

ACERCA DE LA DINAMICA SIMBOLICA Y COMPLEJA

Jorge Anicama

1. Introducción.

Considerable atención se ha puesto a los conjuntos de puntos Z_0 del plano complejo tales que la n -ésima iteración $f^n(Z_0)$ de la función

$$f(Z) := Z^2 + \mu$$

evaluada en el punto $Z:=Z_0$ permanece acotada (en norma) cuando n tiende a ∞ . Basta mencionar los trabajos de Benoit Mandelbrot y Michael Barnsley(ref [3]) que han hecho accesible estos estudios a una gran audiencia con sus finas ilustraciones y descripciones gráficas.

Un problema muy relacionado al anterior es analizar el comportamiento de la n -ésima iteración $F^n(X_0)$ de la función

$$F_a(x) := a x (1-x)$$

evaluada en el punto $x:=x_0$ del intervalo $[0,1]$. Esta aplicación se toma de ejemplo, muy a menudo, para mostrar y explicar cómo aplicaciones tan simples, como ésta, pueden mostrar los signos del caos (Según Robert Devaney: a)Sensibilidad a las condiciones iniciales, b)Transitividad topológica (Mixing), c)Densidad de los puntos periódicos ref [1]).

El presente trabajo resume algunos puntos importantes de la *dinámica simbólica* estudiando la dinámica de la función $F(x)$ sobre el intervalo $[0,1]$ y luego veremos la dinámica de $f(z)$ cuando $z \in \mathbb{C}$, es decir, la *dinámica compleja* en una variable. Debido a lo extenso de los temas involucrados nos circunscribiremos sólo a las principales características de ambas dinámicas. Finalmente haremos una conexión entre ambas dinámicas.

1.1 Definiciones.

Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ y la función $F : A \rightarrow B$ con $x \in A$:

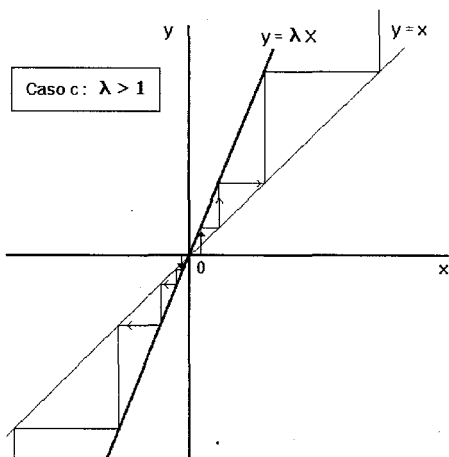
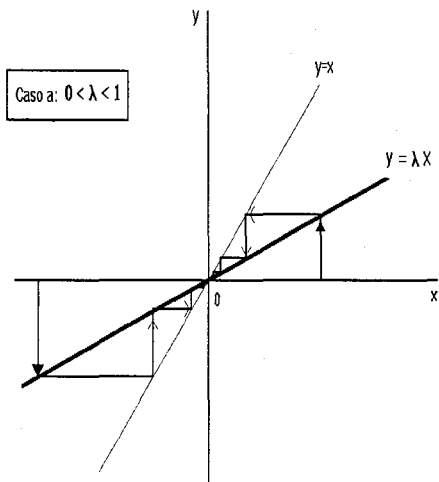
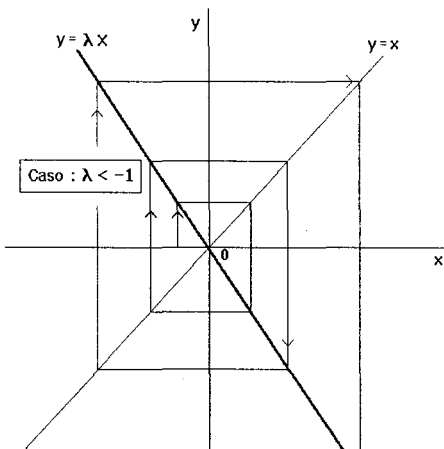
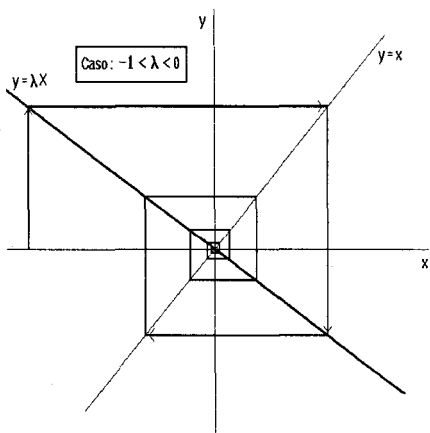
1. Si $x \in A$, llamamos la **órbita** de x al conjunto $= \{ x, F(x), F^2(x), F^3(x), \dots \}$.
2. x es llamado un **punto periódico**, si existe un $n \in \mathbb{N} / x = F^n(x)$.
3. Si n es el menor con tal propiedad, entonces n es llamado **periodo** de la órbita
4. Si $n=1$ decimos que x es un **punto fijo**.

1.2 Definiciones. Sea x un punto periódico de orden n , entonces definimos :

1. **Punto crítico** $\lambda_x := (F^n)'(x)$
2. Respecto de λ_x decimos que :
 - a) Es **Atractor** si $0 < |\lambda_x| < 1$
 - b) Es **Superatractor** si $|\lambda_x| = 0$
 - c) Es **Repelente** si $|\lambda_x| > 1$
 - d) Es **Neutral** si $|\lambda_x| = 1$

1.3 Cuatro tipos de dinámica local:

Hay cuatro tipos de comportamiento de los puntos vecinos a un punto fijo bajo iteraciones, que son equivalentes al análisis del mapeo $F(x) := \lambda X$ (es decir la sucesión $X_{n+1} = \lambda X_n$), véase el siguiente gráfico:



2. La dinámica de $F_a(x)$. Se verifica sin dificultad que cuando $0 \leq a \leq 3$ existe un punto fijo p_a tal que :

- a) Para casi todo $x \in [0,1]$, $(F_a)^n(x) \rightarrow p_a$ cuando $n \rightarrow \infty$, y
- b) Para todo $x \in \mathbb{R} - [0,1]$, $(F_a)^n(x) \rightarrow -\infty$, cuando $n \rightarrow \infty$.

a) Los puntos fijos p_a de F_a son las raíces de la ecuación : $F_a(x) = x$, i.e.
 $p_a := 0$ o $p_a := (a-1)/a$. Como $F'_a(x) := a(1-2x)$ entonces:

En el primer punto fijo $p_a = 0$ tenemos que $|F'_a(p_a)| = |F'_a(0)| = |a|$ así:

- $|F'_a(0)| < 1$ si $0 \leq a \leq 1$ caso atractor
- $|F'_a(0)| = 1$ si $a = 1$ caso neutral
- $|F'_a(0)| > 1$ si $a \geq 1$ caso repulsor

Tan pronto como el parámetro pasa de $a < 1$ hacia $a > 1$, el punto fijo $p_a = 0$ pierde su estabilidad y se convierte en un punto fijo repulsor .

En el otro punto fijo $p_a = (a-1)/a$ $F'_a(x) := 2 - a$ y se comporta así:

- Si $0 \leq a \leq 1$ $1 \leq F'(p_a) \leq 2$ caso repulsor
- Si $1 \leq a \leq 2$ $0 \leq F'(p_a) \leq 1$ caso estable
- Si $2 \leq a \leq 3$ $-1 \leq F'(p_a) \leq 0$ caso estable
- Si $3 \leq a \leq 4$ $-2 \leq F'(p_a) \leq -1$ caso repulsor

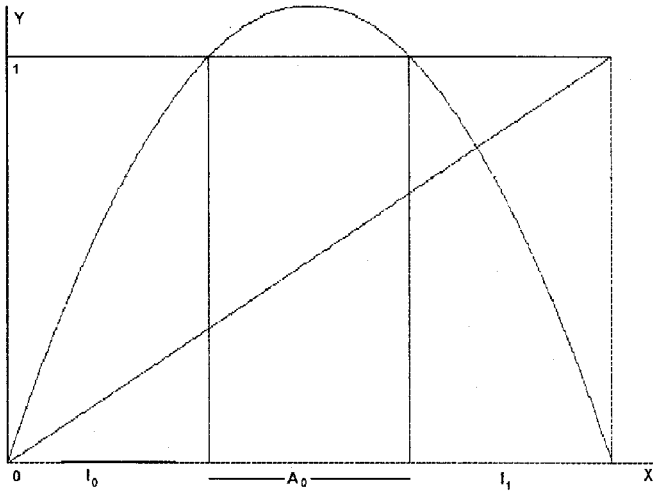
De tal modo, que para nuestro caso **a)** si $0 \leq a \leq 1$ entonces escogemos $p_a = 0$ y si $1 \leq a \leq 3$ entonces escogemos $p_a = (a-1)/a$.

b) Por ultimo si $a > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_a^n(x) \rightarrow -\infty, \forall x \in \mathbb{R} - [0,1]$ pues:

i) Si $x < 0$ entonces $ax(1-x) < x$ así $F_a(x) < x$. Por lo tanto $F_a^n(x)$ es una secuencia decreciente de puntos no convergente. Pues, si ocurre lo contrario, existiría un p tal que $F_a^n(x) \rightarrow p$ y por lo tanto $F_a^{n+1}(x) \rightarrow F_a(p)$ pero $F_a(p) < p$, pero esto contradice al hecho de la convergencia asumida, por lo tanto $F_a^n(x) \rightarrow -\infty$.

ii) Ahora, si $x > 1$ entonces $F_a(x) < 0$ (por el caso i)) así $F_a^n(x) \rightarrow -\infty$ también.

Si $1 < a < 3$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} F_a^n(x) \rightarrow p_a, \forall x \in]0,1[$. De este modo cuando $1 < a < 3$, F_a posee sólo dos puntos fijos y el resto de puntos en $[0,1]$ son asintóticos a p_a . Así la dinámica de F_a esta completamente entendida en este rango de a .



A medida que a sea mayor que 3, la dinámica de F_a se torna más complicada. Tratemos de ver qué ocurre cuando $a > 4$: Como el máximo valor de F es $a/4$ entonces habrán valores $x \in I=[0,1]$ que iterados dejarán de estar en I . Sea entonces:

$A_0 := \{ x \in I / F(x) \notin I \}$. Este es un intervalo abierto centrado en $1/2$, si $x \in A_0$ entonces $F(x) > 1$ así $F^2(x) < 0$ y $F^n(x) \rightarrow -\infty$. Es decir, A_0 es el conjunto de puntos que escapan inmediatamente de I . El resto de puntos de I permanecen en I después de la primera iteración de F .

$A_1 := \{ x \in I / F(x) \in A_0 \}$. Así, si $x \in A_1$, entonces $F^2(x) > 1, F^3(x) < 0$, y así como antes $F^n(x) \rightarrow -\infty$.

Inductivamente definimos $A_n := \{ x \in I / F^n(x) \in A_0 \}$, es decir:

$A_n := \{ x \in I / F^k(x) \in I \text{ para } k \leq n, \text{ pero } F^{n+1}(x) \notin I \}$. Así, A_n consiste de todos los puntos que escapan de I en la iteración $n+1$. Como antes si $x \in A_n$, la órbita de x tiende eventualmente a $-\infty$.

Dado que sabemos lo que sucede con las iteraciones de los puntos $x \in A_n$ (se van a $-\infty$), queda por tanto analizar lo que sucede con los puntos que nunca dejan I :

$$\Lambda := I - \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

Veamos un poco más de cerca al conjunto Λ :

i) A_0 es un conjunto abierto de centro $x=1/2$,

ii) $I - A_0$ consiste en dos intervalos cerrados : I_0 a la izquierda e I_1 a la derecha. Además, como $F(I_0) = F(I_1) = I$ (en forma monótona ascendente y descendente respectivamente), existen un par de intervalos abiertos B_1 en (I_0) y B_2 en (I_1) que F los mapea en A_0 . Por tanto ellos constituyen $A_1 := B_1 \cup B_2$.

iii) Considérese ahora $I - (A_0 \cup A_1)$. Este conjunto posee 4 conjuntos cerrados que F mapea monótonamente a todos ellos en I_0 o I_1 . Por tanto F^2 mapea cada uno de ellos en I . Luego, cada uno de estos intervalos cerrados posee un *subintervalo abierto* (B_1, B_2, B_3, B_4) que es mapeado monótonamente por F^2 en A_0 (alternanteamente ascendente y descendente). Por tanto los puntos en estos intervalos dejarán I en la 3ra. iteración de F . La reunión de ellos a $A_2 := B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$.

iv) Continuando de esta forma podemos observar que A_n consiste en 2^n intervalos *abiertos* disjuntos. Por tanto $I - (A_1 \cup \dots \cup A_n)$ consiste en 2^{n+1} intervalos *cerrados* (pues $1+2+2^2+\dots+2^n = 2^{n+1} - 1$) que F^{n+1} los mapea monótonamente a I .

2.1 Definición. Un conjunto A es un **conjunto de Cantor** si es cerrado, totalmente disconexo y es un subconjunto perfecto de I .

Recordemos que un conjunto es totalmente disconexo si no posee intervalos, y es perfecto si todo punto de él es punto de acumulación de los otros puntos del conjunto.

2.2 Proposición. Si $a > 2 + \sqrt{5}$, entonces Λ es un conjunto de Cantor.

Demostración:

Λ es totalmente disconexo: Para ello debemos mostrar que Λ no posee intervalos. Asílmase lo contrario, sean $x \neq y$ y ambos en Λ , con $[x, y] \subset \Lambda$. Así $|(F^n)'(\infty)| > \lambda, \forall \infty \in [x, y]$. (Esto es fácil de verificar: es suficiente tomar $a > 2 + \sqrt{5}$ para satisfacer $|F'(x)| > 1, \forall x \in I_0 \cup I_1$). Así existe un $\lambda > 1$ tal que, $|F'(x)| > \lambda, \forall x \in \Lambda$. Y usando la regla de la cadena podemos ver que $|(F^n)'(x)| > \lambda^n$.

Ahora escójase n tal que $\lambda^n |y - x| > 1$. Usando el teorema del valor medio se tiene que $|F^n(y) - F^n(x)| \geq \lambda^n |y - x| > 1$. Lo que implica que al menos uno de $F^n(x)$ o $F^n(y)$ sale fuera de I . Lo cual es una contradicción y por tanto Λ es totalmente disconexo.

Λ es cerrado: Pues es la intersección numerable infinita de conjuntos encajonados cerrados.

Λ es perfecto: Notar que cada extremo de los A_k esta en Λ , pues ellos son eventualmente llevados al punto fijo $x=0$. Afirmamos que todo $p \in \Lambda$ no esta aislado y por tanto Λ es perfecto. Pues de otro modo, todo punto vecino a p dejaría I bajo iteración de F . Por tanto, tal punto vecino de p estaría en algún A_k . Ahora, o bien existe una secuencia de puntos extremos de los A_k que convergen a p , o todos los puntos en una vecindad borrada de p son mapeados fuera de I en alguna iteración de F . Así, en el primer caso estaría todo dicho pues los extremos de los A_k son mapeados al $0 \in \Lambda$. En el segundo caso, podemos asumir que $F^n(p)=0$ y todos los demás puntos en una vecindad de p al eje real negativo. Luego F^n posee un máximo en p , por tanto $(F^n)'(p)=0$. Además: $F'(F^k(p))=0, \exists k < n$ (usar la regla de la cadena), por lo tanto $F^k(p)=1/2$. Pero entonces $F^{k+1}(p) \notin I$ y así $F^n(p) \rightarrow -\infty$, lo que contradice al hecho $F^n(p)=0$.

Para comprender la dinámica de $F(x)$ sobre este conjunto Λ haremos uso del mapeo Shift (desplazamiento), que aparece en la teoría de la dinámica simbólica.

2.3 Definición.

a) Definimos el espacio de secuencias en los símbolos 0 y 1 como

$$\Sigma_2 := \{ s = (s_0 s_1 s_2 \dots) / s_j = 0 \text{ o } 1 \}$$

b) Dados $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ y $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$ en Σ_2 , definimos la distancia entre ellos por :

$$d[s, t] := \sum_{k=0}^{\infty} |s_k - t_k| / 2^k$$

Los elementos de Σ_2 son cadenas infinitas de 1 y 0's, tales que para cada $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ y $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$ en Σ_2 y cada $k \in \mathbb{N}$: $|s_k - t_k|$ es 0 o 1. Por tanto la distancia entre s y t es una serie infinita dominada por la

serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$ y por lo tanto converge.

2.4 Proposición

1. d es una métrica sobre Σ_2 .

2. Si $s, t \in \Sigma_2$ y si $s_k = t_k, \forall k=0, 1, 2, \dots, n$. Entonces: $d[s, t] \leq 1/2^n$. Y

Recíprocamente:

Si $d[s, t] < 1/2^n$, entonces $s_k = t_k, \forall k \leq n$.

La primera propiedad nos permite decidir qué subconjuntos de Σ_2 son abiertos y cuáles cerrados. La segunda propiedad nos permite decidir rápidamente si dos secuencias s y t están o no cercanas una de la otra. Intuitivamente esto significa que dos secuencias de Σ_2 están próximas si ellas concuerdan en sus primeras entradas de valores.

2.5 Definición. El mapeo shift es la función $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ dada por

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = s_1 s_2 s_3 \dots$$

El mapeo shift simplemente "olvida" la primera entrada en una secuencia y desplaza todas las otras entradas una posición a la izquierda.

2.6 Proposición.

$\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ es un mapeo continuo.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$ y $s = s_0 s_1 s_2 s_3 \dots$. Escójase n tal que $1/2^n < \varepsilon$. Tómese $\delta = 1/2^{n+1}$. Si $t = t_0 t_1 t_2 \dots$ satisface $d[s, t] < \delta$. Entonces por la proposición 2.4 (2), $s_k = t_k \quad \forall k \leq n + 1$. Por tanto las k -ésimas entradas de $\sigma(s)$ y $\sigma(t)$ concuerdan $\forall k \leq n$. Por lo tanto $d[\sigma(s), \sigma(t)] \leq 1/2^n < \varepsilon$.

2.7 Proposición.

Si denotamos por $Per_n(\sigma) := \{s \in \Sigma_2 / \sigma^n(s) = s\}$ conjunto de puntos periódicos de orden n .

Entonces:

- Cardinalidad $(Per_n(\sigma)) = 2^n$.
- $Per_1(\sigma)$ es denso en Σ_2 .
- Existe una órbita densa para σ en Σ_2 .

Demostración:

a) Sea $s \in Per_n(\sigma)$, entonces $s := (s_0 \dots s_{n-1} s_0 \dots s_{n-1} s_0 \dots s_{n-1} \dots)$ en donde $s_k = 0$ o 1 , $k = 0, 1, \dots, n-1$. Por tanto existen 2^n valores s distintos.

b) Deseamos probar que: $\text{Clausura}(Per_1(\sigma)) = \Sigma_2$. Para ello debemos producir una secuencia de puntos periódicos τ_n que convergen a un punto arbitrario $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$.

Por tanto dado $s := (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$, defínase $\tau_n := (s_0 \dots s_n s_0 \dots s_n \dots)$, τ_n es la secuencia repetida cuyas entradas concuerdan con las n primeras de s . Por la proposición 2.4 (2), $d[\tau_n, s] \leq 1/2^n$. Por tanto $\tau_n \rightarrow s$.

c) Debemos mostrar que hay puntos en Σ_2 cuyas órbitas se vuelven arbitrariamente cercanas a cualquier otro punto de Σ_2 .

Para mostrar ello basta tomar $s^* := (01100 01 10 111000 001 010 100 011 101 110 1111\dots)$, s^* es construido por todas las listas, sucesivas, posibles de bloques de 0's y 1's de longitud 2,3,4,...etc. Así, claramente alguna iteración de σ aplicada a s^* nos resulta una secuencia que concuerda con cualquier secuencia dada en un número arbitrario de lugares. Es decir dado $S_0 := (a_0 a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots) \in \Sigma_2$ deseamos ver que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists S \in \Sigma_2$ tal que $d[S_0, S] < 1/2^n$ y por lo tanto por la proposición 2.4 (2), $S_0 = S$ en las n primeras entradas. Tal S es la siguiente $S := \sigma^k(s^*)$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Ahora podemos establecer una conexión entre Λ y Σ_2 que nos permitirá caracterizar a la dinámica de F en Λ , para esta haremos uso del concepto de la conjugación topológica.

2.8 Definición. La función **itinerario S** : $\Lambda \rightarrow \Sigma_2$, definida como $S(x) := s_0 s_1 s_2 \dots$, donde $s_k = 0$ si $F^k(x) \in I_0$ (la k -ésima iteración de F en x esta en I_0), y $s_k = 1$ si $F^k(x) \in I_1$ (la k -ésima iteración de F en x esta en I_1).

La función itinerario S nos indica cuál es la “ruta” que se obtiene al iterar sucesivamente x por F (la forma en que se mueve $F^k(x)$ en los intervalos I_1 e I_0).

2.9 Definición.

a. Sea $J \subset I$. Un intervalo cerrado. **Definimos** $F^{-n}(J) := \{ x \in I / F^n(x) \in J \}$.

Este conjunto recolecta todos los valores x en I que en su n -ésima iteración caen en J .

b. Dado $(s_0 s_1 s_2 \dots s_n) \in \Sigma_2$, **definimos**: $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} := \{ x \in I / x \in I_{s_0}, F(x) \in I_{s_1}, \dots, F^n(x) \in I_{s_n} \}$.

Este conjunto recolecta todos aquellos valores de $x \in I$ que poseen la misma “órbita” lo largo de las iteraciones $F^k(x)$, $k=1,2,\dots,n$.

2.10 Proposición.

a. $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = I_{s_0} \cap F^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap F^{-n}(I_{s_n})$

b. $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = I_{s_0} \cap F^{-1}(I_{s_1 s_2 \dots s_n})$

c. $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$ es una serie de intervalos cerrados, encajonados, de longitud decreciente.

d. $F(I_{s_0}) = I$.

Demostración:

a, b, d son evidentes. Sólo queda por ver c.

Son cerrados : Por inducción: si $n=0$ entonces $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = I_{s_0}$ que es cerrado y no vacío. Usando la relación b, $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = I_{s_0} \cap F^{-1}(I_{s_1 s_2 \dots s_n})$ por tanto como hipótesis auxiliar tomemos que $I_{s_1 s_2 \dots s_n}$ es un intervalo cerrado no vacío.

Como $I_{s_1 s_2 \dots s_n} \subset I$, entonces $F^{-1}(I_{s_1 s_2 \dots s_n})$ consta de dos intervalos cerrados, uno en I_0 y otro en I_1 . Por tanto $I_{s_0} \cap F^{-1}(I_{s_1 s_2 \dots s_n})$ es un intervalo cerrado.

Son encajonados: Pues $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}} \cap F^{-1}(I_{s_n}) \subset I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}}$.

2.11 Proposición. Si $a > 2 + \sqrt{5}$, entonces $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ es un homeomorfismo.

Demostración:

S es inyectiva : (por el absurdo) Sean $x, y \in \Lambda$, tales que $S(x) = S(y)$ y que $x \neq y$. Entonces $\forall n \in \mathbb{N}$: $F^n(x)$ y $F^n(y)$ (ambos) están en I_0 o en I_1 . Por tanto F es monótona en el intervalo formado por $F^n(x)$ y $F^n(y)$ y así todos los puntos en este intervalo permanecen en $I_0 \cup I_1$. Pero esto contradice al hecho que Λ es totalmente disconexo.

S es suryectiva: Sea $s = s_0 s_1 s_2 \dots \in \Sigma_2$, entonces tomando $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$, tenemos que $s = S(x)$. Nótese que $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$ es no vacío (debido a la forma en que fue definido) y además consta de un solo punto (lo cual se prueba inmediatamente usando la inyectividad de S).

S es continua : Sea $x \in \Lambda$ y $S(x) = s_0 s_1 s_2 \dots$. Sea $\epsilon > 0$, escójase n tal que $1/2^n < \epsilon$. Tomemos como A el conjunto formado por la reunión de todos los intervalos $I_{t_0 t_1 \dots t_n}$ para todas las posibles secuencias $(t_0 t_1 \dots t_n) \in \Sigma_2$ de longitud n . Ellos son en total 2^{n+1} intervalos disjuntos y $\Lambda \subset A$, además $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$ es uno de ellos. Por tanto $\forall y \in \Lambda$ podemos escoger un δ tal que $|x - y| < \delta$, lo cual implica $y \in I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$. De este modo $S(y)$ concuerda con $S(x)$ en sus $n+1$ primeras entradas y usando la proposición 2.4 (2):
 $d[S(x), S(y)] < 1/2^n < \epsilon$.

S^{-1} es continua : Debido a que Λ y Σ_2 son espacios métricos, es Λ compacto y acabamos de ver que $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ es biyectiva continua entonces S es un homeomorfismo.

La proposición anterior nos indica que los conjuntos Λ y Σ_2 son los “mismos”. La siguiente proposición nos permitirá establecer la caracterización de la dinámica de F_a sobre Λ mediante la dinámica de σ sobre Σ_2 .

2.12 Proposición.

$$S \circ F_a = \sigma \circ S$$

Demostración: Sea $x \in \Lambda$, por la proposición anterior, él queda únicamente determinado por la intersección de la secuencia de intervalos cerrados

$$\text{encajonados } I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} : \bigcap_{i=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$$

Ya se vio que $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = I_{s_0} \cap F^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap F^{-n}(I_{s_n})$ así que

$$F(I_{s_0 s_1 \dots s_n}) \text{ puede ser escrito como : } I_{s_1} \cap F^{-1}(I_{s_2}) \cap \dots \cap F^{-n+1}(I_{s_n}) = I_{s_1 s_2 \dots s_n}$$

Luego:

$$S(F(x)) = S\left(F\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}\right)\right) = S\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} I_{s_1 s_2 \dots s_n}\right) = S_1 S_2 S_3 \dots = \sigma(S(x)).$$

2.13 Definición. Sean $f : A \rightarrow A$, $g : B \rightarrow B$ dos mapeos. Decimos que f y g son **topológicamente conjugados** si existe un homeomorfismo $h : A \rightarrow B$ tal que $h \circ f = g \circ h$, el cual es llamado *conjugación topológica*.

Los mapeos que son topológicamente conjugados son completamente equivalentes en términos de su dinámica. Así por ejemplo, si p es un punto fijo de f , entonces $h(p)$ es punto fijo de g : pues $h(p) = h(f(p)) = g(h(p))$. También h establece una correspondencia unívoca entre $\text{Per}_n(f)$ y $\text{Per}_n(g)$ ver **2.8**. Todo esto queda establecido de manera particular para el mapeo shift σ y la función F_a en el siguiente teorema.

2.14 Teorema. Sea $F_a = a x (1-x)$ con $a > 2 + \sqrt{5}$. Entonces :

1. La Cardinalidad de $\text{Per}_n(F_a) = 2^n$
2. $\text{Per}(F_a)$ es denso en Λ .
3. F_a posee una órbita densa en Λ .

De este modo terminamos por entender la dinámica de F_a en el intervalo I . Ahora veamos cómo esto nos permite hacer una extensión al campo de los números complejos.

3. Dinámica Compleja. En esta parte veremos la dinámica de la familia cuadrática ya no sobre la recta real sino sobre el plano complejo. La dinámica resultante será más complicada, por lo menos para ciertos parámetros. Para ello necesitamos de la conjugación topológica para el caso complejo:

3.1 Definición. Sean $R(z)$ y $S(z)$ dos funciones racionales de variable compleja, y sea $M(z)$ la transformación de Möbius (mapeo racional biyectivo). Decimos que R y S son **conjugadas** (analíticas) si $M \circ R = S \circ M$.

Nótese que si R y S son conjugadas, entonces R^n y S^n también lo son y por tanto serán el holomórficamente “mismo” sistema dinámico. Así cualquier pregunta topológica o conforme acerca del sistema generado por S puede ser obtenido de la respuesta a la misma pregunta aplicada a R mediante el mapeo M .

De este modo para estudiar la dinámica de los polinomios cuadráticos complejos es suficiente estudiarlos para polinomios de la forma

$$f_c(z) := z^2 + c$$

pues por lo antes dicho todo polinomio cuadrático de la forma:

3.1.1 $R(z) := az^2 + 2bz + d$ es conjugado con $f_c(z)$ mediante $M(z) := az+b$, tomando $c := ad + b - b^2$

Ahora bien, la ecuación $F_a(x)$ estudiada antes sobre I , es extendida al plano complejo: $F(z) := az(1-z)$ la cual por lo antes expuesto (3.1.1) siempre será conjugada a f_c por cierta $M(z)$.

Recordemos que $F(z)$ cuando $z \in \mathbf{R}$, estaba caracterizado porque la mayoría de los puntos en I tendían al ∞ bajo iteraciones de F , salvo un conjunto de Cantor Λ sobre el cual la dinámica de F era equivalente al mapeo shift en dos símbolos. Lo mismo también es cierto en el plano complejo, veamos:

3.2 Proposición. Sea $|c| > 2$. Si $|z| \geq |c|$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(z) = \infty$

Demostración: Si $|c| > 2$, entonces asumamos que $|c| = 2+k$, $k > 0$. Luego, afirmamos que todo z que sea $|z| \geq |c|$ escapa al infinito bajo iteración de f_c (y en particular de $c = f_c(0)$). En efecto:

$$\text{Si } |z| \geq |c| > 2 \text{ entonces, } |f_c(z)| = |z^2 + c| \geq |z|^2 - |c| \geq |z|^2 - |z| = |z|(|z| - 1) \geq |z|(1+k).$$

Por lo tanto $|f_c(z)| \geq |z|(1+k)$, siempre que $|z| \geq |c|$. Pero $1+k > 1$, luego: $|f_c(z)| > |z|$.

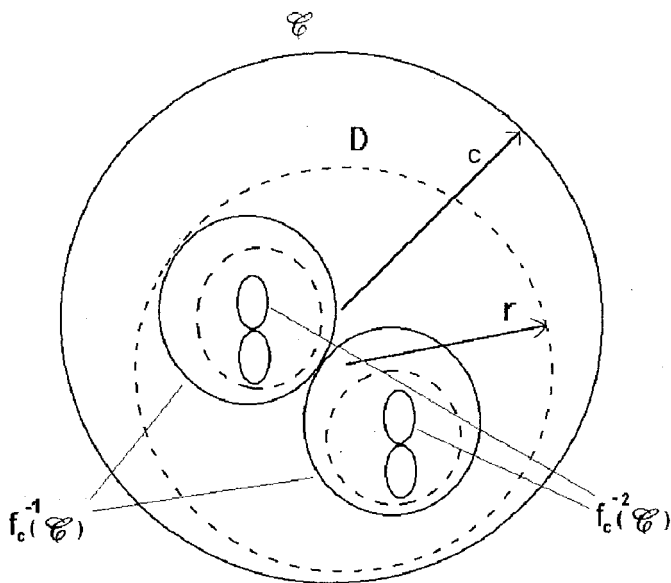
Lo que puede ser interpretado como si z cae en el exterior de la circunferencia de radio $|c| > 2$ en el plano. Entonces, $f_c(z)$ cae más lejos del origen $(0,0)$ que lo que cae z . Esto es, bajo una iteración, tales puntos se acercan más al ∞ que a cualquier otro punto. Por lo tanto, podemos aplicar el mismo argumento para decir que bajo 2 iteraciones, tales puntos se mueven aún más lejos del origen.:

$$\begin{aligned} |f_c^2(z)| = |f_c(f_c(z))| &\geq |f_c(z)|(1+k) && \text{(Pues: } |f_c(z)| > 2 \text{)} \\ &\geq |z|(1+k)^2 && \text{(Pues } |f_c(z)| \geq |z|(1+k) \text{)} \end{aligned}$$

Entonces, $|f_c^n(z)| \geq |z|(1+k)^n$. De este modo, $|f_c^n(z)| \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Como no hay puntos periódicos para f_c en el exterior de $|z| = |c|$, se sigue que esta región entera cae en $S(f_c)$ ($S(z)$, es la proyección estereográfica de la esfera de radio uno y centro el origen en el plano complejo). Aún más, todo punto que es eventualmente llevado a esta región permanece en $S(f_c)$. Así que llamemos Λ al conjunto de puntos cuya órbita completa caen en el círculo $|z| = |c|$.

3.3 Proposición. Si $|c|$ es suficientemente grande, Λ es un conjunto de Cantor invariante por f_c sobre el cual f_c es conjugado con el mapeo shift de dos símbolos. Todos los puntos en $C - \Lambda$ tienden al ∞ bajo iteraciones de f_c .



Demostración : La demostración es análoga a la del mapeo cuadrático real. En vez de secuencias de intervalos encajonados que definen un conjunto de Cantor , ahora tendremos una secuencia anidada de discos.

Sea \mathcal{C} la imagen del círculo $|z|=|c|$ y $f_c^{-1}(\mathcal{C})$ su preimagen, la figura nos representa a $f_c^{-1}(\mathcal{C})$ como un ocho (lo cual puede explicarse, pues la imagen inversa del c es 0 y los otros puntos sobre $|z|=|c|$ poseen dos preimagenes).

$f_c^{-1}(\mathcal{C})$ esta contenida en el interior del disco $|z|\leq|c|$. Además todo punto entre $f_c^{-1}(\mathcal{C})$ y \mathcal{C} son mapeados al exterior de $|z|=|c|$, y por tanto estos puntos caen en el conjunto estable.

Sea ahora $r < |c|$ tal que $f_c^{-1}(\mathcal{C})$ este contenida en el interior del disco D dado por $|z|\leq r$. La preimagen de D consiste en dos conjuntos simplemente conexos, uno en cada extremo de $f_c^{-1}(\mathcal{C})$. Cada uno de estos discos son mapeados (difeomorficamente) sobre $|z|\leq r$. Así, tenemos claramente que

$\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_c^{-n}(D)$. No es difícil verificar que $f_c^{-n}(D)$ consiste de 2^n discos y que

$f_c^{-n}(D) \subset f_c^{-n+1}(D)$, también la intersección de cualquiera de esos discos

anidados es un único punto. Consideremos B el disco de radio $\frac{1}{2}$ con centro en el origen. $f_c(B)$ es el disco de radio $\frac{1}{4}$ con centro en c . Asumamos que $f_c(B) \cap f_c^{-1}(\mathcal{C}) = \emptyset$. Nótese que si $\left| f_c^{-1}(z) \right| \leq 1$, entonces $z \in B$. Por tanto nuestra presunción implica que todo punto con derivada menor que uno es mapeado fuera de $f_c^{-1}(\mathcal{C})$. Por tanto $\left| f_c^{-1}(z) \right| > 1, \forall z \in \Lambda$ y por tanto se sigue que Λ es un conjunto de Cantor.

Se puede hablar de manera general de la dinámica de polinomios de grado d ($d f(z)$) sobre el conjunto $A(\infty) := \{ z \in \mathbb{C} / \lim_{n \rightarrow \infty} (d f)^n(z) = \infty \}$ y bajo ciertas condiciones se establece que su dinámica es “equivalente” a la de los polinomios de la forma $f(z) := z^d$ sobre el exterior del círculo unitario. Así mismo existe el análogo del conjunto Λ que vimos en el caso real, ahora en el caso complejo tal conjunto es denotado como J el cual es un conjunto de Cantor y que sobre él $d f(z)$ es isomórfico al mapeo shift en d símbolos. Este conjunto es muy conocido como el conjunto de Julia (caso particular de polinomios, pues de manera general el conjunto de Julia se define sobre funciones racionales).

Referencias:

- [1] J.Banks, J.Brooks, G.Cairns, G.Davis, P.Stacey : “On Devaney’s definition of chaos”, American Math. Monthly 99.4, (1992), 332-334.
- [2] Robert Devaney : “*Introduction to Chaotic Dynamical Systems*”, Addison- Wesley Pub. Company 1989.
- [3] Benoit Mandelbrot, “The Fractal Geometry of Nature” Freeman , San Francisco, 1982. Michael Barnsley, “Fractals Everywhere”, Academic Press, S. Diego, 1988
- [4] Engelina Nusse, Helena: “*Chaos yet no chance to get lost*”. Mathematisch Institute Rijksuniversiteit Utrecht, 1983.
- [5] Peitgen,H.- Saupe,D.- Jurgens,H.: “Fractals for the classroom”, Part II. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [6] Sebastian van Strien: “*Smooth dynamics on the Interval*” (with emphasis on quadratic-like maps). In: “New Directions in Dynamical Systems”, Cambridge Univ.Press, pgs. 57-119, 1987.

janicam@pucp.edu.pe