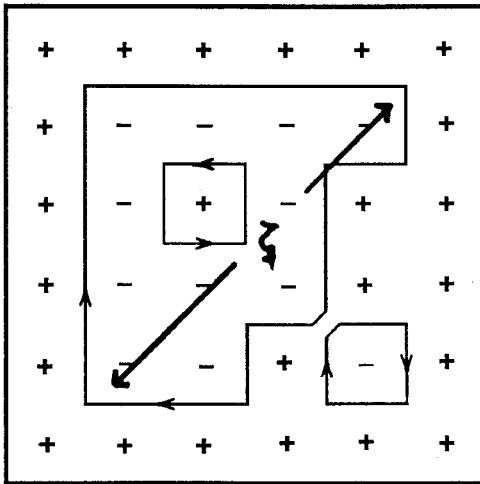


Figura 4.2: Una muestra paramagnética con fluctuaciones sobre todas las escalas de longitud hasta la longitud de correlación $\zeta(T)$.

El grupo de renormalización fue introducido por Wilson en 1971, por lo que recibió el premio Nobel de física en 1982. La idea es empezar con las fluctuaciones con longitudes de onda del orden de la separación de los átomos y sucesivamente eliminarlas incorporando su efectos en un promedio. En la mecánica estadística, una cantidad de suma importancia es la función de partición

$$Z = \sum_i \exp[-E_i / k_B T] \quad (4.1)$$

donde E_i es la energía del i -ésimo estado del sistema y la sumatoria es sobre todos los estados posibles del sistema. Si denotamos por $m(\mathbf{r})$ el momento magnético por unidad del volúmen, la función de partición se convierte en una integral funcional

$$Z = \int \exp[-\{ \int [c_{L0} (\nabla m)^2 + c_{L2} m^2 + c_{L4} m^4] d^3 r \} / k_B T] dm \quad (4.2)$$

donde la integral sobre dm es sobre todas las configuraciones posibles de m . Los coeficientes c_L son funciones no solamente de la temperatura, sino también de la longitud de onda L hasta que eliminemos las fluctuaciones. Buscamos integrar sobre las fluctuaciones en m con longitudes de onda entre L y $L + \delta L$. La mecánica estadística requiere que la función de partición sea la misma función del nuevo momento magnético, $m_{L+\delta L}$ como lo es de m_L , lo que implica que las c_L se conviertan en $c_{L+\delta L}$.

Desarrollamos el momento magnético en términos de un conjunto completo $\psi_n(\mathbf{r})$

$$m_{L+\delta L}(r) = m_L(r) + \sum_n a_n \psi_n(r), \quad (4.3)$$

donde la cuestión es: ¿Qué conjunto de funciones ψ_n es apropiado? En primer lugar, notamos que la diferencia entre $m_{L+\delta L}$ y m_L es que en $m_{L+\delta L}$ hemos promediado sobre las fluctuaciones con longitudes de onda entre L y $L+\delta L$. En consecuencia, queremos que las funciones $\psi_n(\mathbf{r})$ estén localizadas dentro del espacio recíproco entre $|\mathbf{k}| = 2\pi / L$ y $|\mathbf{k}| = 2\pi / (L+\delta L)$. De otro lado, la integral sobre \mathbf{r} en la función de partición depende solamente del valor de m en el punto \mathbf{r} . Si desarrollamos $m_{L+\delta L}$ en exponenciales complejos, es decir en una serie de Fourier, los $\psi_n(\mathbf{r})$ no son localizados en \mathbf{r} y encontraremos que los momentos magnéticos en puntos diferentes se

acoplan y el problema se convierte en algo mucho más difícil, si no imposible. Lo que necesitamos son ondaletes con su localización simultánea en el espacio directo y en el espacio recíproco. Cuando utilizamos ondaletes para las funciones $\psi_n(\mathbf{r})$, las integrales sobre \mathbf{r} y m se desacoplan y el problema es manejable.

En la teoría del grupo de renormalización no es necesario especificar explícitamente las funciones $\psi_n(\mathbf{r})$, basta con sus propiedades generales. En particular, su localización simultánea en el espacio directo y el espacio recíproco. Por lo tanto, Wilson trabajó con ondaletes unos diez años antes de la explosión del interés en ellas.

Bibliografía:

Sobre ondaletes y sus propiedades matemáticas hay:

- [1] *C.K. Chui* "An Introduction to Wavelets" (Academic, Boston 1992).

Para las practicalidades de la transformada de Fourier y la transformada ondalette, incluyendo programas en FORTRAN ver

- [2] *S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling y B.P. Flannery*, W.H. Press. "Numerical Recipes in FORTRAN, The Art of scientific computing" 2da. Ed. Cambridge, Cambridge, 1992.

(También existe una versión de Press *et al.* con los programas en C).

El comportamiento de señales y la comprensión de datos forman una gran parte de

- [3] *C.K. Chui* (Ed) "Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications" (Academic, Boston, 1992).

Sobre las transiciones de fase y el grupo de renormalización dos textos son:

- [4] *J.M. Yeomans*, "Statistical Mechamics of Phase Transitions". Clarendon, Oxford, 1992.
- [5] *K. Huang*, "Statistical Mechanics". 2da. Ed. cap.. 14-18. Wiley, N.Y. 1987.

Para un tratamiento más matemático ver

- [6] *Ya. G. Sinai* "Theory of phase Transitions: Rigorous Results". Pergamon, Oxford, 1982.

- [7] *G.L. Sewell* "Quantum Theory of collective Phenomena". Carendon, Oxford, 1986.

Un artículo por Wilson

- [8] *K.G. Wilson* "The Renormalization Group and Critical Phenomena". *Reviews of Modern Physics* 55, 583 (1983);

incluye muy brevemente su desarrollo del momento magnético en términos de ondaletes.

Una exposición explícitamente basada en ondaletes es

- [9] *G. Battle* "Wavelet Refinement of the Wilson Recursion Formula". Preprint, Mathematics Department. Texas A&M University.

dthomps@pucp.edu.pe