Pro Mathematica: Vol. XI, Nos. 21-22, 1997

LAS ALGEBRAS EXTERIOR Y SIMETRICA

José ***Tola Pasquel***

El propósito de esta nota es señalar la posibilidad de reunir el estudio básico de las nociones de álgebra exterior y de álgebra simétrica sobre un espacio vectorial, en un solo concepto al que se da aquí el nombre de álgebra distinguida [1]

1. Consideraremos exclusivamente espacios vectoriales sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{F}$ de característica 0 y de dimensión cualquiera finita o no.

Designaremos por $\bar{\varepsilon}^p$, $p \geqq 2$, a un homomorfismo, *que suponemos bien determinado,* del grupo simétrico S_p en el grupo multiplicativo de orden 2 formado por los números +1 y -1. Puesto que el único subgrupo de S_p de índice 2 es el grupo alternante, sólo son posibles los dos casos siguientes:

1° Caso antisimétrico: El conjunto de los elementos de S_p que se aplican en +1 es el grupo alternante. Entonces $\bar{\varepsilon}^p$, se reduce a la función *signo de las permutaciones* $\sigma \in S_p$, a la cual designaremos por ε^p.

2° Caso simétrico: $\bar{\varepsilon}^p$ aplica a cada permutación $\sigma \in S_p$ en +1; y por tanto se reduce a la función constante igual a +1.

✏ *Director de la Escuela de Graduados de la Pontificia Universidad Católica del Perú.*

Dadas $\sigma,\rho\in S_p$ escribiremos $\varepsilon^p(\sigma) = \overline{\varepsilon}^p_\sigma$ y $\sigma\circ\rho = \sigma\rho$. Se cumplen entonces las relaciones

$$\overline{\varepsilon}_\sigma = \overline{\varepsilon}_{\sigma^{-1}},\ \ \overline{\varepsilon}_{\sigma\rho} = \overline{\varepsilon}_\sigma\ \overline{\varepsilon}_\rho,\ \ \overline{\varepsilon}_\sigma\ \overline{\varepsilon}_\sigma = 1,$$

en donde, como haremos en otras ocasiones en que no hay lugar a confusión, se han suprimido los índices p.

Dada una matriz cuadrada (α^i_j) de elementos de F, de orden p, convendremos en escribir

$$DP\,(\alpha^i_j) = \sum_{\sigma\in S_p} \overline{\varepsilon}^p_\sigma\ \alpha^1_{\sigma(1)} \dots \alpha^p_{\sigma(p)},$$

de manera que, en el caso antisimétrico, $DP\,(\alpha^i_j)$ se reduce al determinante $det(\alpha^i_j)$ de la matriz (α^i_j); y en el caso antisimétrico, al permanente $perm(\alpha^i_j)$ de la matriz.

Dados un espacio vectorial V y una permutación cualquiera $\sigma\in S_p$ definiremos el isomorfismo[2]

$$[\sigma] : \otimes^p V \to \otimes^p V$$

que, aplicado a cualquier elemento descomponible de $\otimes^p V$, satisface a la relación

$$[\sigma]\,(x_1 \otimes \dots \otimes x_p) = x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma^{-1}(p)}.$$

Si ι designa a la permutación idéntica, el isomorfismo $[\iota]$ es la aplicación idéntica de $\otimes V$.

Se cumplen las relaciones siguientes:

$$[\sigma\rho] = [\sigma] \circ [\rho],\ \ [\iota] \circ [\sigma] = [\sigma] \circ [\iota] = [\sigma],\ \ [\sigma]^{-1} = [\sigma^{-1}].$$

2. Definición 1. *Se llama* ***tensor distinguido de orden*** p *(relativo desde luego, como todo lo que sigue, al homomorfismo particular* $\overline{\varepsilon}^p$*, que suponemos determinado desde el principio) a cada uno de los elementos* $t \in \otimes^p V$ *tal que*

$$(1) \qquad [\sigma]t = \overline{\varepsilon}_\sigma t, \text{ para toda } \sigma \in S_p.$$

Los tensores distinguidos de orden p constituyen un subespacio de $\otimes^p V$ que se designa por $D^p(V)$, o simplemente por D^p, y se llama *subespacio distinguido* de $\otimes^p V$.

Hasta ahora hemos supuesto que $p>1$. Convendremos ahora en definir

$$D^0(V) = \otimes^0 V = \mathrm{F} \quad \text{y} \quad D^1(V) = \otimes^1 V = V.$$

Puede observarse que $D^p(V)$ es la intersección de los núcleos de todas las aplicaciones

$$[\iota] - \overline{\varepsilon}_\sigma [\sigma] \colon \otimes^p V \to \otimes^p V, \qquad \sigma \in S_p.$$

De (1) se deduce la fórmula

$$t = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \overline{\varepsilon}_\sigma [\sigma] t, \qquad t \in D^p(V),$$

que sugiere la consideración de la aplicación $\pi^p \colon \otimes^p V \to \otimes^p V$ definida por

$$\pi^p u = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \overline{\varepsilon}_\sigma [\sigma] u, \qquad u \in \otimes^p V.$$

Se comprueban sin dificultad las siguientes proposiciones:

Proposición 1. *La condición necesaria y suficiente para que un elemento* $t \in \otimes^p V$ *sea distinguido es que* $\pi^p t = t$, *es decir que sea invariante respecto de* π^p.

Proposición 2. *La aplicación π^p es una proyección que aplica a $\otimes^p V$ sobre el espacio $D^p(V)$; o sea que $(\pi^p)^2 = \pi^p$, y es por consiguiente una sobreyección.*

$\pi^p t$ se llama *parte distinguida* de $t \in \otimes^p V$. Por tanto t es distinguido si y sólo si coincide con su parte distinguida.

3. Designaremos por $N^p(V) = N^p$ al núcleo de la aplicación π^p.

Proposición 3. *N^p tiene las siguientes propiedades:*

1a. *Cualquiera que sean $\sigma \in S_p$ y $t \in \otimes^p V$ se cumplen*

$$t - \pi^p t \in N^p,$$

y
$$t - \overline{\varepsilon}_\sigma [\sigma] t \in N^p.$$

2a. *N^p es el subespacio de $\otimes^p V$ generado por los elementos de la forma*

$$t' - \overline{\varepsilon}_\tau [\tau] t',$$

cualesquiera que sean el elemento ***descomponible*** *$t' \in \otimes^p V$ y la* ***transposición*** *$\tau \in S_p$.*

3a. *El subespacio N^p es estable respecto de la aplicación $[\sigma]$ para cada $\sigma \in S_p$, es decir que $t \in N^p$ implica que $[\sigma] t \in N^p$.*

4. El producto $u_p\, \upsilon_q \in \otimes^{p+q} V$ que se define[3] para los elementos $u_p \in \otimes^p V$ y $\upsilon_q \in \otimes^q V$ del álgebra tensorial $\otimes V$, satisface a la relación

$$\pi^{p+q}(u_p\, \upsilon_q) = \overline{\varepsilon}_{\sigma(p,q)}\, \pi^{p+q}(\upsilon_q\, u_p), \tag{2}$$

en donde $\sigma(p,q) \in S_{p+q}$ designa a la permutación

$$\sigma(p,q) \colon (1\ 2\ \dots\ p\ \ p+1\ \ p+2\ \dots\ p+q) \mapsto (p+1\ p+2\ \dots\ p+q\ 1\ 2\ \dots\ p).$$

En efecto, dado que $[\sigma(p,q)]\ (u_p\, \upsilon_q) = \upsilon_q\, u_p$, la proposición 3 permite deducir que $u_p\, \upsilon_q - \overline{\varepsilon}_{\sigma(p,q)}\, \upsilon_q\, u_p \in N^{p+q}$, y por tanto se cumple (2).

Proposición 4. *Se cumplen las siguientes relaciones:*

$$\pi^{p+q}(u_p\, \upsilon_q) = \pi^{p+q}(u_p \,.\, (\pi^q\, \upsilon_q))$$
$$\pi^{p+q}(u_p\, \upsilon_q) = \pi^{p+q}((\pi^p\, u_p) \,.\, \upsilon_q)$$
$$\pi^{p+q}(u_p\, \upsilon_q) = \pi^{p+q}((\pi^p\, u_p) \,.\, (\pi^q\, \upsilon_q)).$$

Demostradas estas ecuaciones primeramente en el caso en que u_p y υ_q son descomponibles, se extienden luego al caso general por la linealidad de la transformación π.

Corolario. *Si* $u_p \in \otimes^p V$ *y* $\upsilon_q \in \otimes^q V$ *son tales que, o bien es* $u^p \in N^p$ *o bien es* $\upsilon_q \in N^q$, *entonces se cumple que*

$$u_p\, \upsilon_q \in N^{p+q},$$

y por tanto

$$N^p\, (\otimes^q V) \subset N^{p+q} \subset \otimes^{p+q} V$$

y

$$\otimes^p V(N^q) \subset N^{p+q} \subset \otimes^{p+q} V.$$

Proposición 5. $\otimes^p V$ *es suma directa de* D^p *y* N^p :

(3) $$\otimes^p V = D^p \oplus N^p$$

y por tanto existe el isomorfismo

(4) $$P^p : D^p \simeq \otimes^p V/_{N^p}$$

que aplica a cada elemento de D^p *en la clase adjunta de* N^p *que lo contiene.*

(3) es consecuencia de que $\pi^p : \otimes^p V \rightarrow \otimes^p V$ es una proyección cuya imagen $Im\, \pi^p$ es D^p y cuyo núcleo $Ker\, \pi^p$ es N^p.

(4) es el isomorfismo canónico asociado al homomorfismo $\pi^p : \otimes^p V \rightarrow D^p$ cuyo núcleo es N^p.

5. El par dual $(D^p\,(V^*), D^p\,(V))$. Sean V^* el espacio dual de V, y $D^p\,(V^*) = D_p$ el subespacio de los tensores distinguidos de $\otimes^p V^*$. Tal como en el caso del espacio V, podemos considerar para el espacio V^* las aplicaciones

$$[\sigma]^* : \otimes^p V^* \to \otimes^p V^* \quad \text{y} \quad \pi_p : \otimes^p V^* \to D_p$$

análogas a $[\sigma]$ y π^p.

Dados los tensores $y^1 \otimes ... \otimes y^p \in \otimes^p V^*$ y $[\sigma](x_1 \otimes ... \otimes x_p) \in \otimes^p V$, su producto escalar[4] es dado por

$$< y^1 \otimes ... \otimes y^p, [\sigma] (x_1,...,x_p) > = < y^1, x_{\sigma^{-1}(1)} > ... < y^p, x_{\sigma^{-1}(p)} > =$$
$$= < y^{\sigma(1)}, x_1 > ... < y^{\sigma(p)}, x_p > = < y^{\sigma(1)} \otimes .... \otimes y^{\sigma(p)}, x_1 \otimes ... \otimes x_p > =$$
$$= < [\sigma^{-1}]^* (y^1 \otimes ... \otimes y^p), x_1 \otimes ... \otimes x_p >,$$

de donde se deduce que, cualquiera que sean $u^* \in \otimes^p V^*$ y $\upsilon \in \otimes^p V$, se cumple que

$$< u^*, [\sigma]\upsilon > = < [\sigma^{-1}]^* u^*, \upsilon >;$$

y entonces[5] se deduce la fórmula

$$(5) \qquad < u^*, \pi^p \upsilon > = < \pi_p u^*, \upsilon >,$$

que prueba que π^p y π_p son homomorfismos duales[6] .

La restricción del producto escalar de los espacios duales $\otimes^p V^*$ y $\otimes^p V$ al subespacio de $\otimes^p V^* \times \otimes^p V$ constituído por el producto cartesiano $D_p \times D^p$ es una función bilineal. Basta probar que es no degenerada para demostrar que es un producto escalar, y que por tanto D_p y D^p son espacios duales.

Si existiera un elemento $\pi_p u^* \in D_p$, diferente de cero, tal que $<\pi_p u^*, \pi^p u> = 0$ para todo $u \in \otimes^p V$, entonces, en virtud de (5), teniendo presente que $(\pi_p)^2 = \pi_p$, se obtendría

$$<\pi_p u^*, u> = <\pi_p (\pi_p u^*), u> = <\pi_p u^*, \pi^p u> = 0$$

para todo $u \in \otimes^p V$, y el producto escalar del par dual $(\otimes^p V^*, \otimes^p V)$ sería degenerado. Los papeles de D_p y D^p pueden intercambiarse en el razonamiento anterior; y resulta así que la mencionada restricción es no degenerada; por consiguiente D_p y D^p son duales y su producto escalar es dado, en virtud de (5) por

$$<\pi_p (y^i \otimes...\otimes y^p), \pi^p (x_1 \otimes...\otimes x_p)> = <y^1 \otimes...\otimes y^p, \pi^p (x_1 \otimes...\otimes x_p)> =$$
$$= <y^1 \otimes...\otimes y^p, \frac{1}{p!}\sum_\sigma \quad \bar{\varepsilon}_\sigma(x_{\sigma(1)} \otimes...\otimes x_{\sigma(p)})>$$
$$= \frac{1}{p!}\sum_\sigma \quad \bar{\varepsilon}_\sigma <y^1,x_{\sigma(1)} > ... < y^p,x_{\sigma(p)} > ;$$

y por consiguiente:

$$(6) \qquad <\pi_p(y^1 \otimes...\otimes y^p), \pi^p(x_1 \otimes...\otimes x_p)> = \frac{1}{p!}DP\ (<y^i,x_j>),$$

que expresa al producto escalar correspondiente al par dual (D_p,D^p).

6. Aplicaciones p-lineales distinguidas de un espacio V en otro W. Aplicaciones lineales distinguidas de $\otimes^p V$ en W.

Definición 2. *Dado un entero $p \geqq 2$, se dice que una aplicación p-lineal f: $V \rightarrow W$ es distinguida si para cada permutación $\sigma \in S_p$ se cumple que*

$$f(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(p)}) = \bar{\varepsilon}_\sigma f(x_1,...,x_p).$$

Es claro que basta que se cumpla esta condición para todas las transformaciones pertenecientes a S_p. Por ejemplo, la aplicación $\pi^p \circ \otimes^p$: $V^p \rightarrow D^p(V)$ es p-lineal distinguida.

Definición 3. *Se dice que una aplicación lineal g: $\otimes^p V \rightarrow W$ es lineal distinguida si es p-lineal distinguida la aplicación p-lineal $f: V^p \rightarrow W$, tal que $f = g \circ \otimes^p$ que le corresponde en virtud de la propiedad universal del producto tensorial*[7] .

Por ejemplo, la aplicación π^p es lineal distinguida.

Proposición 6. *Para que una aplicación lineal g: $\otimes^p \rightarrow W$ sea distinguida es necesario y suficiente que se cumpla la condición $N^p \subset Ker\ g$, donde N^p es el núcleo de la aplicación π^p .*

Demostración. Si $g \circ \otimes^{p}$ es p-lineal distinguida, entonces, cualquiera que sea $\sigma \in S_p$, puede escribirse

$$(g \circ \otimes^{p})(x_1,\ldots,x_p) = \overline{\varepsilon}_\sigma\,(g \circ \otimes^{p})(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(p)}).$$

La sumación de ambos miembros para todas las permutaciones $\sigma \in S_p$ da la ecuación

$$g(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} \overline{\varepsilon}_\sigma\, g(x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(p)}) =$$

$$= g(\pi^{p}\,(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p)\,),$$

y por consiguiente:

$$g = g \circ \pi^{p},$$

lo que implica que

$$N^{p} = Ker\,\pi^{p} \subset Ker\,g.$$

Si, inversamente, suponemos que esta inclusión se cumple, entonces, cualquiera que sea $t = x_1 \otimes \ldots \otimes x_p$, y puesto que según la proposición 3 es $t - \overline{\varepsilon}_\sigma\,[\sigma^{-1}]\,t \in N^{p}$, se sigue que

$$g(\,[\sigma^{-1}]t) = \overline{\varepsilon}_\sigma\, g(t),$$

o sea

$$(g \circ \otimes^{p})(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(p)}\,) = \overline{\varepsilon}_\sigma\,(g \circ \otimes^{p})(x_1,\ldots,x_p),$$

lo que muestra que $g \circ \otimes^{p}$ es p-lineal distinguida.

Corolario. *N^{p} es el subespacio de $\otimes^{p}V$ en que se anulan todas las aplicaciones lineales distinguidas.*

Demostración. El subespacio de $\otimes^{p}V$ en cada uno de cuyos elementos se anulan todas las aplicaciones lineales distinguidas es la intersección de los núcleos de todas ellas, la cual contiene, en virtud de la proposición anterior, a N^{p}. Para probar que dicha intersección es justamente N^{p}, basta comprobar que existe alguna aplicación lineal distinguida g para la cual se cumple que $Ker\, g = N^{p}$. Tal es el caso de la aplicación lineal $\pi^p\colon \otimes^p V \to D^{p}(V)$, cuyo núcleo es N^{p} y que, según se ha señalado después de la definición 3, es lineal distinguida.

7. La propiedad universal del espacio $D^p(V) = D^p$.

Proposición 7. *El par* (D^{p}, Φ^p), *donde*

$$\Phi^p : V^{p} = \underbrace{V \times \ldots \times V}_{p} \to D^{p}$$

$$\begin{tikzcd}
V^p \arrow[rr] \arrow[dr, "\otimes^p"] \arrow[ddr, "\Phi^p"'] & & W \\
& \otimes^p V \arrow[ur, "g_1"'] \arrow[d, "\pi^p"] & \\
& D^p \arrow[uur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

designa a la aplicación

$$\Phi^p = \pi^p \circ \otimes^p$$

la cual, según hemos observado a continuación de la definición 2, es p-lineal distinguida, cumple con las dos propiedades siguientes:

1a. El espacio D^{p} *es generado por sus elementos de la forma* $\Phi^p(x_1,\ldots,x_p)$ *a los que llamamos elementos* ***descomponibles*** *de* D^{p}.

2a. A cada aplicación p-lineal distinguida $f: V^p \to W$, donde W es un espacio dado cualquiera, le corresponde una única aplicación lineal $g: D^p \to W$ que satisface a la ecuación

$$f = g \circ \Phi^p.$$

Demostración. La primera propiedad se cumple porque $\otimes^p V$, según es sabido, es generado por los tensores descomponibles, y porque π^p es sobreyectiva (Proposición 2).

La propiedad de factorización del producto tensorial $(\otimes^p V, \otimes^p)$ asegura la existencia de una aplicación lineal $g_1 : \otimes^p V \to W$ tal que $f = g_1 \circ \otimes^p$. Puesto que f es p-lineal distinguida, g_1 es lineal distinguida y, según la proposición 6, es $N^p \subset Ker\, g_1$. Puede definirse la aplicación $g: D^p \to W$ mediante la ecuación

$$g(d) = g_1(t), \qquad (d \in D^p),$$

donde t es un elemento cualquiera de $\otimes^p V$ tal que $\pi^p(t) = d$. La aplicación g queda bien definida de esa manera, porque si $\pi^p(t_1) = \pi^p(t_2)$, entonces es $t_1 - t_2 \in N^p \subset Ker\, g_1$, y por tanto $g_1(t_1) = g_1(t_2)$.

De la definición de g se sigue que para todo $t \in \otimes^p V$ es $g(\pi^p(t)) = g_1(t)$, y por consiguiente se tiene que

$$g \circ \pi^p = g,$$

y por tanto

$$\begin{aligned}(g \circ \Phi^p)(x_1,\ldots,x_p) &= g(\pi^p(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p)) = g(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p) = \\ &= (g \circ \otimes^p)(x_1,\ldots,x_p) = f(x_1,\ldots,x_p).\end{aligned}$$

Resulta así que

$$f = g \circ \Phi^p.$$

Si $g': D^p \to W$ fuera otra aplicación lineal que cumpliera con la relación $f = g' \circ \Phi^p$, se tendría

$$g \circ \Phi^p = g' \circ \Phi^p;$$

y puesto que D^p es generado por sus elementos descomponibles por hipótesis, resultaría que $g = g'$. Luego g es única.

8. La p-ésima potencia tensorial distinguida de un espacio vectorial.

Definición 4. *Dados un espacio vectorial V y un entero $p \geqq 2$, un par (Z^p, φ^p), en que Z^p es un espacio vectorial y $\varphi^p : V^p \to Z^p$ es una aplicación p-lineal distinguida, que se llama* ***p-ésima potencia tensorial distinguida del espacio V*** *si se cumplen las dos condiciones siguientes:*

1a. El espacio Z^p es generado por sus elementos de la forma $\varphi^p(x_1,...,x_p)$ que se llaman elementos ***descomponibles*** *de Z^p.*

2a. A cada aplicación p-lineal distinguida f: $V^p \to W$, donde W es un espacio vectorial cualquiera, le corresponde una aplicación lineal g: $Z^p \to W$ tal que

$$f = g \circ \varphi^p.$$

De la primera de estas dos condiciones se deduce que la aplicación g que satisface a la segunda, es *única.*

Observación: Resulta inmediatamente de la proposición 7 y de la definición precedente, que el par (D^p, Φ^p) es p-ésima potencia tensorial distinguida del espacio V, con lo cual queda establecida la existencia de la p-ésima potencia tensorial distinguida de cualquier espacio vectorial.

Proposición 8. (Unicidad de la p-ésima potencia tensorial distinguida). *Si los dos pares (Z,φ) y (Z_1,φ_1) son p-ésimas potencias tensoriales distinguidas del espacio V, entonces existe un único isomorfismo g: $Z \to Z_1$ que satisface a la relación.*

$$\varphi_1 = g \circ \varphi. \tag{7}$$

Recíprocamente, si existe el isomorfismo g: $Z \to Z_1$ que cumple la ecuación (7), *y si uno de los dos pares es p-ésima potencia tensorial distinguida de V, entonces el otro par también lo es.*

Corolario. *El par* $\left(\otimes^p V \big/ N^p, \theta^p\right)$, *donde* $\theta^p : V^p \to \otimes^p V \big/ N^p$ *es dada por*

$$\theta^p = P^p \circ \Phi^p = P^p \circ \pi^p \circ \otimes^p,$$

y en el que P^p *es el isomorfismo dado en* (4), *constituye también una p-ésima potencia tensorial distinguida del espacio V.*

Este corolario es consecuencia de la proposición 8 porque (D^p,Φ^p) es p-ésima potencia tensorial de V, y el isomorfismo P^p cumple con la condición prescrita para g en el enunciado de dicha proposición.

9. Notaciones relativas a las potencias tensoriales distinguidas.

En adelante, la p-ésima potencia tensorial distinguida (Z^p,φ^p) del espacio V será denotada por $(\oslash^p V, \oslash^p)$, en donde $\oslash^p V$ designa al espacio vectorial Z^p y $\oslash^p : V^p \to \oslash^p V$ designa a la aplicación p-lineal distinguida φ^p, de manera que, para cada permutación $\sigma\in S_p$ se cumple la ecuación

$$\oslash^p (x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(p)}) = \bar{\varepsilon}_\sigma^p \oslash^p (x_1,\ldots,x_p).$$

Según la proposición 8 existe un isomorfismo

$$\Gamma^p : \oslash^p V \to D^p$$

para el que se cumple que

$$\Phi^p = \pi^p \circ \otimes^p = \Gamma^p \circ \oslash^p$$

de manera que para cada elemento descomponible $\oslash^p (x_1,\ldots,x_p)$ es

$$\Gamma^p (\oslash^p (x_1,\ldots,x_p)) = \pi^p (x_1\otimes\ldots\otimes x_p) = \frac{1}{p!} \sum_\sigma \bar{\varepsilon}_\sigma\, x_{\sigma(1)} \otimes\ldots\otimes x_{\sigma(p)} .$$

El isomorfismo Γ^p da ocasión a que los elementos del espacio $\oslash^p V$ sean llamados *tensores distinguidos*, aun cuando dicho espacio no es un subespacio de $\oslash^p V$.

A los espacios $\oslash^p V, p \geqq 2$, agregaremos los espacios

$$\oslash^0 V = \mathrm{F} \qquad \text{y} \qquad \oslash^1 V = V;$$

y a las aplicaciones $\otimes^p$, $p \geqq 2$, las aplicaciones

$$\otimes^0 = Id_F \qquad \text{y} \qquad \otimes^1 = Id_V .$$

10. Producto distinguido de un elemento de $\otimes^p V$ por un elemento de $\otimes^q V$, para $p,q \geqq 1$.

Lema. *Sean* $G = \otimes^p V$ *y* $H = \otimes^q U$, $p,q \geqq 1$, *las potencias tensoriales p-ésima y q-ésima de los espacios V y U. Para definir una* ***aplicación bilineal*** *de* $G \times H$ *en un espacio W, o sea un elemento del espacio* $L(G,H;W)$, *es suficiente que sea dada una aplicación* $g: V^p \times U^q \to W$ *tal que para cada elemento* $x = (x_1,\dots,x_p) \in V^p$ *sea q-lineal distinguida la aplicación* $g_x : U^q \to W$ *definida por*

$$g_x(y_1,\dots y_q) = g(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q);$$

y para cada $(y_1,\dots,y_q) \in U^q$ *sea p-lineal distinguida la aplicación* $g_y : V^p \to W$ *definida por*

$$g_y(x_1,\dots,x_p) = g(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q).$$

La aplicación bilineal $\varphi: G \times H \to W$ *que se trata de definir es dada entonces por la ecuación*

$$\varphi(\otimes^p(x_1,\dots,x_p), \otimes^q(y_1,\dots,y_q)) = g(x_1,\dots,x_p, y_1,\dots, y_q).$$

Demostración. Supongamos que es dada la aplicación

$$g: V^p \times U^q \to W$$

que cumple con las condiciones del enunciado.

En virtud de la definición de la potencia tensorial distinguida, a cada una de las aplicaciones p-lineales distinguidas $g_y : V^p \to W$, y por tanto a cada valor $y = (y_1,\dots,y_q) \in U^q$, le corresponde una aplicación lineal única $u_y: G \to W$ tal que $g_y = u_y \circ \otimes^p$, y por tanto

$$u_y \left(\oslash^{p} (x_1,\dots,x_p)\right) = g_y (x_1,\dots,x_p) = g(x_1,\dots,x_p,\, y_1,\dots,y_q).$$

Por consiguiente puede definirse la aplicación u: $U^{q} \to L(G;W)$, donde $L(G;W)$ designa al espacio vectorial de las aplicaciones lineales de G en W, mediante la fórmula

$$u(y_1,\dots,y_q) = u_y \ , \qquad \text{donde} \qquad y = (y_1,\dots,y_q)\ ;$$

de manera que

$$(8) \qquad [u(y_1,\dots,y_q)] \left(\oslash^{p} (x_1,\dots,x_p)\right) = g(x_1,\dots,x_p,\, y_1,\dots,y_q);$$

de donde se deduce directamente que la aplicación u es q-lineal. Es además distinguida, porque para cada permutación $\sigma \in S_q$ se cumple que

$$\begin{aligned}
&[u(y_1,\dots,y_q)] \left(\oslash^{p} (x_1,\dots,x_p)\right) = g_x(y_1,\dots,y_q) = \overline{\varepsilon}_\sigma\, g_x\, (y_{\sigma(1)},\dots,y_{\sigma(q)}) = \\
&= \overline{\varepsilon}_\sigma\, g\, (x_1,\dots,x_p,\, y_{\sigma(1)},\dots,y_{\sigma(q)}) \\
&\qquad\qquad = \overline{\varepsilon}_\sigma\, [u(y_{\sigma(1)},\dots,y_{\sigma(q)})]\, (\otimes^{p} (x_1,\dots,x_p)),
\end{aligned}$$

y por tanto

$$u(y_1,\dots,y_q) = \overline{\varepsilon}_\sigma\, u(y_{\sigma(1)},\dots,y_{\sigma(q)}).$$

Existe entonces, por definición de las potencias tensoriales distinguidas, la aplicación lineal

$$\upsilon \in L(H;\, L(G\colon W))$$

tal que

$$\upsilon \left(\oslash^{q} (y_1,\dots,y_q)\right) = u(y_1,\dots,y_q).$$

$$\begin{tikzcd}
U^q \arrow[rr, "u"] \arrow[d, "\oslash^{q}"'] & & \mathcal{L}(G;W) \\
\oslash^{q}\, U = H \arrow[urr, "v"'] & &
\end{tikzcd}$$

El isomorfismo canónico que existe entre los espacios $L(H; L(G;W))$ y $L(G,H;W)$[8] asegura la existencia de la **aplicación bilineal** $\varphi: G \times H \to W$ para la cual se cumple, teniendo presente la ecuación (8),

$$\begin{aligned}\varphi\,(\oslash^{p}(x_1,\dots,x_p),\ \oslash^{q}(y_1,\dots,y_q)) &= [\upsilon\,(\oslash^{q}(y_1,\dots,y_q))](\oslash^{p}(x_1,\dots,x_p))\\ &= [u\,((y_1,\dots,y_q)]\,(\oslash^{p}(x_1,\dots,x_p)) = g\,(x_1,\dots,x_p\,,\,y_1,\dots,y_q\,).\end{aligned}$$

Dados los enteros p y q, cualesquiera, pero ambos $\geqq 1$, trataremos de definir un producto de un elemento de $\oslash^{q} V$ por un elemento de $\oslash^{q} V$. Con ese fin, consideremos la aplicación

$$\oslash^{p+q} : V^{p+q} \to \oslash^{p+q} V.$$

Puesto que $\oslash^{p+q}$ es $(p+q)$-lineal distinguida, las aplicaciones parciales

$$(x_1,\dots,x_p) \mapsto \oslash^{p+q}\ (x_1,\dots,x_{p+q})$$

y

$$(x_{p+1},\dots,x_{p+q}) \mapsto \oslash^{p+q}\ (x_1,\dots,x_{p+q})$$

son evidentemente multilineales. El lema anterior asegura entonces la existencia de una **aplicación bilineal**

$$\psi_{p,q} : \oslash^{p} V \times V \to \oslash^{p+q} V$$

que satisface a la ecuación

$$\text{(9)} \qquad \psi_{p,q}\,(\oslash^{p}(x_1,\dots,x_p),\ \oslash^{q}(x_{p+1},\dots,x_{p+q})) = \oslash^{p+q}(x_1,\dots,x_{p+q}).$$

Definición 5. *Se llama* ***producto distinguido*** *del elemento* $u_p \in \oslash^{p} V$ *por el elemento* $\upsilon_q \in \oslash^{q} V$ al elemento

$$\psi_{p,q}\,(u_p,\ \upsilon_q) \in \oslash^{p+q} V.$$

La ecuación (9) muestra, en particular, que el producto de los elementos descomponibles $\otimes^{p}(x_1,\ldots,x_p)$ y $\otimes^{q}(x_{p+1},\ldots,x_{p+q})$ es el elemento descomponible $\otimes^{p+q}(x_1,\ldots,x_{p+q})$.

La definición precedente puede extenderse al caso en que p o q son nulos. Covendremos en que, para escalares cualesquiera α y β, se cumplen las relaciones

$$\psi_{0,0}\,(\alpha,\beta) = \alpha\beta$$

y

$$\psi_{0,p}\,(\alpha, \otimes^{p}(x_1,\ldots,x_p)) = \psi_{p,0}\,(\otimes^{p}(x_1,\ldots x_p), \alpha) = \alpha \otimes^{p}(x_1,\ldots,x_p).$$

De (9) se sigue que

$$\psi_{p+q,r}\,(\otimes^{p+q}(x_1,\ldots,x_{p+q}), \otimes^{r}(x_{p+q+1},\ldots,x_{p+q+r}) =$$
$$= \otimes^{p+q+r}(x_1,\ldots,x_{p+q+r}) = \psi_{p,q+r}\,(\otimes^{p}(x_1,\ldots,x_p), \otimes^{q+r}(x_{p+1},\ldots,x_{p+q+r})),$$

y para $u_p \in \otimes^{p} V$, $v_q \in \otimes^{q} V$ y $w_r \in \otimes^{r} V$, en virtud de la linealidad,

$$(10) \qquad \psi_{p+q,r}\,(\psi_{p,q}\,(u_p, v_q), w_r) = \psi_{p,q+r}\,(u_p, \psi_{q,r}\,(v_q, w_r)),$$

relación que expresa la propiedad asociativa del producto distinguido.

La fórmula (9) permite también escribir la ecuación

$$\psi_{q,p}\,(\otimes^{q}(x_{p+1},\ldots,x_{p+q}), \otimes^{p}(x_1,\ldots,x_p)) =$$
$$= \otimes^{p+q}(x_{p+1},\ldots,x_{p+q}, x_1,\ldots,x_p),$$

y si designamos por $\sigma(p,q)$, como anteriormente, a la permutación de los números $1,2,\ldots,p+q$ que transforma a $(1\ 2\ldots\ p+q)$ en $(p+1,\ldots,p+q\ 1\ 2\ldots p)$, resulta

$$\psi_{q,p}\,(\otimes^{p}(x_{p+1},\ldots,x_{p+q}), \otimes^{p}(x_1,\ldots,x_p))$$
$$= \overline{\varepsilon}^{p+q}_{\sigma(p,q)} \otimes^{p+q}(x_1,\ldots,x_{p+q}),$$

ecuación que comparada con (9), *teniendo en cuenta la bilinealidad de las aplicaciones* ψ, permite deducir que cualesquiera que sean $u_p \in \oslash^{p} V$ y $\upsilon_q \in \oslash^{q} V$, se cumple

(11) $$\psi_{p,q}(u_p, \upsilon_q) = \overline{\varepsilon}^{p+q}_{\sigma(p,q)}\ \psi_{q,p}(\upsilon_q, u_p).$$

A partir de ahora emplearemos la siguiente notación

$$\psi_{p,q}(u_p, \upsilon_q) = u_p \oslash \upsilon_q.$$

Puesto que los elementos descomponibles $\oslash^{p}(x_1,\dots,x_p)$ generan a $\oslash^{p} V$, las propiedades distributivas de la aplicación $\psi_{p,q}$ permite deducir de (9), inmediatamente, que $u_p \oslash \upsilon_q$ es un elemento del espacio $\oslash^{p+q} V$. Si, además, w_r es un elemento de $\oslash^{r} V$, entonces la ecuación (10), que expresa la propiedad asociativa del producto distinguido, toma la forma

$$(u_p \oslash \upsilon_q) \oslash w_r = u_p \oslash (\upsilon_q \oslash w_r) = u_p \oslash \upsilon_q \oslash w_r \in \oslash^{p+q+r} V,$$

y la relación (11) toma la forma

(12) $$u_p \oslash \upsilon_q = \overline{\varepsilon}^{p+q}_{\sigma(p,q)}\ \upsilon_q \oslash u_p .$$

11. Dualidad entre los espacios $\oslash^{p} V^*$ y $\oslash^{p} V$

Proposición 9. *Los espacios* $\oslash^{p} V^*$ *y* $\oslash^{p} V$ *son duales, con el producto escalar dado por la fórmula*

$$< \oslash^{p}(x^1,\dots,x^p),\ \oslash^{p}(x_1,\dots,x_p) > = DP(< x^i, x_j >),$$

donde los x^i *pertenecen a* V^* *y los* x_j *pertenecen a* V. $< x^i, x_j >$ *es el producto escalar de* x^i, x_j *que corresponde a los espacios duales* V^* *y* V.

Demostración: A las aplicaciones precedentemente definidas

$$\pi^{p} : \otimes^{p} V \rightarrow D^{p}(V) \quad \text{y} \quad \Gamma^{p} : \oslash^{p} V \rightarrow D^{p}(V),$$

corresponden, para V^*, las aplicaciones

$$\pi_{p} : \otimes^{p} V^* \rightarrow D^{p}(V^*) \quad \text{y} \quad \Gamma_{p} : \oslash^{p} V^* \rightarrow D^{p}(V^*).$$

Los isomorfirmos Γ^{p} y Γ_{p} nos permiten trasladar inmediatamente la dualidad del par $(D^{p}(V^*), D^{p}(V))$, que fue establecida en la sección 5, al par $(\oslash^{p} V^*, \oslash^{p} V)$. El producto escalar de este segundo par se define mediante la fórmula

$$\begin{aligned} &< \oslash^{p} (x^1,\ldots,x^p), \oslash^{p} (x_1,\ldots,x_p) > \\ &\quad = p! < \pi_p (x^1 \otimes \ldots \otimes x^p), \pi^p (x_1 \otimes \ldots \otimes x_p) >, \end{aligned}$$

en que el producto $<\,,\,>$ del segundo miembro es el producto escalar del par dual $< D^{p}(V^*), D^{p}(V) >$.

La ecuación (6) nos permite deducir entonces la fórmula

$$< \oslash^{p} (x^1,\ldots,x^p), \oslash^{p} (x_1,\ldots,x_p) > = DP(< x^i, x_j >).$$

12. El álgebra tensorial distinguida sobre un espacio vectorial.

Sea $\oslash V = \oslash^0 V \oplus \oslash^1 V \oplus \oslash^2 V \oplus \ldots = \sum_p \oslash^0 V,$

la suma directa[9] de las potencias tensoriales distinguidas, de todos los órdenes, del espacio vectorial V, las cuales son mutuamente disjuntas.

El producto distinguido introducido en la sección 10 permite considerar al espacio $\circledwedge V$ como una álgebra en que la multiplicación de dos elementos $u = \sum_p u_{\mathrm{p}}$ y $v = \sum_q v_{\mathrm{q}}$ es definida por la ecuación

$$u\, v = \sum_{p,q} \psi_{\mathrm{p,q}}\,(u_{\mathrm{p}},\, v_{\mathrm{q}}) = \sum_{p,q} u_{\mathrm{p}} \circledwedge v_{\mathrm{q}}$$

En efecto: la bilinealidad y la asociatividad del producto distinguido, y las definiciones de las operaciones vectoriales que son propias de la suma directa de espacios vectoriales, permiten comprobar mediante un cálculo directo que la aplicación

$$(\circledwedge V) \times (\circledwedge V) \;\to\; \circledwedge V$$

tal que $(u,v) \mapsto uv$, es bilineal y asociativa. Constituye por consiguiente una operación de multiplicación que determina en el espacio $\circledwedge V$ una estructura de álgebra asociativa graduada, en que $1 \in \mathrm{F}$ es el elemento unidad.

A las definiciones y proposiciones dadas hasta aquí, que son comunes a los casos simétrico y antisimétrico, es posible agregar otras que tienen ese mismo carácter; por ejemplo la noción de potencia distinguida de una aplicación lineal y su dual, o bien acerca de la dualidad entre las álgebras $\circledwedge V^*$ y $\circledwedge V$, de las que no se trata aquí por razones de brevedad.

13. El álgebra exterior y el álgebra simétrica.

La consideración hecha de manera separada, de los casos antisimétrico y simétrico conduce, de todo lo dicho precedentemente, a las nociones de álgebra exterior y de álgebra simétrica, respectivamente. En el primer caso, los conceptos que hasta ahora llamábamos distinguidos toman el nombre de *antisimétricos* o *exteriores*; y en segundo caso se llaman *simétricos.* Los primeros consituyen la materia del *Algebra Exterior*, y los segundos del *Algebra Simétrica.*

Las definiciones y las proposiciones del Algebra Exterior se obtienen sustituyendo a la aplicación $\overline{\varepsilon}^p$ por la aplicación ε^p, tal que $\varepsilon^p(\sigma)$ es el signo de la permutación $\sigma \in S_p$. En tal caso $DP(\alpha^i_j)$ se reduce a $det(\alpha^i_j)$, los tensores distinguidos se llaman *antisimétricos* y los espacios D^p se designan por D^p_A. Las aplicaciones π^p se designan por A^p y se llaman *alternadores* u *operadores de antisimetría.* Entonces, para cada $t \in \otimes^p t$, $A^p t$ se llama *parte antisimétrica* de t. Los núcleos N^p son designados por N^p_A y las aplicaciones p-lineales distinguidas se llaman *p-lineales antisimétricas.* La p-ésima potencia tensorial distinguida toma el nombre de *p-ésima potencia exterior*, el signo $\oslash V$ se reemplaza por el signo $\wedge$ del producto exterior, de modo que $\oslash^p V$ se reduce a $\wedge^p V$ y $u_p \oslash v_q$ se cambia en $u_p \wedge v_q$ [10]. Finalmente, el álgebra distinguida $\oslash V$ resulta ser el álgebra exterior

$$\wedge V = \wedge^0 V \oplus \wedge^1 V \oplus \wedge^2 V \oplus \ldots$$

En forma semejante, las definiciones y proposiciones del Algebra Simétrica se obtienen sustituyendo a $\overline{\varepsilon}^p$ por la aplicación idénticamente igual a 1. $DP(\alpha^i_j)$ se reduce entonces a *perm* (α^i_j), los tensores distinguidos se llaman *simétricos* y los espacios D^p se designan por D^p_S. Las aplicaciones π^p se designan por S^p, y se llaman *simetrizadores* u *operadores de simetría*; y, para cada $t \in \otimes^p V$, $S^p t$ se llama *parte simétrica de t.* N^p se escribe ahora N^p_S y las aplicaciones p-lineales distinguidas se llaman *p-lineales simétricas.* La p-ésima potencia tensorial distinguida toma el nombre de *p-ésima potencia simétrica*, el signo $\oslash$ se reemplaza por el signo $\bigcirc$ del producto simétrico[11] de modo que $\oslash^p V$ se reduce a $\bigcirc^p V$ y $u_p \oslash v_q$ se cambia en $u_p \bigcirc v_q$ [12]. Por último, el álgebra distinguida $\oslash V$ resulta ser el álgebra simétrica

$$\bigcirc V = \bigcirc^0 V \oplus \bigcirc^1 V \oplus \bigcirc^2 V \oplus \ldots$$

Referencias.

[1] Las citas a que se hace referencia en este artículo se refieren a los siguientes libros:

TI: Tola, *Algebra Lineal y Multilineal* (Primera parte). PUCP, Fondo Editorial (1978).

TII: Tola, *Algebra Lineal y Multilineal* (Segunda parte), PUCP, Fondo Editorial (1989).
Acerca de las Algebras Exterior y simétrica pueden mencionarse:
Bourbaki, "*Algèbre Multilineaire*", Hermann (1958),
Greub, "*Multilinear Algebra*", Springer (1967),
Schwartz, "*Les tenseurs*", Hermann (1975).

[2] **T.II,** Corolario del teorema 5.10.2, pág. 186.

[3] **T.II,** Secciones 8.5 y 8.6

[4] **T.II,** Colorario 3 del Teorema 5.17.2

[5] **T.I,** sección 4.2

[6] **T.I,** sección 4.4

[7] **T.II,** Teorema 5.7.2

[8] **T.II,** ej. 5.1.4, pág. 144.

[9] **T.II,** sección 8.1

[10] La fórmula (12) implica que $\upsilon_q \wedge u_p = (-1)^{pq}\, u_p \wedge \upsilon_q$

[11] Empleamos aquí el signo $\bigcirc$ en vez del signo $\vee$, tal como ocurre en **Laurent Schwartz,** Les Tenseurs, Hermann, Paris (1975).

[12] La fórmula (12) implica que $u_p \bigcirc \upsilon_q = \upsilon_q \bigcirc u_p$.

jtola@pucp.edu.pe