

MÉTODOS NUMÉRICOS  
PARA  
ECUACIONES DIFERENCIALES  
ESTOCASTICAS

*Arturo Kohatsu-Higa*

*Introducción.*

*Los sistemas dinámicos (i.e. sistemas que evolucionan a través del tiempo) es un área de estudio que se ha extendido a través de diversas áreas de la matemática.*

*Hay una cantidad inmensa de sistemas reales que evolucionan a través del tiempo, pero que además tienen componentes aleatorias. Un método de estudio de este tipo de sistemas, es a través de las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE).*

*En este artículo nos proponemos presentar métodos numéricos para la simulación de sistemas dinámicos con componentes aleatorias modeladas a través de EDE.*

Utilizaremos como ejemplo básico, el problema de los precios de acciones en una bolsa de valores.

Un bono de inversión, es un instrumento económico a través del cual uno obtiene un interés fijo. La dinámica del precio del bono puede ser caracterizado por

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = I P_0(t) \quad P_0(0) = 1,$$

donde  $I$  denota el interés de la inversión. En un modelo general se podría considerar

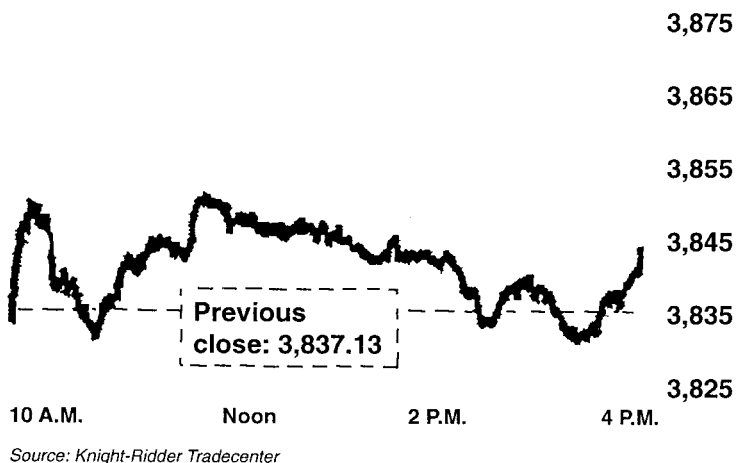
$$\frac{dP_0(t)}{dt} = I(t) P_0(t) \quad P_0(0) = 1 \quad (1)$$

donde  $P_0(t)$  es el precio del bono de inversión luego de transcurrido un tiempo  $t$ . El precio inicial del bono es 1,  $I(t)$  es el interés que se otorga al bono al tiempo  $t$ . Es decir, esta es una inversión con interés variable.

La actividad económica al tiempo 0, es ejercida por el inversor, el cual puede comprar una cantidad  $X$  de bonos al precio de 1 unidad monetaria por bono. Luego de transcurrido el tiempo  $t$ , el precio de los  $X$  bonos será  $XP_0(t)$ .

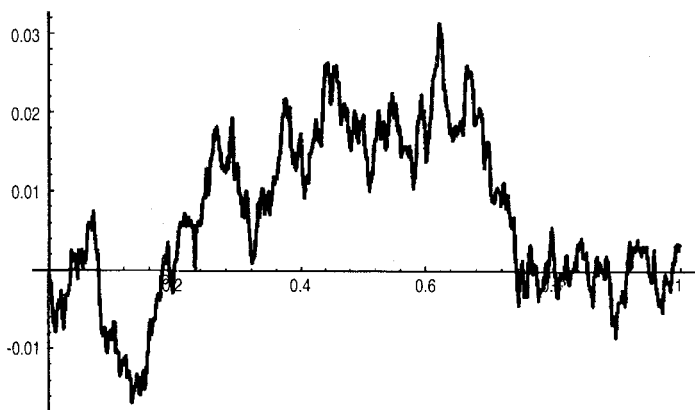
En una bolsa de valores también se manejan, entre otros instrumentos de inversión, las acciones de diversas empresas. El precio de estas acciones fluctúan de acuerdo a diversos factores. Muchos de estos factores son conocidos, pero no existe una regla cuantitativa que permita saber cual será el efecto de los factores sobre los precios de las acciones.

Si observamos el precio de una acción a través del tiempo, veremos que existen ciertas tendencias, pero también se verán pequeñas fluctuaciones debidas a la oferta y demanda de estas acciones. Estas pequeñas fluctuaciones se les suele llamar "ruido" (este término proviene de la ingeniería electrónica). Por ejemplo, el siguiente gráfico muestra los cambios en el índice Dow-Jones del mercado de Nueva York.



*Fig. 1 Evolución del índice Dow-Jones.*

El “ruido” puede modelarse de manera probabilística, a través de un proceso que tenga un comportamiento “errático” como el que se puede observar en las pequeñas variaciones de los precios, una vez que las tendencias son sustraídas. Un ejemplo de esta modelación es el siguiente gráfico obtenido por simulación.



*Fig. 2 Simulación de ruido Browniano.*

Sea  $W_t$  la cantidad de “ruido” al tiempo  $t$ . La primera labor consiste en determinar una cantidad de propiedades suficiente para poder caracterizar a este ruido  $W_t$ . Es decir, deseamos tener ciertas propiedades del ruido de tal forma que determinen de manera única un espacio de probabilidades  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  donde  $\mathcal{F}$  es una sigma álgebra sobre  $\Omega$  y  $P$  es una medida de probabilidades sobre  $\Omega$ . Además, sobre este espacio debe poder definirse un proceso aleatorio medible  $W_t, t \in \mathbb{R}_+$  (i.e,  $W: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , a través de este artículo se asumirá que  $W_t$  y  $W(t)$  denotan al mismo objeto y que  $W_t$  denota a  $W_t(\omega)$ ), tal que  $W_t$  posea las propiedades básicas siguientes

Estas propiedades pueden ser entendidas a partir de la figura 1:

1.  $W_t$  es contínuo.
2.  $W_t - W_s$  es probabilísticamente independiente de  $W_s$  (es decir, el ruido en el intervalo  $[s, t]$  no puede ser efecto de lo ocurrido en  $[0, s]$ . En caso contrario debería haberse detectado una tendencia).
3. La distribución probabilística de  $W_t - W_s$  y de  $W_{t+u} - W_{s+u}$  debe ser la misma para todo  $u \geq 0$ . (El ruido debe tener el mismo comportamiento en cualquier intervalo  $[s+u, t+u]$  sin importar el valor de  $u$ ). Además  $W_t - W_s$  tiene una distribución Normal con media 0 y varianza  $t-s$ .

N. Wiener fue uno de los primeros en caracterizar este proceso  $\{W_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ , que fue llamado movimiento Browniano ó proceso de Wiener.

En el caso de las gráficas arriba mostradas uno podría postular, entonces que el precio de la acción está dado por

$$P_1(t) = g(t) + W_t.$$

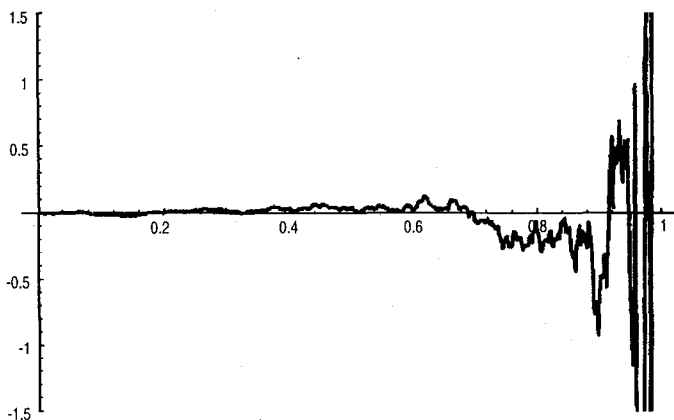
Si quisiésemos que el precio  $P_1(t)$  influyera el precio en el futuro, necesitaremos escribir una ecuación análoga a (1) de la siguiente manera

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = I_1(t) P_1(t) + W_t. \tag{2}$$

Esta es una EDE de forma bastante simple.

En algunos casos el ruido puede tener comportamiento mucho más complicado que el mostrado en la gráfica (1).

Por ejemplo:



*Fig.3 Ruido de varianza creciente.*

Esta gráfica corresponde a un ruido cuya variación va creciendo rápidamente con el tiempo. Es decir, se puede inferir claramente que probablemente la variación de  $W_t - W_0$  no es la misma que  $W_{t+h} - W_t$  para  $t$  suficientemente grande. En este caso, 3 de nuestra definición de proceso de Wiener es violada.

Haciendo un estudio de varianzas se puede postular como ruido a  $\int_0^t f(s) dW_s$  para  $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ . Esta última integral es la llamada integral Itô o integral estocástica.

Su definición esta dada por el límite en  $L^2(\Omega)$  de  $\sum_{i=0}^n f(t_i^n)(W_{t_i^n} - W_{t_i^{n-1}})$ , donde  $0 = t_1^n < \dots < t_n^n = t$  es una partición con norma tendiendo a cero.

La integral  $\int_0^t f(s) dW_s$  no puede ser definida en el sentido usual de integrales de Stieltjes, debido a que  $W$  es una función con variación total infinita en  $[0, t]$  para casi todo  $\omega$ . Se puede considerar la derivada de  $W$  en el sentido de la teoría de distribuciones, sin embargo, este punto de vista tienen

aspectos restrictivos para consideraciones numéricas. En otros tipos de problemas, este punto de vista puede ser ventajoso (ver Hida [2]).

Aspectos básicos de la teoría de integración estocástica son estudiados en diversos textos (e.g. Karatzas y Shreve [3]), para una introducción a esta área véase Kohatsu-Higa [5].

Si  $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$  entonces no es difícil probar que  $\int_0^t f(s) dW_s \sim N(0, \int_0^t f^2(s) ds)$

En efecto,

$$\sum_{i=1}^h f(t_i^n)(W_{t_{i+n}^n} - W_{t_i^n}) \sim N\left(0, \sum_{i=1}^h f^2(t_i^n)(t_{i+n}^n - t_i^n)\right).$$

Tomando límites se sigue la normalidad de  $\int_0^t f(s) dW_s$ . Es decir que considerando el proceso  $\int_0^t f(s) dW_s$  se puede modelar diversos tipos de ruido. Por ejemplo, para  $f(s) = s^{19}$ , el ruido tendrá una varianza que crecerá rápidamente mientras que para  $f(s) = \exp(-1/(s-1)^2)$  decrecerá lentamente. Este efecto se puede ver claramente en la gráfica siguiente.

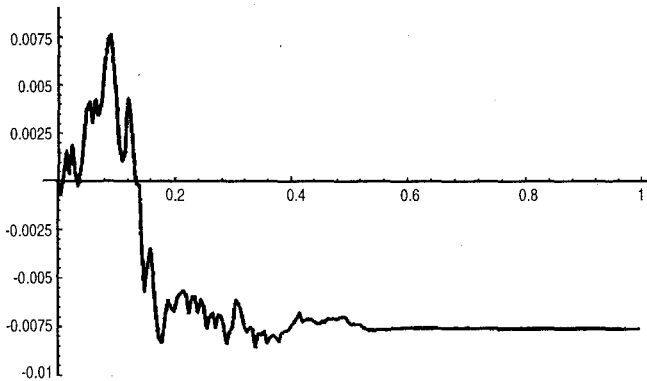


Fig. 4 Ruido de varianza decreciente.

Entonces como generalización de (2) podríamos postular

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = I_1(t) P_1(t) + f(t)W(t). \quad (3)$$

En general, el ruido también puede depender del valor de la variable de interés. En ese caso, uno entra al área del estudio de difusiones, que es el estudio de EDE del tipo.

$$dY(t) = a(Y(t))dt + b(Y(t))dW_t, \quad Y_0 = X_0. \quad (4)$$

$X_0$  es la condición inicial,  $b$  se suele llamar coeficiente de difusión y  $a$  se llama coeficiente de derive (toda esta terminología viene de la física).

Otra forma importante del cálculo estocástico es la fórmula de Itô. Supongamos que  $Y(t)$  está dada por (4) con  $b \equiv 0$ . Sea  $f$  diferenciable, entonces se puede obtener que

$$\begin{aligned} f(Y(t)) &= f(Y(0)) + \int_0^t f'(Y(s))dY(s) \\ &= f(Y(0)) + \int_0^t f'(Y(s))a(Y(s))ds. \end{aligned} \quad (5)$$

La prueba de esta fórmula, se obtiene aplicando la regla de la cadena. La fórmula de Itô es una extensión de (5) para el caso  $b \neq 0$ . Para esto se usa la fórmula de Taylor y el siguiente Lema.

**Lema.** Sea  $\pi^n = \{0 = t_0^n < \dots < t_n^n = t\}$  una partición tal que su norma tienda a 0. Entonces

$$\sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n})^2 \rightarrow t \text{ casi seguramente.}$$

En el caso de que la partición sea tal que  $t_{i+1}^n - t_i^n = t_i^n - t_{i-1}^n$ , el lema se sigue de la ley de los grandes números. En el caso general se sigue un argumento similar.

La fórmula de Itô se obtiene de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f(Y(t_{i+1}^n)) &\equiv f(Y(t_i^n)) + f'(Y(t_i^n)) (Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n)) \\ &\quad + \frac{1}{2} f''(Y(t_i^n)) (Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n))^2. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 f(Y(t_{i+1}^n)) - f(Y(t_i^n)) &\equiv f'(Y(t_i^n)) \left( \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} a(Y(s)) ds + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} b(Y(s)) dW_s \right) \\
 &+ \frac{1}{2} f''(Y(t_i^n)) \left( \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} a(Y(s)) ds + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} b(Y(s)) dW_s \right) \\
 &\equiv f'(Y(t_i^n)) (a(Y(t_i^n)) (t_{i+1}^n - t_i^n) + b(Y(t_i^n)) (W_{t_{i+1}^n}^n - W_{t_i^n}^n)) \\
 &+ \frac{1}{2} f''(Y(t_i^n)) (a(Y(t_i^n)))^2 (t_{i+1}^n - t_i^n)^2 + (2a(Y(t_i^n)) b(Y(t_i^n))) \\
 &(t_{i+1}^n - t_i^n) (W_{t_{i+1}^n}^n - W_{t_i^n}^n) + b^2(Y(t_i^n)) (W_{t_{i+1}^n}^n - W_{t_i^n}^n)^2).
 \end{aligned}$$

Sumando en ambos términos para  $i=0, \dots, n-1$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
 f(Y(t)) - f(Y(0)) &\equiv \sum_{i=0}^n \{ f'(Y(t_i^n)) (a(Y(t_i^n)) (t_{i+1}^n - t_i^n) + b(Y(t_i^n)) (W_{t_{i+1}^n}^n - W_{t_i^n}^n)) \\
 &+ \frac{1}{2} f''(Y(t_i^n)) (a(Y(t_i^n)))^2 (t_{i+1}^n - t_i^n)^2 + 2a(Y(t_i^n)) b(Y(t_i^n)) \\
 &(t_{i+1}^n - t_i^n) (W_{t_{i+1}^n}^n - W_{t_i^n}^n) + b^2(Y(t_i^n)) (W_{t_{i+1}^n}^n - W_{t_i^n}^n)^2 \}.
 \end{aligned}$$

Ahora tomamos límites con respecto a  $n \rightarrow +\infty$ . Los primeros dos términos se aproximan a

$$\int_0^t f'(Y(s)) a(Y(s)) ds + \int_0^t f'(Y(s)) b(Y(s)) dW_s.$$

El siguiente término se desvanece pues

$$\begin{aligned}
 &| \sum \frac{1}{2} f''(Y(t_i^n)) (a(Y(t_i^n)))^2 (t_{i+1}^n - t_i^n)^2 | \leq \\
 &\leq \max | \sum \frac{1}{2} f''(Y(t_i^n)) (a(Y(t_i^n)))^2 (t_{i+1}^n - t_i^n) | \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Análogamente, el siguiente término también converge a 0. Sin embargo, el último término no converge a 0, sino a

$$\int_0^t \frac{1}{2} f''(Y(s)) b^2(Y(s)) ds.$$



Esta convergencia se obtiene usando un argumento parecido al del lema. Entonces la fórmula de Itô se obtiene para  $f \in C^2(\mathbb{R})$ .

$$f(Y(t)) = f(Y(0)) + \int_0^t f'(Y(s)) ds + \int_0^t f'(Y(s)) b(Y(s)) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(Y(s)) b^2(Y(s)) ds. \quad (6)$$

Existen innumerables extensiones de esta fórmula para diversas situaciones, un caso interesante es la extensión  $f$  función convexa (ver fórmula de Tanaka en Karatzas-Shreve [3]).

## Existencia y Unicidad

Una de las primeras preguntas a responder sobre estos modelos es la existencia y unicidad de soluciones de (3) ó (4). En el caso en que  $a$  y  $b$  son funciones Lipschitz se puede usar el método de Picard-Lindelöf para hallar soluciones de (4). Esto es, supongamos que

$$|a(x) - a(y)| + |b(x) - b(y)| \leq C|x - y| \quad \forall x, y$$

para cierta constante  $C$ .

Entonces para  $EX_0^2 < +\infty$  se tiene que existe solución de (4) hasta un tiempo  $T$  (aleatorio) donde  $T$  es un tiempo de explosión (i.e.  $\lim_{t \rightarrow T} |X_t| = +\infty$ ). Si se asume que  $|a(x)| + |b(x)| \leq C(1 + |x|)$ , entonces se puede probar que  $T = +\infty$ . El método de Picard-Lindelöf consiste en construir inductivamente los siguientes procesos:

$$Y^n(t) = Y(0) + \int_0^t a(Y^{n-1}(s)) ds + \int_0^t b(Y^{n-1}(s)) dW_s$$

$$Y^0(t) = X(0).$$

Luego se prueba que  $Y^n$  converge en una topología adecuada.

Este límite es la solución de (4). Existen métodos sofisticados para probar resultados mucho más espectaculares que éste. Por ejemplo: Si  $a$  y  $b$  son funciones medibles y acotadas, existe  $Y$ , solución de (4) (ver Stroock y Varadhan [6]).

## Métodos Numéricos para EDS

En principio, el método de Picard-Lindelöf puede considerarse como una manera de aproximar el proceso solución  $Y$ .

Sin embargo, el valor de la integral  $\int_0^t b(Y^{n-1}(s))dW_s$ , no se puede conocer exactamente (para  $w$  fijo) excepto en casos específicos. Esto significa que el método de Picard-Lindelöf, es un método de aproximación pero no es un método que sirva para simular aproximaciones de (4) en un ordenador.

En general, la mayoría de paquetes básicos para Estadística contienen programas que pueden calcular los llamados “números aleatorios” (los expertos prefieren llamarlos “números pseudo-aleatorios”). Los números aleatorios son muestras de una variable aleatoria uniforme en  $[0,1]$ . Mediante otros métodos ó a través de una transformación se pueden obtener muestras de cualquier variable aleatoria con distribución conocida.

Por ejemplo, podemos simular  $W_t \sim N(0,t)$ . Para simular el proceso  $\{W_t, t \in [0,T]\}$ , se puede usar el siguiente método. Sea  $\{0 \leq t_0^n \dots < t_n^n = T\}$  una partición de  $[0,T]$  entonces  $\{W_{t_{i+1}^n}^n - W_{t_i^n}^n, i=0, \dots, n-1\}$  es una familia de  $n$  variables aleatorias independientes y  $W_{t_{i+1}^n}^n - W_{t_i^n}^n \sim N(0, t_{i+1}^n - t_i^n)$  (ver def. de  $W$ ).

Cada una de estas variables aleatorias puede ser simulada y mediante sumas se puede obtener un valor simulado de  $W_{t_i^n}^n$ . Uniendo linealmente estos puntos  $(t_i^n, W_{t_i^n}^n)$  se puede obtener una aproximación simulada de  $W_t$  (así se obtuvo la figura 1, con  $n=500$ ), que denotamos por  $W_t^n$ .

El siguiente paso, luego de generar una supuesta aproximación a  $W$ , es investigar si  $W^n$  converge de alguna forma a  $W$ . Esto es cierto en diversas topologías definidas sobre procesos. Por ejemplo, se puede probar que

$$E \sup_{t \leq T} |W_t^n - W_t|^2 \leq Cn^{-1}.$$

Una generalización del método anterior para difusiones consiste en definir para  $t_k^n \leq t < t_{k+1}^n$ .

$$Y^n(t) = Y^n(t_k^n) + a(Y^n(t_k^n))(t - t_k^n) + b(Y^n(t_k^n))(W_t - W_{t_k^n})$$

$$Y^n(0) = X(0).$$

En general, este método de aproximación que generaliza el método de Euler, puede ser descrito por la ecuación:

$$Y^n(t) = X(0) + \int_0^t a(Y(\eta(s)))ds + \int_0^t b(Y^n(\eta(s)))dW_s, \quad (7)$$

donde  $\eta(s) = t_k^n$  si  $t_k^n \leq s < t_{k+1}^n$ .

El siguiente resultado da el orden de aproximación de este método.

**Teorema.** Sean  $a$  y  $b$  dos funciones Lipschitz y acotadas entonces

$$E \sup_{t \leq T} |Y^n(t) - Y(t)|^2 \leq Cn^{-1}.$$

Nota:  $C$  denotan constantes que pueden ser diferentes en cada desigualdad.

**Prueba.**

$$Y^n(t) = Y(t) + \int_0^t (a(Y^n(\eta(s))) - a(Y(s)))ds + \int_0^t (b(Y^n(\eta(s))) - b(Y(s)))dW_s, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} E \sup_{t \leq u} |Y^n(t) - Y(t)|^2 &\leq CE \int_0^u |Y^n(\eta(s)) - Y(s)|^2 ds \\ &\leq CE \int_0^u |Y^n(\eta(s)) - Y^n(s)|^2 + |Y^n(s) - Y(s)|^2 ds, \end{aligned} \quad (9)$$

de (7) también se sigue que

$$\begin{aligned} E |Y^n(\eta(s)) - Y^n(s)|^2 &\leq 2E\{a^2(Y^n(\eta(s)))(s - \eta(s))^2 + b^2(Y^n(\eta(s)))(W_s - W_{\eta(s)})^2\} \\ &\leq C\{(s - \eta(s))^2 + (s - \eta(s))\}. \end{aligned}$$

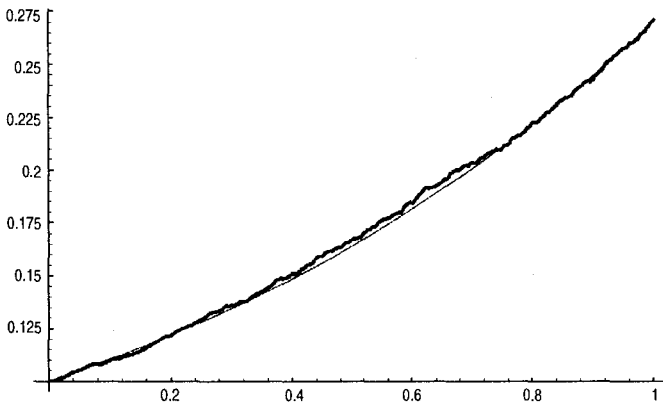
Aquí hemos usado que  $a$  y  $b$  son acotadas y que  $W_s - W_{\eta(s)}$  es independiente de  $Y^n(\eta(s))$ .

Entonces (8) se convierte en (usando el Lema de Gronwall)

$$|E \sup_{t \leq n} Y^n(t) - Y(t)|^2 \leq Cn^{-1} \exp(Ct).$$

De aquí se sigue el resultado.

Por ejemplo, en la gráfica a continuación se simuló un sistema lineal estocástico, es decir  $a(x) = x$ ,  $b(x) = x$  (aunque esta función no es acotada los resultados del teorema son aún ciertos en este caso).



*Fig. 5 Sistema lineal estocástico.*

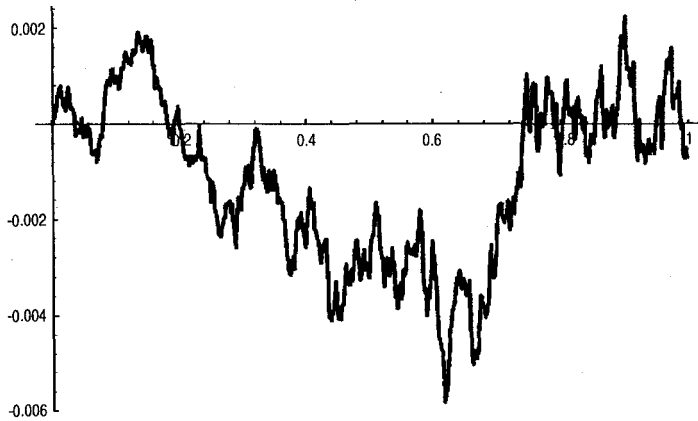
La línea gruesa denota el sistema estocástico y la fina es el sistema no estocástico, i.e.,  $a(x) = x, b(x) = 0$ .

En el caso de las ecuaciones lineales la solución (4) es conocida y está dada por

$$Y(t) = X(0) \exp(W_t + \frac{t}{2})$$

(para verificarlo el lector puede aplicar la fórmula de Itô).

La siguiente gráfica muestra la diferencia  $Y(t) - Y^n(t)$ .

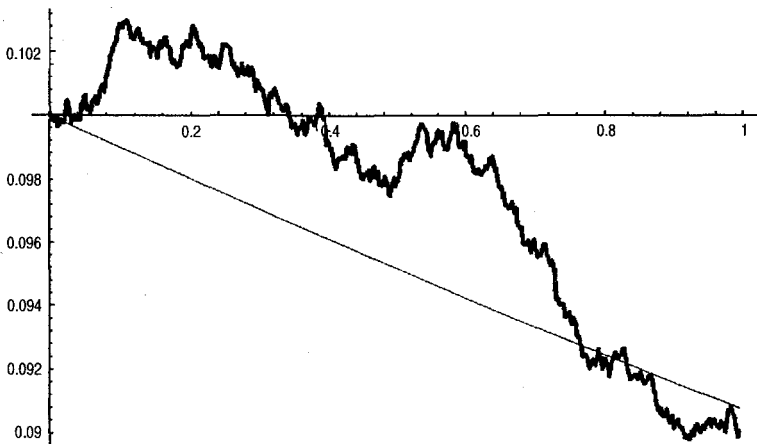


*Fig. 6 Diferencia entre el sistema lineal estocástico:  
 $dY_t = Y_t dt + Y_t dW_t$  y  $dY_t = Y_t dt, X_0 = 0.1$ .*

La siguiente gráfica corresponde al sistema

$$dY(t) = -Y(t)dt + \text{Sen}(Y(t))dW_t.$$

La comparación también se hace con el sistema no-estocástico.



*Fig. 7.*

Existen otros métodos para medir el error entre  $Y^n$  y  $Y$ . Por ejemplo  $|E(f(Y_T^n) - f(Y_T))|$  para  $f$  suficientemente suave pero con derivadas de crecimiento a lo más polinómico.

En este caso, el resultado del anterior teorema se puede mejorar y se obtiene que

$$|E(f(Y_T^n) - f(Y_T))| \leq C_n^{-1}. \quad (10)$$

En este tipo de aproximación se conoce como aproximación débil. En el caso de que  $f$  tuviese derivadas acotadas uno obtendría a partir del teorema anterior que

$$|E(f(Y_T^n) - f(Y_T))| \leq \|f'\|_\infty C_n^{-0.5}. \quad (11)$$

Generalizaciones del siguiente teorema pueden ser encontrados en Kloeden-Platen [4].

**Teorema.** Sea  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  tal que  $f$  y sus derivadas tengan a lo más crecimiento polinómico de orden  $p/2$ . Sea  $\sigma, b \in C^4(\mathbb{R})$  con derivadas acotadas.

Asuma además que  $X_0 \in L^p(\Omega)$ . Entonces se tiene

$$E|f(Y_T^n) - f(Y_T)| \leq C_n^{-1}.$$

Si comparamos este resultado con (11), se observará que la velocidad de convergencia para métodos de aproximación débiles es más rápido.

Para dar una idea de la prueba de este teorema, sea  $u: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la solución de la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)a(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)b^2(x) = 0 \quad (12)$$

$$u(T, x) = f(x).$$

Bajo ciertas condiciones sobre  $b$ ,  $a$  y  $f$  se pueden concluir que la solución existe. Además se tiene

$$|E(f(Y_T^n) - f(Y_T))| = |Eu(T, Y_T^n) - u(T, Y_T)|.$$

Usando la fórmula de Itô se obtiene que

$$\begin{aligned} Eu(T, Y_T) &= Eu(0, X(0)) + \int_0^T \left\{ \frac{\partial u}{\partial t}(t, Y(t)) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, Y(t))a(Y(t)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, Y(t))b^2(Y(t)) \right\} dt + \int_0^T \frac{\partial u}{\partial x}(t, Y(t))b(Y(t))dW_t \end{aligned}$$

la primera integral se anula para  $u$ , solución de (11), la segunda tiene esperanza 0 pues es una integral estocástica.

Entonces

$$\begin{aligned} |Eu(T, Y_T^n) - u(T, Y_T)| &= |Eu(T, Y_T^n) - u(0, X_0)| \quad (13) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |E(u(t_{i+1}^n, Y^n(t_{i+1}^n)) - u(t_i^n, Y^n(t_i^n)))|. \end{aligned}$$

Nuevamente, usando la fórmula de Itô se obtiene que

$$\begin{aligned} Eu(t_{i+1}^n, Y_{t_{i+1}}^n) - u(t_i^n, Y_{t_i}^n) &= E \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x}(t, Y_{\eta(t)}^n) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, Y_{t_i}^n) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, Y_{\eta(t)}^n) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, Y_{t_i}^n) \right) \right\} dt. \end{aligned}$$

Usando nuevamente la fórmula de Itô para el integrando se obtiene que

$$|Eu(t_{i+1}^n, Y_{t_{i+1}}^n) - u(t_i^n, Y_{t_i}^n)| \leq E \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\eta(t)}^t Z_v dv dt$$

donde  $Z_v$  es un proceso que involucra a  $Y$ ,  $Y^n$ ,  $u$  y sus derivadas. Luego de esto se sigue un procedimiento tedioso para hallar cotas para  $Ez_v$  para finalmente obtener el resultado (10) a partir de (13). Para obtener cotas para  $Ez_v$  se hace necesario hacer un análisis de las propiedades de las soluciones de (11).

**Conclusiones.**

Hemos introducido brevemente el esquema de Euler y hallado cotas para el error bajo 2 métodos de medición.

Es decir,

$$E \sup_{t \leq T} |Y_t^n - Y_t|^2 \leq C_n^{-1} \tag{14}$$

$$|E(f(Y_T^n) - f(Y_T))| \leq C_n^{-1} . \tag{15}$$

El tipo de aplicación determinará cual de los dos se deberá usar. Además esto no es único método para medir errores (ver e.g. Talay [8]).

Volviendo a nuestro ejemplo acerca de la evolución de los precios de las acciones, podemos decir que la mayoría de métodos usados hoy en día involucran variaciones de la fórmula de Black-Scholes. En los casos más complicados se debe hacer estimaciones de parámetros en las EDE y asimismo maximizar las ganancias. En casi todas estas aplicaciones se aplican directamente los dos teoremas anteriores.

Uno de los retos actuales consiste en hallar método de simulación para la justa preciación de las opciones modeladas a través de ecuaciones diferenciales estocásticas retrógradas iniciadas por el artículo de Duffie y Epstein [1]. Hasta el momento se han obtenido respuestas parciales a este problema con métodos sofisticados de la teoría de martingalas (ver Schweizer [7] ). Pero aún queda abierta la posibilidad de lograr esquemas simples de simulación y de obtener cotas de error para dichos esquemas.

**Agradecimientos:** Este artículo fue escrito con la ayuda de la Beca Patrimonial del CONACyT # 920295-R93 y del proyecto CONACyT # 2059-E9302.



## Bibliografía:

- [1] *Duffie D. Espstein L.G.* Stochastic differential utility. *Econometrica* 60 2(1992), 353-394.
- [2] *Hida T.* Brownian motion. Springer, Berlin, 1980.
- [3] *Karatzas I. y Shreve S.E.* Brownian motion and stochastic calculus, Springer, Berlin Heidelberg, New York, 1988.
- [4] *Kloeden P.E. y Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations, *Applications of Mathematics* 23, Springer New York, 1992.
- [5] *Kohatsu-Higa A.* Movimiento browniano y Cálculo estocástico, *Pro-Mathematica*, Vol. 5, 41-50, 1991, Fondo Editorial de la PUCP.
- [6] *Stroock D.W. y Varadhan S.R.S.* Multidimensional diffusion processes. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1979.
- [7] *Schweizer M.* Variance-optimal hedging in discrete time. Aparecerá en *Mathematics of Operations Research*.
- [8] *Talay D.* Resolution trajectorielle et analyse numérique des équations différentielles stochastiques *Stochastics* 9 (1983), 275-306.

*higa@math.cinvestav.mx*