PRO MATHEMATICA: *Vol. X, Nos. 19-20, 1996.*

FIBRADOS HOLOMORFICOS SOBRE BLOW-UPS

Elizabeth **Gasparim**

Inicialmente vemos la definición de blow-up y algunas de sus propiedades.

La palabra blow-up tiene diferentes traducciones al español en diferentes países. Algunas traducciones usadas son: explosión, estrellamiento y explotamiento.

Definición 1 : *El blow-up de $\mathbb{C}^2$ en el origen, denotado por $\widetilde{\mathbb{C}}^2$, es dada por*

$$\widetilde{\mathbb{C}}^2 = \{(x,l) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 : x \in l\}.$$

La copia de $\mathbb{P}^1$ dada por

$$\ell = \{(0,l) : l \in \mathbb{P}^1\}$$

se llama el divisor excepcional.

CINVESTAV-IPN,. Departamento de Matemáticas. México DF

El blow up tiene inumerables aplicaciones en geometría. Mencionamos dos de ellas para motivar su estudio. En el estudio de curvas algebraicas, el blow up es utilizado para resolución de singularidades. Esto es, dada una curva singular encontrar una curva sin singularidades que le corresponde. En el estudio de superficies complejas una clasificación básica es el estudio de equivalencias racionales, donde un mapeo racional es dado localmente por cocientes de polinomios. Las superficies complejas compactas están divididas de manera natural en racionales e irracionales. Mencionamos un teorema clásico (ver [2])

Proposición 2. *Toda superficie racional se obtiene a partir de blow ups en el espacio proyectivo complejo* P^2 *o en superficies regladas.*

Estas dos aplicaciones del blow up muestran que su estudio es esencial para comprender la clasificación de curvas y superficies complejas.

El blow up es una operación local, en el sentido que para hacer blow up en un punto p de una variedad, se elige una vecindad de p y se hace el blow up en esta vecindad. Luego, si queremos hacer el blow-up de un punto en una superficie, debemos hacer el blow-up del origen en $\mathbb{C}^2$ y llevarlo a la superficie por medio de una carta. En este artículo presentamos algunos resultados sobre haces fibrados sobre el blow-up del origen en $\mathbb{C}^2$ dado en la definición 1 por $\widetilde{\mathbb{C}}^2$.

El siguiente es un resultado clásico sobre fibrados holomórficos en el plano proyectivo.

Teorema 3 (*Grothendieck*): *Todo fibrado holomórfico sobre* $\mathbb{P}^1$ *se escinde como una suma directa de fibrados lineales.*

Luego, para conocer todos los fibrados holomórficos sobre el plano proyectivo nos falta solamente conocer los haces lineales. Escribamos $\mathbb{P}^1$ con su estructura usual de variedad dada por dos cartas $U \sim \mathbb{C}$ y $V \sim \mathbb{C}$ con $U \cap V = \mathbb{C} - \{(0,0)\}$ con función de transición $z \to z^{-1}$. Entonces un fibrado lineal queda determinado por un cambio de coordenadas de $U \times \mathbb{C}$ a $V \times \mathbb{C}$, dado por $(z, u) \to (z^{-1}, z^k u)$. Todo haz lineal holomórfico sobre $\mathbb{P}^1$ es equivalente a uno de estos haces. El haz dado por z^k se denota usualmente por $\mathcal{O}(-k)$ y tiene primera clase de Chern $c_1 = -k$. Note que el fibrado dado por z^1 es exactamente el espacio que obtenemos al hacer el blow-up de $\mathbb{C}^2$ en el origen, o sea

$$\widetilde{\mathbb{C}}^2 = \mathcal{O}(-1).$$

Como $\widetilde{\mathbb{C}}^2$. es un fibrado sobre el divisor excepcional podríamos esperar que fibrados sobre $\widetilde{\mathbb{C}}^2$. tuvieran propiedades semejantes a fibrados en $\mathbb{P}^1$. Pero como veremos esto no ocurre y los espacios de moduli de fibrados sobre $\widetilde{\mathbb{C}}^2$ tienen propiedades muy interesantes.

Por un espacio de moduli de fibrados entendemos un conjunto de clases de equivalencias de fibrados módulo una relación de equivalencia. En nuestro caso estamos interesados en equivalencia holomórfica, luego vamos a definir que dos fibrados sean equivalentes si son holomórficamente isomorfos.

Incialmente miramos lo que pasa con fibrados lineales. Aquí si la situación es análoga al que pasa en $\mathbb{P}^1$.

Teorema 4 : *Fibrados holomórficos lineales sobre* $\widetilde{\mathbb{C}}^2$ *son clasificados por sus clases de Chern.*

Prueba: La sucesión exponencial exacta de haces

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow 0$$

origina la sucesión exacta de cohomologías

$$H^1(\widetilde{\mathbb{C}}^2, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(\widetilde{\mathbb{C}}^2, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(\widetilde{\mathbb{C}}^2, \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(\widetilde{\mathbb{C}}^2, \mathcal{O}).$$

Es inmediato que $H^2(\widetilde{\mathbb{C}}^2, \mathcal{O}) = 0$ porque $\widetilde{\mathbb{C}}^2$ es dado por dos cartas. Por otro lado, sabemos que $H^2(\widetilde{\mathbb{C}}^2, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ dado que $\widetilde{\mathbb{C}}^2$ es un fibrado vectorial sobre $\mathbf{P}^1$ (explícitamente $\widetilde{\mathbb{C}}^2 \simeq \mathcal{O}(-1)$, el fibrado universal sobre $\mathbf{P}^1$) Vamos a probar que $H^1(\widetilde{\mathbb{C}}^2, \mathcal{O}) = 0$.

Denotemos por

$$\alpha = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} z^i u^j$$

una función holomórfica en $U \cap V = (\mathbf{C} - \{0\}) \times \mathbf{C}$. Podemos reescribir esta función como

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} z^i u^j + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} z^{-i} u^j$$

donde la primera parte en una función holomórfica en U y la segunda en una función holomórfica en V. Esto prueba que $H^1(\widetilde{\mathbb{C}}^2, \mathcal{O}) = 0$. Luego, la sucesión exacta de cohomología se convierte en

$$0 \to H^1(\widetilde{\mathbb{C}}^2, \mathcal{O}^*) \to \mathbf{Z} \to 0,$$

y como $H^1(\widetilde{\mathbb{C}}^2, \mathcal{O}^*) \simeq$ {*fibrados lineales holomórficos en* $\widetilde{\mathbb{C}}^2$} vemos la correspondencia entre haces lineales en $H^1(\widetilde{\mathbb{C}}^2, \mathcal{O}^*)$ y sus clases de Chern.

Veamos ahora lo que pasa para fibrados de rango dos. En este caso ya no tenemos una identificación del espacio de fibrados de rango dos con algún grupo de cohomología. Por lo tanto no será posible hacer la clasificación de los espacios de moduli de rango dos utilizando la cohomología de haces, como en el caso de fibrados lineales. Veamos una manera alternativa de estudiar estos espacios de moduli.

Por simplicidad vamos a suponer que nuestros fibrados tienen la primera clase de Chern $c_1 = 0$. En $\mathbf{P}^1$, siguiendo el teorema de Grothendieck, bajo esta condición, un fibrado de rango 2 se escinde en una suma directa de la forma $\mathcal{O}(j) \otimes \mathcal{O}(-j)$. Para dar un fibrado sobre $\widetilde{\mathbb{C}}^2$ debemos dar una matriz de transición que lleva las fibras sobre U a fibras sobre V, donde U y V son las cartas definidas previamente. Luego, debemos dar una matriz 2×2 definida en $U \cap V$. Nuestro primer resultado muestra que estas matrices pueden ser elegidas como matrices triangulares superiores de forma bastante sencilla.

Teorema 5 : *Sea E un fibrado holomórfico de rango dos sobre* $\widetilde{\mathbb{C}}^2$ *con primera clase de Chern cero y sea j el entero que satisface* $E_\ell \simeq \mathcal{O}(j)\oplus\mathcal{O}(-j)$. *Entonces E tiene un matriz de transición de la forma*

$$\begin{pmatrix} z^j & p \\ 0 & z^{-j} \end{pmatrix}$$

de U to V, donde

$$p = \sum_{i=1}^{2j-2} \sum_{l=i-j+1}^{j=1} p_{il} z^l u^i .$$

En particular p depende de un número finito de parámetros.

Idea de la Prueba: Sabemos que sobre el divisor excepcional el fibrado es $\mathcal{O}(j)\oplus \mathcal{O}(-j)$, se sigue que una matriz de transición para E tiene la forma

$$T = \begin{pmatrix} z^j + ua & uc \\ ud & z^{-j} + ub \end{pmatrix}$$

donde a, b, c y d son funciones holomóficas en $U\cap V$. Para conseguir la forma deseada de la matriz, el truco es encontrar cambios de coordenadas adecuadas. La prueba es bastante larga, pero la idea es sencilla. Para la prueba en detalles ver [1].

Notación 6 : $\mathcal{M}_j$ = *espacio de moduli de fibrados de rango dos sobre* $\widetilde{\mathbb{C}}^2$ *cuya restricción al divisor excepcional es* $\mathcal{O}(j) \oplus \mathcal{O}(-j)$.

Nota: Es inmediato de este teorema que $\mathcal{M}_j$ es un espacio de dimensión finita.

Colorario 7 : $\mathcal{M}_1$ *consiste de un solo punto.*

Prueba: Hacemos $j = 1$ en el teorema 5, y obtenemos

$$p = \sum_{i=1}^{0} \sum_{l=i}^{0} p_{il} z^{l} u^{i} = 0.$$

Luego, el único haz perteneciente a $\mathcal{M}_1$ es la suma directa dada por

$$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}.$$

Para $j > 1$ se necesita un análisis bastante más detallada. Mencionamos sin prueba algunos resultados, ver [1] para detalles.

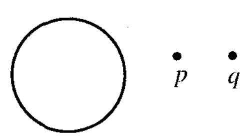
Teorema 8 :

$$\mathcal{M}_2 \simeq \mathbf{C}^3 / \sim$$

donde $\sim$ *es la relación de equivalencia dada, para* $\lambda \neq 0$

$$\{(p_{10}, p_{11}, p_{21}) \sim (\lambda p_{10}, \lambda p_{11}, p'_{21})\}, \; si \; (p_{10}, p_{11}) \neq (0{,}0) \text{ y}$$
$$\{(0{,}0,p_{12}) \sim (0{,}0,\lambda p_{12})\}.$$

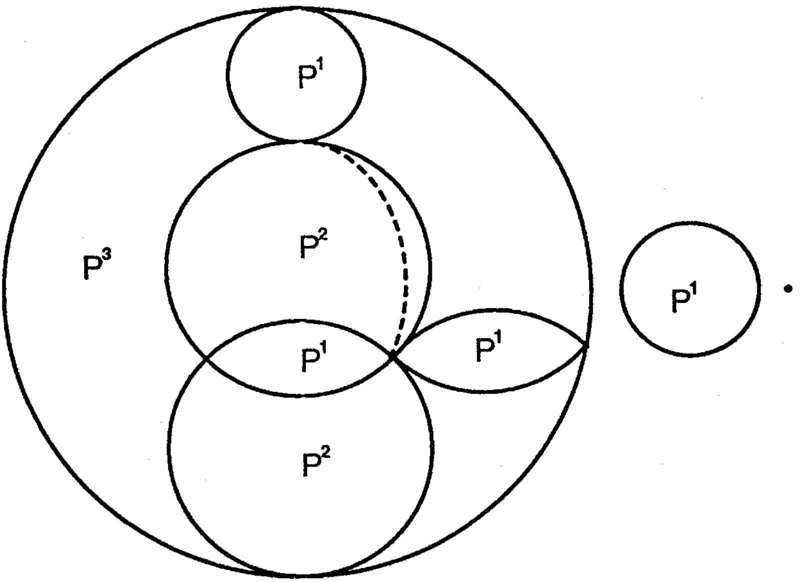
Representación esquemática de $\mathcal{M}_2$.



$\mathbf{P}^1$

Note que el espacio de moduli $\mathcal{M}_2$ con la topología cociente no es Hausdorff, no en tanto el $\mathbf{P}^1$ contenido en $\mathcal{M}_2$ tiene la topología usual.

Para tener otro ejemplo concreto antes de enunciar el caso general, damos un diagrama representando $\mathcal{M}_3$.



Representación esquemática de $\mathcal{M}_3$ *.Denota la curva normal racional.*

En el caso general sabemos algunas propiedades del espacio de moduli $\mathcal{M}_j$, pero todavía hay muchos problemas abiertos sobre la estructura de estos espacios.

Teorema 9 *El Espacio de moduli* $\mathcal{M}_j$ *es genéricamente un espacio proyectivo complejo de dimensión* $2j - 3$ *menos una subvariedad cerrada de codimensión mayor o igual que dos.*

Aquí la palabra genéricamente significa que las otras partes que componen el espacio de moduli son de dimensión menor. En particular sabemos que $\mathcal{M}_j$ contiene también espacios proyectivos de dimensión n para cada $n < 2j - 3$. Además, todos los espacios $\mathcal{M}_j$ con $j > 1$ son non-Hausdorff. Pero la estructura exacta de como se componen estos espacios no es conocida.

Una aplicación bastante interesante de estos resultados sería la de estudiar los espacios de moduli de fibrados sobre las superficies racionales conforme la construcción de estas superficies dada en la Proposición 2. Este estudio recién ha sido empezado y forma una bonita área de trabajo de donde muchos nuevos resultados deberán ser descubiertos en el futuro próximo.

Referencias

[1] E. Gasparim, *Tesis de Doctorado, University of New Mexico, USA (1995)*.

[2] P. Griffits and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*

[3] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry.*

ELIZABETH GASPARIM

E-mail: gasparim@math.cinvestav.mx
Dpto. de Matemáticas, CINVESTAV-IPN
Ap. Postal 14740, 07000, México DF