PRO MATHEMATICA: *Vol. X, Nos. 19-20, 1996*

SOBRE LA PRECIACION DE ACTIVOS DERIVADOS

*Hugo **Ñopo Aguilar***

Presentamos en este artículo a los más simples de los activos derivados, conocidos también como "derechos contingentes" en la teoría moderna de finanzas: las opciones de compra y venta ("calls" y "puts", respectivamente).

Presentamos el problema de la preciación de derivados y mostramos la solución para un caso concreto: opciones americanas.

Introducción. Una opción americana de venta (de compra), conocida también como put (call) es un instrumento financiero que otorga a su poseedor el derecho de vender (comprar) cierto activo a un precio contractual k (conocido también como precio de ejercicio) en cualquier instante τ antes de cumplirse la madurez T de la opción ($\tau \leq T$).

➪ *Profesor del Departamento de Ciencias, Sección Matemáticas. PUCP.*
Asesor Técnico del Despacho Viceministerial de Promoción Social en el Ministerio de Trabajo y Promoción Social.

Un caso particular es el de las opciones europeas, aquí la opción puede ser ejercida solo en la fecha de madurez ($\tau = T$). Un resultado interesante es el obtenido por Merton [4], el cual establece que una opción americana de compra (call) sobre un activo que no produce dividendos es equivalente a la opción europea similar (sobre el mismo activo y con la misma fecha de madurez).

La presentación que aquí hacemos esta basada en el trabajo de Myneni [5] y las conferencias ofrecidas por Rogerio de Deus Oliveira, como parte del curso "Tópicos de Economía Matemática" durante el primer semestre de 1994 en el IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada).

El Modelo y el problema a trabajar

Trabajaremos con un modelo básico de tres activos: un activo sin riesgo, uno con riesgo (acción) y un activo derivado sobre la acción (opción).

El activo sin riesgo, que tiene la finalidad de representar el valor del dinero en el tiempo, se aprecia a una tasa determinística y constante (tasa de interés) $r \in \mathbb{R}_+$:

$$d\,\beta_t \,/\, \beta_t = r dt, \qquad t \in [0,T], \quad \beta_0 = 1.$$

Para modelar el activo con riesgo de precio S_t precisamos de un espacio de probabilidades filtrado $(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{A}_t\}_{t\in[0,T]}, P)$ soportando un movimiento Browniano padrón W_t con horizonte T, por simplicidad podemos asumir la filtración canónica ($\mathcal{A}_t = \sigma(W_s, 0 \le s \le t)$ aumentada de los P-nulos de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}$). De esta manera asumimos un proceso de precios para el activo dependiente de una tasa de preciación $\mu \in \mathbb{R}$ y de un coeficiente de volatilidad $\sigma \in \mathbb{R}_+$:

$$dS_t \,/\, S_t = \mu\, dt + \sigma\, dW_t \qquad t \in [0,.T], \quad S_0 = s_0 > 0.$$

El problema consiste en encontrar el precio del activo derivado de manera que no se permita la existencia de "arbitrariedad".

Algunas notaciones y definiciones básicas.

De ahora en adelante usaremos β para referirnos al activo sin riesgo y S para el activo con riesgo.

Un portafolio (o estrategia de comercio) en (β, S) es un par de procesos (ϕ_1,ϕ_2) progresivamente medibles tal que $\int_0^T \phi_1^2(t)\beta_t^2 dt < \infty$ y $\int_0^T \phi_2^2(t)s_t^2 dt < \infty$ casi ciertamente. Estos proceso representan unidades poseidas de β y S, respectivamente.

Un consumo C es un proceso adaptado a la filtración asumida (esto es, C_t es una variable aleatoria $\mathcal{A}_t$ -medible $\forall t \in [0,T]$), continuo y no-decreciente con $C_0 = 0$.

Una estrategia de comercio y consumo en (β, S) es una tripla (ϕ_1, ϕ_2, C), donde (ϕ_1, ϕ_2) es un portafolio en (β, S), C es un proceso de consumo y se satisface la "condición de autofinanciamiento" (la cual nos dice que, comenzando con cierto bienestar inicial; los cambios son integramente explicados por las ganancias en la preciación de activos y en intereses sobre los ahorros menos el monto consumido):

$$\phi_1(t)\beta_t + \phi_2(t)S_t = \phi_1(0) + \phi_2(0)S_0 + \int_0^t \phi_1(u)\,d\beta_u + \int_0^t \phi_2(u)\,dS_u - C_t \qquad \text{c.c.} \quad t \in [0,T]$$

Ahora introduciremos una nueva medida de probabilidad que facilitará el trabajo en lo que sigue. Definimos la nueva medida de probabilidades $\tilde{P}$, equivalente a P y con derivada de Radon-Nikodym dada por:

$$\left.\frac{d\tilde{P}}{dP}\right|_{\mathcal{A}} = \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left\{\frac{\mu - r}{\sigma}\right\}^2 T - \left\{\frac{\mu - r}{\sigma}\right\} W_T \right\}$$

Según el teorema de Girsanov [2], $\tilde{P}$ es la única medida de probabilidades tal que S/β es una martingala con respecto a $\tilde{P}$ y aquí vemos que el proceso de precios es regido por:

$$dS_t / S_t = r dt + \sigma d\tilde{W}_t \qquad t \in [0,T] \qquad \text{--- } (*)$$

siendo $\tilde{W}_t \equiv W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$ $\quad t \in [0,T]$ un movimiento Browniano P-padrón.

De ahora en adelante nos referiremos solo a la medida $\tilde{P}$ y al proceso de precios (*).

Impondremos una restricción adicional sobre las estrategias de intercambio; exigiremos que sean admisibles, esto es:

$$\tilde{E}\left(\int_0^T \phi_1^2(t)\beta_t^2 dt\right) < \infty \quad \text{y} \quad \tilde{E}\left(\int_0^T \phi_2^2(t)S_t^2 dt\right) < \infty;$$

donde hemos tomado los valores esperados con respecto a la medida $\tilde{P}$.

Esta restricción es con la finalidad de evitar la posibilidad de arbitrariedad (creación sin límites de riqueza por medios especulativos). Denotamos con $\mathbb{A}$ al conjunto de estrategias de comercio y consumo admisibles en (β, S).

Ahora, definiremos el proceso $X_t \equiv \phi_1(t)\,\beta_t + \phi_2(t)\,S_t \quad t \in [0,T]$ (proceso de bienestar); de esta manera la condición de autofinanciamiento se convierte en:

$$X_t = X_0 + \int_0^t r X_u du + \int_0^t \sigma \phi_2(u) S_u \, d\tilde{W}_u - C_t \qquad t \in [0,T]\ c.c.\ (\phi_1, \phi_2, C) \in \mathbb{A}.$$

Pensemos en la opción de compra (call); si en el instante $t = \tau$ el precio de la acción S_τ es menor que el precio de ejercicio ($S_\tau < K$), la opción no sería utilizada (resulta preferible comprar la acción a precio de mercado); pero si el precio de la acción fuera mayor que el precio de ejercicio, la opción será utilizada, pagándose K por la acción y vendiéndola inmediatamente en el mercado a S_τ embolsándose la diferencia $S_\tau - K$. Así, el beneficio neto de la opción es $(S_\tau - K)^+$ que de manera general denotaremos con $\psi(S_\tau, K)$. Puesto que no aceptamos la existencia de "clarividentes" en nuestra economía tenemos que τ debe ser visto como un tiempo de parada de la filtración $\{\mathcal{A}_t\}_{t \in [0,T]}$ con valores en $[0,T]$.

Dado un tiempo de parada $\tau \in [0,T]$, una estrategia de compra-tenencia en D es un par (ϕ_3, τ), donde ϕ_3 es el proceso: $\phi_3(t) \equiv k\chi_{[0,\tau]}(t) \quad t \in [0,T],\ k \in \mathbb{R}$.

Denotaremos con Π^+ (Π^-) al conjunto de estrategias de compra-tenencia en D con $k \geq 0$ ($k < 0$).

Una estrategia de comercio en (β, S, D) es una colección $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \tau)$, donde (ϕ_1, ϕ_2) es una estrategia de comercio en (β, S) y (ϕ_3, τ) es una estrategia de compra-tenencia en D, con la particularidad que al instante τ se liquidan las cuentas tanto en el activo con riesgo y en la opción, invirtiendo todo en el activo sin riesgo, esto es, en $]\tau, T]$ se tiene:

$$\phi_1(t) = \phi_1(\tau) + \phi_2(\tau)\, S_\tau / \beta_\tau + \phi_3(\tau)\, \psi(S_\tau, k) / \beta_\tau,$$

$$\phi_2(t) = 0.$$

Una estrategia de comercio y consumo admisible en (β, S, D) es una colección $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \tau, C)$ donde $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \tau)$ es una estrategia de comercio en (β, S, D), se satisface la condición de admisibilidad, C es un proceso de consumo y se satisface la siguiente condición de auto-financiamiento:

$$\phi_1(t)\beta_t + \phi_2(t)\, S_t = \phi_1(0) + \phi_2(0)\, S_0 + \int_0^t \phi_1(u)\, d\beta_u + \int_0^t \phi_2(u)\, dS_u - C_t \qquad \text{c.c.} \quad t \in [0,T]$$

$$\int_\tau^t d\, C_u = 0 \qquad \text{c.c.}\, t \in\,]\tau, T]$$

Denotaremos con $\mathbb{A}'$ al conjunto de estrategias de comercio y consumo admisibles en (β, S, D).

Diremos que hay arbitrariedad en (β, S, D) si:

$$\exists(\phi_3, \tau) \in \Pi^+ \Rightarrow \exists(\phi_1, \phi_2, C) \ \text{ t.q. } \ (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \tau, C) \in \mathbb{A}'$$

o

$$\forall(\phi_3, \tau) \in \Pi^- \Rightarrow \exists(\phi_1, \phi_2, C) \ \text{ t.q. } \ (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \tau, C) \in \mathbb{A}'$$

y además $\phi_1(0) + \phi_2(0)\, S_0 + \phi_3(0)\, D_0 < 0$ y $\phi_1(T)\beta_T \geq 0$ c.c.

Negar la posibilidad de arbitrariedad significa que en la economía no podrán existir situaciones en las que un agente individual pueda alcanzar una riqueza infinitamente grande con la sola elección de una estrategia de comercio y consumo admisible.

Preciación del put americano

Lo que procuramos es encontrar el precio, en ausencia de arbitrariedad, al que la opción de venta debería ser transada en el mercado. Para esto será de gran importancia el proceso:

$$X_t \equiv \operatorname*{ess\ sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \tilde{E}[e^{-r(\tau - t)}(K - S_\tau)^+ \mid \mathcal{A}_t] \quad t \in [0,T].$$

Fue probado independientemente por Bensoussan [1] y Karatzas [3], utilizando envolventes de Snell y descomposición Dobb-Meyer para supermartingalas, que $X_t \equiv \operatorname*{ess\ sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \tilde{E}[e^{-r(\tau - t)}(K - S_\tau)^+ \mid \mathcal{A}_t] \quad t \in [0,T].$ es un proceso de bienestar, esto es, existen $(\phi_1, \phi_2, C) \in \mathbb{A}$ correspondientes a este proceso. ($X_t = X_0 + \int_0^t r X_u du + \int_0^t \sigma \phi_2(u) S_u \, d\tilde{W}_u - C_t$ c.c., $X_t \equiv \phi_1(t)\beta_t + \phi_2(t) S_t$ $t \in [0,T]$.). Esto, a su vez, significa que el precio de la opción D_0 debe ser menor o igual a X_0.

Por otro lado, usando la condición de no arbitrariedad en (β, S, D), podemos probar la desigualdad contraria con lo que llegamos al resultado que procurábamos: obtener el valor del activo derivado (en este caso $D_0 = X_0$).

Referencias:

[1] *Bensoussan, A.* (1984). On the theory of option pricing. Acta Applicandae Mathematicae. Vol. 2, 139-158.

[2] *Duffie, D.* (1992). Dynamic asset pricing theory. Princeton. U.P.

[3] *Karatzas, I.* (1988). On the pricing of American options. Applied Mathematics and Optimization. Vol. 17, 37-60.

[4] *Merton, R. C.* (1973). Theory of rational option pricing. Bell Journal of Economics and Management Sciences. Vol. 4, 141-183.

[5] *Myneni, R.* (1992). The pricing of the american option. The Annals of Applied Probability. Vol. 2, No.1, 1-23.

hnopo@pucp.edu.pe