Pro Mathematica Vol. XI, Nos. 21-22, 1997

ECUACIONES DE EVOLUCION CUASI LINEALES. LA TEORIA DE T. KATO

Juan ***Montealegre Scott***

1. Introducción

En [K3] *T. Kato probó dos teoremas fundamentales para el estudio del problema abstracto de Cauchy asociado con la ecuación de evolución cuasi lineal*

$$\begin{cases} \partial_t u(t) + A(t,u)\, u(t) = f(t,u), \quad 0 \le t \le T \\ u(0) = \varphi \end{cases} \tag{1.1}$$

de tipo "hiperbólico" en un espacio de Banach X. Estos teoremas permiten probar que el problema (1.1) *es localmente bien colocado; es decir, muestran la existencia local de soluciones, su unicidad y la dependencia continua del dato inicial.*

✎ *Profesor de la Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias. PUCP*

Nuestro objetivo es estudiar estos teoremas y aplicarlos a una clase de ecuaciones diferenciales cuasi lineales.

Las notas están organizadas de la siguiente manera. En la Sección 2, resumiremos sin prueba los resultados sobre ecuaciones de evolución lineales de tipo "hiperbólico", que son necesarios para el desarrollo de la terоría cuasi lineal. Estos resultados, obtenidos por T. Kato en [K1] y [K2], son formulados de una manera ligeramente más general que la requerida aquí, así que ellos son útiles al generalizar los teoremas principales.

En la sección 3 son enunciados los teoremas principales de la Teoría de Kato y las demostraciones son presentadas en la sección 4. En la sección 5, utilizando la teoría expuesta, demostraremos que el problema asociado a la ecuación generalizada de Korteweg-de Vries es localmente bien colocado cuando $\varphi \in H^s(\mathbf{R})$ con $s \geq 3$.

Además de las notaciones usuales del Análisis Funcional y las Ecuaciones Diferenciales Parciales, en lo que sigue, representaremos por I al intervalo $[0,T]$ y Δ el conjunto

$$\{(t,s) \in I^2 : 0 \leq s \leq t \leq T\}.$$

$G(X)$ denotará la colección de generadores negativos de C_0-semigrupos en X y $G(X{:}\ M, \omega)$ será la colección de operadores lineales $A \in G(X)$ que verifican

$$\| e^{-tA} \|_{L(X)} \leq M e^{\omega t},\ t \geq 0.$$

Finalmente, si X es un espacio de Banach escribiremos

$$\|u\|_{\infty,X} = \sup_{t \in I} \|u(t)\|_X \quad \text{y} \quad \|u\|_{1,X} = \int_0^T \|u(t)\|_X \, dt.$$

2. Preliminares Sobre Ecuaciones De Evolución Lineales

Consideremos el problema abstracto de Cauchy asociado a la ecuación de evolución lineal de tipo hiperbólico

$$\begin{cases} \partial_t u(t) + A(t)\, u(t) = f(t), & 0 \leq s \leq t \leq T \\ u(0) = \varphi \end{cases} \tag{2.1}$$

en un espacio de Banach X. Asumimos que la función incógnita u esta definida en I y toma valores en X, $\{A(t)\}_{t\in I}$ es una familia de generadores negativos de C_0-semigrupos en X, y f es una función dada definida en $[s,T]$ con valores en X.

Empezamos con la definición de solución para el problema (2.1), la cual será más restrictiva que la noción de solución clásica.

Definición 2.1 *Sea Y un espacio de Banach contenido densa y continuamente en X. La función $u\in C([s,T], Y)$ es una solución en Y del problema* (2.1) *si $u\in C^1((s,T],X)$ y* (2.1) *es satisfecha en X.*

Las soluciones en Y son diferentes de las soluciones clásicas pues para $t\in[s,T]$ satisfacen la condición $u(t)\in Y\subseteq D(A(t))$ y no solamente $u(t)\in D(A(t))$, además son continuas en la norma de Y que es más fuerte que la norma de X. Notemos que de la Definición 2.1, el dato inicial φ pertenece al espacio Y.

Definición 2.2 *La familia $\{A(t)\}_{t\in I}$ en $G(X)$ es estable si existen constantes $M\geq 0$ y $\omega\in\mathbf{R}$, llamadas constantes de estabilidad, tales que*

$$\left\|\prod_{i=1}^{k}(\lambda-A(t_i))^{-1}\right\|_{L(X)}\leq M(\lambda-\omega)^{-k}$$

para todo $\lambda>\omega$, y toda $\{t_i\}_{i=1}^{k}$ con $0\leq t_1\leq\ldots\leq t_k\leq T$ y $k\in\mathbf{N}^+$.

Supongamos que $A(t)\in G(X\colon 1,\omega)$ para cada $t\in I$, entonces la familia $\{A(t)\}_{t\in I}$ es estable con constantes de estabilidad $(1,\omega)$. En particular, toda familia de generadores negativos de semigrupos de contracción es estable con constantes de estabilidad $(1,0)$.

Definición 2.3 *Una familia $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ de operadores lineales en X, se llama un sistema de evolución en X si*

1. *$U(t,t)=I$ y $U(t,s)=U(t,r)U(r,s)$ para $0\leq s\leq r\leq t\leq T$.*
2. *La aplicación $(t,s)\in\Delta\mapsto U(t,s)$ es fuertemente continua en la norma de X, es decir, para todo $x\in X$ tenemos que*

$$\| U(t,s)x - U(t_0,s_0)\, x \|_X \to 0 \quad cuando \quad (t,s) \to (t_0,s_0).$$

En este caso cada operador $U(t,s)$ es llamado un operador de evolución.

La parte más importante en el estudio (2.1) es la construcción del sistema de evolución asociado con $\{A(t)\}_{t\in I}$. Tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.4 *Sean X e Y dos espacios de Banach con Y contenido densa y continuamente en X, y para cada $t\in I$ sea $A(t)\in G(X)$. Supongamos que*

H.1. $\{A(t)\}_{t\in I}$ *es una familia estable en X con constantes de estabilidad (M,ω).*

H.2. *Existe un isomorfismo lineal $S: Y \to X$ tal que*

$$SA(t)S^{-1} = A(t) + B(t)$$

donde $B: I \to L(X)$ es fuertemente medible y limitada.

H.3. *$Y\subseteq D(A(t))$ y $A(t)\in L(Y,X)$ para todo $t\in I$. Además, la aplicación $t\in I \mapsto A(t)$ es continua en la norma de $L(Y,X)$.*

Entonces, existe un único sistema de evolución $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ en X asociado con $\{A(t)\}_{t\in I}$ tal que

E.1. $\|U(t,s)\|_{L(X)} \le Me^{\omega(t-s)}$ *para todo $(t,s)\in\Delta$.*

E.2 $\partial_t U(t,s)y = -A(t)U(t,s)y$ *para todo $y\in Y$ y todo $s\in I$.*

E.3. $\partial_s U(t,s)y = U(t,s)\,A(s)y$ *para todo $y\in Y$ y $(t,s)\in\Delta$.*

E.4. $U(t,s)Y \subseteq Y$ *para todo $(t,s)\in\Delta$.*

E.5. *Para cada $y\in Y$ la aplicación $(t,s)\in\Delta \mapsto U(t,s)y$ es continua.*

En consecuencia, si la familia $\{A(t)\}_{t\in I}$ satisface las hipótesis del Teorema 2.4, tiene asociado un único sistema de evolución $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$, y para todo $\varphi\in Y$

$$u(t) = U(t,s)\varphi$$

es la única solución en Y del problema lineal homogéneo

$$\begin{cases} \partial_t u(t) + A(t)\,u(t) = 0 & 0 \le s \le t \le T \\ u(0) = \varphi. \end{cases}$$

Corolario 2.5 *Si la familia* $\{A(t)\}_{t\in I}$ *satisface las hipótesis del Teorema 2.4 y* $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ *es el sistema de evolución asociado, entonces*

$$\|U\|_{\infty,L(Y)} \leq M\, \|S\|_{L(Y,X)}\, \|S^{-1}\|_{L(Y,X)} \exp T\,(\omega + M\|B\|_{L(X)}\,).$$

En el resto de la sección asumimos las hipótesis del Teorema 2.4 y que $\{U\,(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ es el sistema de evolución asociado.

Si $f \in L^1\,(\,[s,T],X)$, $\varphi\in Y$ y u es una solución en Y de (2.1), podemos utilizar el método de variación de parámetros para obtener la llamada *solución integral*

$$u(t) = U(t,s)\varphi + \int_s^t U(t,r)f(r)dr. \qquad (2.2)$$

del problema (2.1). En consecuencia, toda solución en Y de (2.1) es una solución integral. Sin embargo, la función definida en (2.2) no es necesariamente diferenciable con respecto a t. Para garantizar la recíproca necesitamos imponer condiciones adicionales sobre φ y f . Así tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.6 *Si* $\varphi\in Y$ *y* $f\in C([s,T],X) \cap L^1([s,T],Y)$, *entonces la función* u *definida por* (2.2) *es la única solución en* Y *de* (2.1).

Pasamos ahora al estudio de la dependencia de la solución de (2.1) tanto en el dato inicial como en los coeficientes de la ecuación. Consideremos el problema

$$\begin{cases} \partial_t\bar{u}(t) = \bar{A}(t)\bar{u}(t) + \bar{f}(t) & 0 \leq s \leq t \leq T \\ \bar{u}(s) = \bar{\varphi}\,. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Supongamos que las hipótesis del Teorema 2.4 son satisfechas por la familia $\{\bar{A}(t)\}_{t\in I}$ con el mismo espacio Y e idéntico isomorfismo S; en particular

$$S\bar{A}(t)S^{-1} = \bar{A}(t) + \bar{B}(t)$$

con $\bar{B}$: $I \to L(X)$ fuertemente medible y limitada. Asi que el operador de evolución $\{\bar{U}\,(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ existe. Tenemos, entonces, el siguiente Teorema de Perturbación.

Teorema 2.7 *Sean* φ, $\overline{\varphi}\in Y$ *y* f, $\overline{f}\in L^1([s,T],Y)$. *Si* u *y* $\overline{u}$ *son las soluciones correspondientes de* (2.1) *y* (2.3), *entonces*

$$\|\overline{u}-u\|_{\infty,Y}\leq K\left[\,\|\overline{\varphi}-\varphi\|_Y+\|\overline{f}-f\|_{1,Y}+\|(\overline{B}-B)Su\|_{1,X}+\|h\|_{\infty,X}\,\right]$$

donde $K=K\left(\|\overline{U}\|_{\infty,L(X)},\ \|\overline{B}\|_{\infty,X}\right)$, *y*

$$h(t)=W(t,0)S\varphi+\int_s^t W(t,r)\,[Sf(r)-B(r)\,Su(r)]dr$$

con $W(t,s)=\overline{U}(t,s)-U(t,s)$.

El Teorema 2.7 estima $\overline{u}-u$ uniformemente en la norma $\|.\|_Y$, si u y $\overline{u}$ son las soluciones integrales de (2.1) y (2.3) respectivamente. De esta forma, el resultado da la dependencia de la solución del problema (2.1) cuando φ es sometido a pequeñas perturbaciones.

Consideremos la secuencia de problemas de Cauchy en X

$$\begin{cases}\partial_t u(t)=A_n(t)u_n(t)+f_n(t) & 0\leq s\leq t\leq T\\ u_n(s)=\varphi_n\end{cases}\tag{2.4}$$

de tipo hiperbólico. Supongamos que para cada $n\in\mathbf{N}^+$ la familia $\{A_n(t)\}_{t\in I}$ satisface las hipótesis del Teorema 2.4, con el mismo espacio Y e idéntico isomorfismo S; en particular

$$SA_n(t)S^{-1}=A_n(t)+B_n(t)$$

con $B_n : I\to L(X)$ fuertemente medible y limitada. Denotemos por $\{U_n(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ los sistemas de evolución asociados.

Si la familia $\{\|B_n\|_{1,X}\}_{n=1}^{\infty}$ es limitada para cada $n\in\mathbf{N}^+$, los sistemas de evolución $\{U_n(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ asociados a $\{A_n(t)\}_{t\in I}$ son uniformemente limitados tanto en $L(X)$ como en $L(Y)$. Así, la solución integral de (2.3) es

$$u_n(t)=U_n(t,s)\varphi_n+\int_s^t U_n(t,r)f_n(r)dr.$$

Teorema 2.8 *Bajo las hipótesis anteriores, si*

$$A_n(t)\to A(t)\ \textit{fuertemente en}\ L(Y,X)\ \textit{c.t.p.}\ t\in I,$$

y

$$\lim_{m(E)\to 0} \int_E \|A_n(t)\|_{L(Y,X)}\, dt = 0 \quad \textit{uniformemente en } n,$$

donde $m(\cdot)$ *es la medida de Lebesgue. Entonces* $U_n(t,s) \to U(t,s)$ *fuertemente en* $L(X)$ *uniformemente en relación a* $(t,s)\in\Delta$. *Además, si* $\varphi_n \to \varphi$ *en* X *y* $f_n \to f$ *en* $L^1([s,T], Y)$, *entonces* $u_n \to u$ *en* $C([s,T],X)$.

El Teorema 2.8 da condiciones suficientes para la convergencia de las soluciones integrales u_n de (2.4) a la solución integral del problema (2.1). Los Teoremas 2.7 y 2.8 serán utilizados en la Sección 4, para establecer la dependencia continua del dato inicial para las ecuaciones cuasi lineales.

3. Enunciado de Los Teoremas Principales

En esta sección consideramos el problema (1.1) en el espacio de Banach X. Enunciamos dos teoremas, uno de existencia y unicidad, y el otro de dependencia continua de la solución en el dato inicial.

Formulamos las siguientes hipótesis.

Hipótesis 1. *Sean* X *e* Y *dos espacios de Banach reflexivos tales que* Y *está contenido densa y continuamente en* X. *Además, existe un isomorfismo* S: $Y \to X$ *y la norma de* Y *es escogida de forma que* S *sea una isometría.*

Para el operador lineal A tenemos

Hipótesis 2. *Para cada* $(t,w)\in I\times W$, $A(t,w)\in G(X{:}\ 1,\omega)$ *en donde* W *es la bola abierta* $B(w_0,r)$ *en* Y *y* ω *es un número real.*

Hipótesis 3. *Para cada* $(t,w)\in I\times W$ *tenemos*

$$SA(t,w)S^{-1} = A(t,w) + B(t,w) \tag{3.1}$$

donde

$$B(t,w)\in L(X) \quad y \quad \|B(t,w)\|_{L(X)} \le \lambda_1$$

con $\lambda_1 > 0$ *una constante.*

Hipótesis 4. *Para cada* $(t,w)\in I\times W$ *tenemos* $A(t,w)\in L(Y,X)$, *en el sentido que* $Y \subseteq D(A(t,w))$ *y* $A(t,w)|_Y \in L(Y,X)$. *Además, para cada*

$w \in W$ la aplicación $t \in I \mapsto A(t,w)$ *es continua en la norma de* $L(Y,X)$ *y para* $t \in I$ *la aplicación* $w \in W \mapsto A(t,w)$ *es Lipschitz continua en* $L(Y,X)$, *es decir*

$$\| A(t,w_1) - A(t,w_2) \|_{L(Y,X)} \leq \mu_1 \|w_1 - w_2 \|_X$$

donde μ_1 *es una constante.*

Hipótesis 5. *Para todo* $(t,w) \in I \times W$ *tenemos que* $A(t,w)w_0 \in Y$ *y*

$$\| A\ (t,w)w_0 \|_Y \leq \lambda_2\ , \quad t \in I \quad y \quad w \in W.$$

Finalmente, para la función f suponemos

Hipótesis 6. *La función* $f\colon I \times W \to Y$ *es limitada,*

$$\| f(t,w) \|_X \leq \lambda_3, \quad t \in I \quad y \quad w \in W.$$

Para cada $w \in W$, $t \in I \mapsto f(t,\omega)$ *es continua de* I *en* X *y para cada* $t \in I$ *la aplicación* $w \in W \mapsto f(t,w)$ *es Lipschitz en* X, *esto es*

$$\| f(t,w_1) - f(t,w_2) \|_X \leq \mu_2 \|w_1 - w_2\|_X$$

donde μ_2 *es una constante.*

Podemos ahora enunciar el teorema de existencia y unicidad para (1.1).

Teorema 3.1 *Supongamos que el problema* (1.1) *satisface las Hipótesis 1 a 6. Si* $\varphi \in W$, *entonces existen* $T_0 \in (0,T]$ *y una única solución*

$$u \in C([0,T_0],\ Y) \cap C^1([0,T_0],X)$$

del problema (1.1).

Para formular la dependencia continua de la solución u del problema (1.1) en el dato inicial φ, consideramos la secuencia de problemas

$$\begin{cases} \partial_t u_n(t) + A_n(t,u_n)u_n(t) = f_n(t,u_n) & 0 \leq t \leq T \\ u_n(0) = \varphi_n \end{cases} \tag{3.2}$$

de tipo hiperbólico en X donde $n \in \mathbf{N}^+$. Además de las hipótesis anteriores, con los mismos Y, S y W asumimos también:

Hipótesis 7. *Existe* $\mu_3 > 0$ *tal que*

$$\|B(t,w_1) - B(t,w_2)\|_{L(X)} \leq \mu_3 \|w_1 - w_2\|_Y$$

para todo $t \in I$ *y* $w_1, w_2 \in W$.

Hipótesis 8. *Existe* $\mu_4 > 0$ *tal que*

$$\|f_n(t,w_1) - f_n(t,w_2)\|_Y \leq \mu_4 \|w_1 - w_2\|_Y$$

para todo $t \in I$ *y* $w_1, w_2 \in W$.

Así tenemos,

Teorema 3.2 *Supongamos que* (3.2) *satisface las Hipótesis 1 a 8 uniformemente*[1] *en* $n \in \mathbf{N}^+$. *Supongamos también que para cada* $(t,w) \in I \times W$

$$A_n(t,w) \xrightarrow{S} A(t,w) \ \ en \ \ L(Y,X) \tag{3.3}$$

$$B_n(t,w) \xrightarrow{S} B(t,w) \ \ en \ \ L(X) \tag{3.4}$$

$$f_n(t,w) \xrightarrow{S} f(t,w) \ \ en \ \ Y \tag{3.5}$$

cuando $n \to \infty$. *Entonces si* $\varphi, \varphi_n \in W$ *y* $\varphi_n \to \varphi$ *en* Y *cuando* $n \to \infty$, *existen* $T_1 \in (0,T]$ *y soluciones únicas*

$$\begin{gathered} u_n \in C([0,T_1],Y) \cap C^1([0,T_1],X) \\ u_n(0) = \varphi_n \end{gathered} \tag{3.6}$$

para (3.2), *y una única solución* $u \in C([0,T_1],Y) \cap C^1([0,T_1],X)$ *para* (1.1) *y* $u_n(t) \to u(t)$ *en* Y, *uniformemente en* $t \in [0,T_1]$.

En [K3] se aplicó la teoría a una variedad de problemas, sin embargo, para aplicarla a otras ecuaciones en derivadas parciales con espacios de funciones apropiados, se requiere extenderla al caso de los espacios de Banach no reflexivos. En [S] y [K-S] se eliminó con éxito la condición de reflexividad, abriendo el camino para tratar con problemas en pares de espacios como $Y = C^1(\mathbf{R}^n)$ y $X = C(\mathbf{R}^n)$, etc. Pero ellos todavía utilizan el

---

[1] *Esto quiere decir que las constantes* λ_i *y* μ_i *son independientes de* n.

isomorfismo S, el cual no se ve que existe entre un par de espacios como el mencionado antes, excepto cuando $n = 1$.

En [K6] se consigue con éxito eliminar la reflexividad de los espacios de Banach X e Y, y a su vez relajar las condiciones impuestas al isomorfismo S. Esto se logra, utilizando un operador lineal cerrado S de X a un tercer espacio de Banach Z tal que $D(S) = Y$, y sustituyendo (3.1) por la "condición entrelazante"

$$Se^{-sA(t,u)} \supset e^{-s\hat{A}(t,u)}S, \qquad s \geq 0.$$

En esta relación $\hat{A}(t,u)$ es un operador en Z, relacionado con $A(t,u)$ por

$$\hat{A}(t,u) = \tilde{A}(t,u) + B(t,u)$$

donde $\tilde{A}(t,u)$ es una "sombra" de $A(t,u)$ y $B(t,u)$ es una perturbación limitada. Por "sombra" entendemos que $\tilde{A}(t,u)$ es la imágen de $A(t,u)$ por un cierto homomorfismo no expansivo y fuertemente continuo Σ de $L(X)$ en $L(Z)$, el cual se extiende a una aplicación de $G(X: M,\omega)$ en $G(X: M,\omega)$ de una forma natural. Así $\tilde{A}(t,u)$ y $\hat{A}(t,u)$ serán también generadores negativos de C_0-semigrupos en Z.

4. Demostración de los Teoremas 3.1 y 3.2

Antes enunciemos el siguiente lema, que sigue inmediatamente de la Hipótesis 1, y será utilizado en las demostraciones.

Lema 1. *Si la función $g: I \to X$ es limitada en la norma de Y y continua en la norma de X, entonces g es débilmente continua (y fuertemente medible) como una función con valores en Y.*

4.1 Prueba del Teorema 3.1

Como W es una bola abierta en Y que contiene a φ, podemos elegir $R > 0$ tal que $\varphi \in B(w_0, R)$ y $B[w_0, R] \subset W$. Consideremos el conjunto

$$E = \{v: I \to Y \mid \|v(t) - w_0\|_Y \leq R, \text{ con } v \in C([0,T_0], X)\}$$

donde $T_0 \in I$ será determinado posteriormente. Si $v \in E$ definimos

$$A^v(t) = A(t, v(t)) \text{ y } f^v(t) = f(t, v(t)).$$

Debido a la Hipótesis 2, la familia $\{A^{v}(t)\}_{t\in I}$ es estable con constantes de estabilidad $(1,\omega)$.

Proposición 1. *La función* $t\in I \mapsto A^{v}(t)\in L(Y,X)$ *es continua en la norma* $L(Y,X)$.

Prueba.
Tenemos que $A^{v}(t) = A(t,v(t))\in L(Y,X)$ y si $t_0\in[0,T_0]$ por la Hipótesis 4

$$\begin{aligned}
&\|A^{v}(t) - A^{v}(t_0)\|_{L(Y,X)} \\
&\qquad = \|A(t,v(t)) - A(t_0,v(t_0))\|_{L(Y,X)} \\
&\qquad \le \|A(t,v(t)) - A(t,v(t_0))\|_{L(Y,X)} + \|A(t,v(t_0)) - A(t_0,v(t_0))\|_{L(Y,X)} \\
&\qquad \le \mu_1 \|v(t) - v(t_0)\|_X + \|A(t,v(t_0)) - A(t_0,v(t_0))\|_{L(Y,X)}
\end{aligned}$$

y como la función $A(\bullet,v(t_0))$ es continua $\|A^{v}(t) - A^{v}(t_0)\|_{L(Y,X)} \xrightarrow{t \to t_0} 0$. □

Por la Hipótesis 3, tenemos

$$SA^{v}(t)S^{-1} = A^{v}(t) + B^{v}(t), \tag{4.1}$$

donde

$$B^{v}(t) = B(t,v(t)) \in (X) \quad \text{y} \quad \|B^{v}(t)\|_{L(X)} \le \lambda_1 . \tag{4.2}$$

Proposición 2. *La función* $t\in I \mapsto B^{v}(t) \in L(X)$ *es débilmente continua (por lo tanto fuertemente medible).*

Prueba.
Si $y\in Y$, por (4.1) tenemos

$$S^{-1}B^{v}(t)y = A^{v}(t)S^{-1}y - S^{-1}A^{v}(t)y. \tag{4.3}$$

Como $S^{-1}y\in Y$, sigue de la Proposición 1 que el segundo miembro de (4.3) es continuo en t en la norma de X. De ahí que $t\mapsto S^{-1}B^{v}(t)y$ tiene esta propiedad. Más aún

$$\| S^{-1}B^{v}(t)\|_{L(X)} \le \|S^{-1}\|_{L(X)} \|B^{v}(t)\|_{L(X)} \le \lambda_1 \|S^{-1}\|_{L(X)}$$

por (4.2) y puesto que Y es denso en X, entonces $t\in[0,T_0] \mapsto S^{-1}B^{v}(t)$ es continua para todo $x\in X$. Además, esta función es uniformemente limitada en Y pues

$$\| S^{-1} B^{v}(t)x\|_Y = \|B^{v}(t)x\|_X \leq \lambda_1 \|x\|_X .$$

Entonces por el Lema 1, $t\in[0,T_0] \mapsto S^{-1} B^{v}(t)x\in I$ es débilmente continua. En consecuencia $t\in[0,T_0] \mapsto B(t)\in L(X)$ es débilmente continua. □

Las Proposiciones 1 y 2 muestran que las Hipótesis H.1, H.2 y H.3 del Teorema 2.4 son satisfechas por la familia $\{A^{v}(t)\}_{t\in I}$. Existe, por tanto, un único sistema de evolución $\{U^{v}(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ con las propiedades E.1 a E.5 .

Proposición 3. *$\|f^{v}(t)\|_Y \leq \lambda_3$ para todo $t\in[0,T]$ y $t\mapsto f(t,v(t))$ es continua en la norma de X y débilmente continua (luego fuertemente medible) como función con valores en Y.*

Prueba.
La desigualdad sigue trivialmente de la Hipótesis 6. Además,

$$\begin{aligned}\|f^{v}(t)-f^{v}(t_0)\|_X &\leq \|f(t,v(t))-f(t,v(t_0))\|_X + \|f(t,v(t_0))-f(t_0,v(t_0))\|_X\\ &\leq \mu_2 \|v(t)-v(t_0)\|_X + \|f(t,v(t_0))-f(t_0,v(t_0))\|_X\end{aligned}$$

por la Hipótesis 6 y la definición E; así la continuidad de f^{v} en la norma de X sigue inmediatamente. La última parte de la Proposición es consecuencia de las dos primeras y el Lema 1. □

Por la Proposición 3 y el Teorema 2.6 obtenemos la solución única $u^{v}(t)$ del problema

$$\begin{cases}\partial_t u^{v}(t) = A^{v}(t)u^{v}(t) + f^{v}(t), & 0\leq t\leq T\\ u^{v}(0)=\varphi\end{cases}$$

la cual es dada por

$$u^{v}(t) = U^{v}(t,0)\varphi + \int_0^t U^{v}(t,r) f^{v}(r)dr$$

y

$$u^{v}\in C([0,T_0],Y)\cap C^1([0,T_0],X) \tag{4.4}$$

una vez que $\varphi\in Y$ y $f^{v}\in C([0,T_0],X)\cap L^{\infty}([0,T_0],Y)$.

Proposición 4. *Existe $T_0\in I$ tal que la aplicación $v\in E\mapsto\Phi(v) = u^{v}$ transforma E* en E.

Prueba.
Debido a (4.4) tenemos que $u^{\nu} \in C([0,T_0],X)$ para todo $T_0 \in (0,T]$. Resta probar que existe T_0 tal que $u^{\nu}(t) \in B[w_0,R]$ cualquiera que sea $t \in [0,T_0]$. Observemos que $\{U^{\nu}(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ satisface E.3 del Teorema 2.4, luego

$$U^{\nu}(t,0)w_0 - w_0 = \int_0^t \partial_r U^{\nu}(t,r) f^{\nu}(r)dr = \int_0^t U^{\nu}(t,r) A^{\nu}(r) w_0 \, dr.$$

Entonces

$$\begin{aligned} u^{\nu}(t) - w_0 &= U^{\nu}(t,0)\varphi + \int_0^t U^{\nu}(t,r) f^{\nu}(r)dr - w_0 \\ &= U^{\nu}(t,0)(\varphi - w_0) + U^{\nu}(t,0)w_0 - w_0 + \int_0^t U^{\nu}(t,r) f^{\nu}(r)dr. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$u^{\nu}(t) - w_0 = U^{\nu}(t,0)(\varphi - w_0) + \int_0^t U^{\nu}(t,r) \, | f^{\nu}(r) + A^{\nu}(r) w_0 | \, dr.$$

Como $\|S\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = \|S^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = 1$, $A^{\nu}(t) \in G(X\colon 1,\omega)$ y $\|B^{\nu}(t)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \lambda_1$, por las Hipótesis 1, 2 y (4.2) respectivamente, tenemos por E.6 que

$$\|U^{\nu}(t,s)\|_{\mathcal{L}(Y)} \leq \exp T_0(\omega + \lambda_1).$$

Además, $\|A^{\nu}(s)w_0\|_Y \leq \lambda_2$ por la Hipótesis 5 y $\|f^{\nu}(s)\|_Y \leq \mu_1$ por la Proposición 3. En consecuencia

$$\begin{aligned} &\|u^{\nu}(t) - w_0\|_Y \\ &\leq \|U^{\nu}(t,0)(\varphi - w_0)\|_Y + \int_0^t \|U^{\nu}(t,r)\,[f^{\nu}(r) + A^{\nu}(r)w_0\|]_Y \, dr \\ &\leq \|U^{\nu}(t,0)\|_{\mathcal{L}(Y)} \|\varphi - w_0\|_Y + \int_0^t \|U^{\nu}(t,r)\|_{\mathcal{L}(Y)} [\|f^{\nu}(r)\|_Y + \|A^{\nu}(r)w_0\|_Y]dr \\ &\leq e^{T_0(\omega+\lambda_1)} \|\varphi - w_0\|_Y + \int_0^t e^{T_0(\omega+\lambda_1)}(\lambda_2 + \lambda_3)dr \end{aligned}$$

entonces

$$\|u^{\nu}(t) - w_0\|_Y \leq e^{T_0(\omega+\lambda_1)}[\|\varphi - w_0\|_Y + T_0(\lambda_2 + \lambda_3)]. \tag{4.5}$$

Como $\|\varphi - w_0\|_Y < R$ es posible elegir $T_0 > 0$ de modo que el segundo miembro de (4.5) sea menor que R, lo que prueba el Lema. □

Ahora si $v,w \in E$ consideramos la métrica

$$d(v,w) = \sup_{0 \le t \le T_0} \|v(t) - w(t)\|_X .$$

Proposición 5. *(E,d) es un espacio métrico completo.*

Prueba.

Supongamos que $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una secuencia de Cauchy en E, entonces existe $v \in C([0,T_0], X)$ tal que $\|v_n(t) - v(t)\|_X \to 0$ uniformemente en $[0,T_0]$. Además

$$\|v_n(t)\|_Y \le \|v_n(t) - \varphi\|_Y + \|\varphi\|_Y \le R + \|\varphi\|_Y$$

para todo $n \in \mathbb{N}^+$ y $t \in [0,T_0]$. Fijando $t \in [0,T_0]$, de la reflexividad de Y[2] existe $y \in Y$ y una subsecuencia $\{v_{n_k}(t)\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$v_{n_k}(t) \to y \text{ débilmente en } Y.$$

Pero $X' \subset_{\to} Y'$, así

$$v_{n_k}(t) \to y \text{ débilmente en } X.$$

Por lo tanto $y = v(t)$ y $v_{n_k}(t) \to v$ débilmente en Y. Como $B[w_0,R]$ es un conjunto convexo y cerrado en Y, es débilmente cerrado. Entonces $v(t) \in B[w_0,R]$. Como $t \in [0,T_0]$ fué arbitrario, tenemos $v \in E$ y es completo. □

Proposición 6. *Existe $T_0 \in I$ tal que $\Phi: E \to E$ es una contracción.*

Prueba.

Utilizando las ecuaciones

$$[\Phi(v)](t) = u^v(t) = U^v(t,0)\varphi + \int_0^t U^v(t,r) f^v(r)dr$$
$$[\Phi(w)](t) = u^w(t) = U^w(t,0)\varphi + \int_0^t U^w(t,r) f^w(r)dr$$

tenemos que

---

[2] *Si X es un espacio de Banach reflexivo y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una secuencia limitada en X, entonces existe una subsecuencia de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge en la topología $\sigma(X,X')$.*

$$u^{v}(t) - u^{w}(t) = [U^{v}(t,0) - U^{w}(t,0)]\varphi + \int_0^t U^{v}(t,r) f^{v}(r) - f^{w}(r)]dr$$
$$+ \int_0^t [U^{v}(t,r) - U^{w}(t,r)] f^{w}(r)dr \quad (4.6)$$

Es fácil ver que

$$[U^{v}(t,0) - U^{w}(t,0)]\varphi = \int_0^t U^{v}(t,r)[A^{v}(v) - A^{w}(r)]\, U^{w}(r,0)dr$$

y

$$\int_0^t [U^{v}(t,r) - U^{w}(t,r)] f^{w}(r)dr$$
$$= \int_0^t \int_0^r U^{v}(t,r)[A^{v}(r) - A^{w}(r)]\, U^{w}(r,s) f^{w}(s)dsdr$$

Sustituyendo en (4.6) tenemos

$$u^{v}(t) - u^{w}(t) = \int_0^t U^{v}(t,r)[A^{v}(r) - A^{w}(r))\, u^{w}(r) + f^{v}(r) - f^{w}(r)]dr\,.$$

Como $\|U^{v}(tr)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega T_0}$ sigue que

$$d(u^{v},u^{w}) \leq e^{\omega T_0}\, \| f^{v} - f^{w} \|_{1,X} + \|(A^{v} - A^{w})u^{w}\|_{1,X}\,. \quad (4.7)$$

Pero, por la Hipótesis 6 tenemos que $\|f^{v}(t) - f^{w}(t)\|_X \leq \mu_2 \|v(t) - w(t)\|_X$ y así

$$\| f^{v} - f^{w} \|_{1,X} \leq \mu_2\, T_0\, d(v,w).$$

Además

$$\|(A^{v}(t) - A^{w}(t))u^{w}(t)\|_X \leq \|A^{v}(t) - A^{w}(t)\|_{\mathcal{L}(Y,X)}\, \|u^{w}(t)\|_Y$$
$$\leq \mu_1\, d(v,w) T_0\, (\|\varphi\|_Y + R)\,,$$

por lo tanto

$$\|(A^{v} - A^{w})u^{w}\|_X \leq \mu_1\, T_0\, (\|\varphi\|_Y + R)\, d(v,w).$$

Sustituyendo en (4.7),

$$d(u^{v},u^{w}) \leq T_0\, e^{\omega T_0}\, [\mu_2 + \mu_1\, (\|\varphi\|_Y + R)]\, d(v,w) \quad (4.8)$$

lo que prueba la Proposición.

Aplicando el Principio de Contracción a Φ: $E \to E$ existe una única u tal que $\Phi(u) = u$, esto es $u(t) = \Phi(u)(t)$, que es la solución procurada.

4.2 Prueba del Teorema 3.2

Sean E el espacio de funciones definido en la prueba del Teorema 3.1, y para cada $v \in E$ consideremos la secuencia de problemas lineales

$$\begin{cases} \partial_t u_n(t) + A_n^v(t)\, u_n(t) + f_n^v(t), & 0 \le t \le T_0 \\ u_n(0) = \varphi_n, \end{cases} \tag{4.9}$$

donde

$$A_n^v(t) = A_n(t, v(t)) \quad \text{y} \quad f_n^v(t) = f_n(t, v(t)).$$

Procediendo con cada $n \in \mathbf{N}^+$ como en la prueba del Teorema 3.1, encontramos una única solución $u_n : [0,T_0] \to X$ del problema (4.9) tal que $u_n \in E$ si T_0 es bastante pequeño. Así la función Φ_n: $E \to E$ definida por $\Phi_n(v) = u_n$ es una contracción, y el punto fijo correspondiente es la solución de (3.2). De la uniformidad de las hipótesis y las relaciones (4.5) y (4.8), es fácil verificar que la elección de T_0 y el factor de contracción $\gamma < 1$ de Φ_n no dependen de n, y por lo tanto, serán considerados iguales. Además, sin pérdida de generalidad, vamos a suponer que el tiempo de existencia de la solución y el factor de contracción para (1.1) son también T_0 y γ.

Proposición 7. $\|u_n(t) - u(t)\|_X \to 0$ *uniformemente para* $t \in [0,T_0]$.

Prueba.
Como $\Phi_n(u_n) = u_n$ e $\Phi(u) = u$ tenemos

$$\sup_{0 \le t \le T_0} \|u_n(t) - u(t)\|_X = d(u_n,u)$$

y

$$\begin{aligned} d(u_n,u) &= d(\Phi_n(u_n), \Phi(u)) \le d(\Phi_n(u_n), \Phi_n(u)) + d(\Phi_n(u), \Phi(u)) \\ &\le \gamma\, d(u_n,u) + d(\Phi_n(u), \Phi u)). \end{aligned}$$

Entonces

$$(1 - \gamma)d(u_n, u) \leq d(\Phi_n(u), \Phi(u))$$

es decir

$$\sup_{0\leq t\leq T_0} \|u_n(t) - u(t)\|_X \leq \frac{1}{1-\gamma} d(\Phi_n, (u), \Phi(u)). \tag{4.10}$$

Probemos que $\lim_{n\to\infty} d(\Phi_n(v), \Phi_n(v)) = 0$ para todo $v \in E$. En efecto, consideramos el problema lineal

$$\begin{cases} \partial_t u^v(t) + A^v(t)\, u^v(t) + f^v(t) & \text{para } 0 \leq t \leq T_0 \\ u^v(0) = \varphi \end{cases} \tag{4.11}$$

de las hipótesis $\varphi_n \to \varphi$ en X,

$$A_n^v(t) - A^v(t) = A_n(t, v(t)) - A(t, v(t)) \xrightarrow{S} 0 \text{ en } L(Y,X)$$

y

$$f_n^v(t) - f^v(t) = f_n(t, v(t)) - f(t, v(t)) \to 0 \text{ en } Y.$$

Además, como $\|A_n(T,w)\|_{L(Y,X)}$ es fuertemente limitada en t, w y n, tenemos

$$\lim_{m(E)\to 0} \int_E \|A_n^v(t)\|_{L(Y,X)}\, dt = 0$$

uniformemente en n. Entonces, aplicando el Teorema 2.8 tenemos que la solución v_n de (4.9), es tal que $v_n \to v$ en $C([0,T_0], X)$ cuando $n\to\infty$. Así, en (4.10) $\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq t\leq T_0} \|u_n(t) - u(t)\|_X = 0$. □

Como u_n es la solución de

$$\begin{cases} \partial_t u_n(t) + A_n^{u_n}(t)\, u_n(t) + f_n^{u_n}(t) & \text{para } 0 \leq t \leq T_0 \\ u_n(0) = \varphi_n, \end{cases}$$

tenemos por el Teorema 2.7

$$\|u_n - u\|_{\infty,Y} \leq K\, [\ \|\varphi_n - \varphi\|_Y + \|f_n - f\|_{1,Y} + \|(B_n - B)Su\|_{1,X} + \|h\|_{\infty,X}\ ] \quad (4.12)$$

donde

$$f_n\,(t) = f_n\,(t,u_n\,(t)), \quad B_n\,(t) = B_n\,(t,u_n\,(t)),$$

$$f_n\,(t) = f_n\,(t,u_n\,(t)), \quad B\,(t) = B\,(t,u\,(t)),$$

y

$$\begin{cases} h_n(t) = [U_n(t,s) - U(t,0)]S\varphi + \int_0^t [U_n(t,s) - U(t,s)]g(s)ds \\ g(t) = Sf(t) - B(t)Su(t) \end{cases}$$

donde U_n y U son los operadores de evolución para (2.3) e (4.11) respectivamente, y $K = K(R,T_0)$ es una constante. De la Hipótesis 8 tenemos que

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{1,Y} &= \int_0^{T_0} \|f_n\,(t,u_n\,(t)) - f\,(t,u(t))\|_Y\,dt \\ &\leq \mu_4\,T_0\,\|u_n - u\|_{\infty,Y} + \int_0^t \|(f_n - f)\,(t,u(t))\|_Y\,dt. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Además de la Hipótesis 8, 7 y $\|Su(t)\|_X \leq \|u(t)\| \leq \|y_0\|_Y + R$, tenemos

$$\begin{aligned} &\|(B_n - B)Su\|_{1,X} \\ &\leq \int_0^t \|[B_n\,(t,u_n\,(t)) - B(t,u(t))]Su(t)\|_X\,dt \qquad (4.14) \\ &\leq \mu_3 \int_0^{T_0} \|u_n\,(t) - u(t)\|_Y\,\|Su(t)\|_X\,dt + \int_0^{T_0} \|(B_n - B)\,(t,u(t))Su(t)\|_X\,dt \\ &\leq \mu_3\,T_0\,\|u_n - u\|_{\infty,Y}\,(\|y_0\,\|_Y + R) + \int_0^{T_0} \|(B_n - B)\,(t,u(t))Su(t)\|_X\,dt\,. \end{aligned}$$

Así de (4.13) y (4.14)

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{1,Y} + \|(B_n - B)Su\|_{1,X} \leq\ & [\mu_4 + \mu_3\,(\|w_0\,\|_Y + R)]T_0\,\|u_n - u\|_{\infty,Y} \\ & + \int_0^{T_0} [\|(f_n - f\,)(t,u(t))\|_Y + \|(B_n - B)(t,u(t))Su(t)\|_X]dt. \end{aligned}$$

Eligiendo T_1 suficientemente pequeño para que

$$K\alpha = K[\mu_4 + \mu_3 (\|w_0\|_Y + R)]T_1 < 1,$$

tenemos en (4.12),

$$0 \leq (1 - K\alpha)\|u_n - u\|_{\infty,Y}$$

$$\leq K \left\{ \|\varphi_n - \varphi\|_Y + \|h\|_{\infty,X} + \int_0^{T_0} [\|(f_n - f)(t,u(t))\|_Y + \|(B_n - B)(t,u(t))Su(t)\|_X]dt \right\}$$

Pero cuando $n \to \infty$ tenemos $\|\varphi_n - \varphi\|_Y \to 0$ por hipótesis, y por (3.5)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{T_1} \|(f_n - f)(t,u))\|_Y \, dt = 0.$$

Además, de (3.4) y el Teorema de Convergencia Dominada

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{T_1} \|(B_n - B)(t,u(t))Su(t)\|_X \, dt = 0.$$

Lema 2. $\|h\|_{\infty,X} \to 0$ *cuando* $n\to\infty$.

Prueba.

Por (3.6) es suficiente mostrar que si $n\to\infty$, entonces

$$U_n(t,s) - U(t,s) \xrightarrow{S} 0 \text{ en } L(X) \tag{4.15}$$

uniformemente en $(t,s)\in\Delta$. Notemos que $g\in L^\infty(I(X))$. Como

$$A_n(t,u_n(t)) - A(t,u(t)) = [A_n(t,u_n(t)) - A_n(t,u(t))] + [A_n(t,u(t)) - A(t,u(t))]$$

tenemos que

$$A_n(t,u_n(t)) - A(t,u(t)) \xrightarrow{S} 0 \text{ en } L(X)$$

pues de la Hipótesis 4 y del Lema 7

$$\|A_n(t,u_n(t)) - A_n(t,u(t))\|_{L(Y,X)} \leq \mu_1 \|u_n(t) - u(t)\|_X \to 0$$

uniformemente para $t\in[0,T_1]$, y de (3.3) tenemos

$$A_n(t,u(t)) - A(t,u(t) \xrightarrow{S} 0 \text{ en } L(X).$$

Entonces, por el Teorema 2.8 obtenemos (4.15). □

Por lo tanto en (4.12)

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{\infty,Y} = 0$$

lo que completa la demostración del Teorema 3.2.

5. Aplicación a la ecuación generalizada de Korteweg-de Vries.

En esta ecuación vamos a considerar el problema de Cauchy (5.1) para la ecuación de Korteweg-de Vries generalizada,

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + a(u)\,\partial_x u = 0, & 0 \le t \le T \ \text{ y } \ x \in \mathbf{R} \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases} \tag{5.1}$$

en la cual $a \in C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ y todas las funciones son asumidas con valores en los reales. Probaremos que (5.1) es un problema localmente bien colocado en el espacio de Sobolev $H^s(\mathbf{R})$ con $s \ge 3$, suponiendo que el dato inicial pertenece al mismo espacio. Para esto es suficiente verificar las hipótesis de los Teoremas 3.1 y 3.2.

Denotaremos por $\int$ a la integral sobre todo **R**, y el producto interno y la norma en $H^s(\mathbf{R})$ por $(\cdot\,,\cdot)_s$ y $\|.\|_s$, respectivamente.

Hipótesis 1. Sean $X = L^2(\mathbf{R})$ con producto interno $(\cdot\,,\cdot)$ y norma $\|.\|$, y sea $Y = H^2(\mathbf{R})$ donde $s \ge 3/2$ es un número real fijo. Sabemos que Y está contenido densamente en X.

Definimos S en Y por

$$\widehat{Su}(\xi) = (1+\xi^2)^{s/2}\, \hat{u}(\xi) \quad \text{para } u \in Y.$$

Proposición 8. *$S \in L(Y,X)$ es un isomorfismo isométrico.*

Prueba.

Para cada $u \in Y$ tenemos que $(1+\xi^2)^{s/2}\,\hat{u}(\xi) \in X$, y como la transformada de Fourier es un operador unitario de X en X, tenemos que

$$Su = [(1+\xi^2)^{s/2}\,\hat{u}(\xi)]^{\vee} \in X$$

así $R(S) \subset X$. También, por Plancherel

$$\|Su\|^2 = \|\widehat{Su}\|^2 = \int (1+\xi^2)^s\,|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi = \|u\|_s^2\,.$$

Luego $S \in L(Y,X)$ es una isometría (en consecuencia inyectivo), con imagen $R(S)$ cerrada. Veamos que S es sobreyectivo. Con este fin notemos que si $v \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ entonces

$$\widehat{Su}(\xi) = \hat{v}(\xi) \Leftrightarrow \hat{u}(\xi) = \frac{\hat{v}(\xi)}{(1+\xi^2)^{s/2}}\,.$$

También

$$\int (1+\xi^2)^s\,|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi = \int |\hat{v}(\xi)|^2\,d\xi = \|\hat{v}\|^2 = \|v\|^2\,.$$

Así $u \in H^s(\mathbf{R})$ y $Su = v$. Por lo tanto $C_0^\infty(\mathbf{R}) \subseteq R(S)$. Luego, tomando la clausura en X

$$X = \overline{C_0^\infty(\mathbf{R})} \subseteq \overline{\mathbf{R}(S)} \subseteq \overline{X} = X$$

tenemos que $R(S) = \overline{\mathrm{R}(S)} = X$.

Esto prueba la Hipótesis 1.

Hipótesis 2. Elegido $u_0 \in H^s(\mathbf{R})$, sea $R > \|u_0\|_s$ un número real fijo y consideremos la bola

$$W = B[0,R] = \{v \in H^s(\mathbf{R}) : \|v\|_s \leq R\}.$$

Definimos el operador A_0 por

$$\begin{cases} D(A_0) = H^3(\mathbf{R}) \\ A_0 u = \partial_x^3 u \quad \text{para} \quad u \in D(A_0) \end{cases}$$

Tenemos entonces la siguiente proposición.

Proposición 9. *A_0 es el generador de un C_0-semigrupo de contracciones en X.*

Prueba.

Tenemos que $(A_0 u, u) = 0$ para todo $u \in D(A_0)$.

Antes de continuar con la verificación de la Hipótesis 2, observemos que $\partial_x a(y)(x)$ es continua, pues $a \in C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$, y limitada si $y \in W$. En efecto, notemos primero que $\partial_x y \in L^\infty(\mathbf{R})$ y

$$\|\partial_x y\|_\infty \leq K \|\partial_x y\|_{s-1} \leq K \|y\|_s \leq KR$$

pues

$$\begin{aligned} \|\partial_x y\|^2_{s-1} &= \int (1+\xi^2)^{s-1} |\widehat{\partial_x y}(\xi)|^2 \, d\xi = \int (1+\xi^2)^{s-1} \xi^2 |\hat{y}(\xi)|^2 \, d\xi \\ &\leq \int (1+\xi^2)^s |\hat{y}(\xi)|^2 \, d\xi = \|y\|_s^2 . \end{aligned}$$

Asi

$$\begin{aligned} \|\partial_x a\|_{L^\infty} &= \sup_{x \in \mathbf{R}} [\partial_x a(y)(x)| = \sup_{x \in \mathbf{R}} |\partial_x a(y(x)) \partial_x y(x)| \\ &\leq \|\partial_x y\|_\infty \sup_{x \in \mathbf{R}} |\partial_x a(y(x))| \leq \alpha K R \end{aligned}$$

donde $\alpha = \sup_{x \in \mathbf{R}} |\partial_x a(y(x))| < \infty$.

Para cada $y \in Y$, definimos el operador lineal $A_1(y)$ por

$$\begin{cases} D(A_1(y)) = H^1(\mathbf{R}) \\ A_1(y) u = a(y) \partial_x u \quad \text{para} \quad u \in D(A_1(y)). \end{cases}$$

Vamos a probar las siguientes proposiciones.

Proposición 10. *Para cada* $y \in W$, $A_1(y) - \omega I$ *es disipativo para todo* $\omega \geq \frac{1}{2}\alpha KR$, *donde* K *es una constante que no depende de* $y \in Y$.

Prueba.

Para todo $u \in H^1(\mathbf{R})$ tenemos

$$(A_1(y)u, u) = \int a(y)\partial_x u.u dx = \frac{1}{2}\int a(y)\partial_x u^2 dx$$
$$= \frac{1}{2}\int a(y) . u^2 dx \leq \frac{1}{2} \|\partial_x a\|_{L^\infty} \int u^2 dx \leq \frac{1}{2}\alpha KR \|u\|^2 .$$

Además, si $\omega \geq \frac{1}{2}\alpha KR$ tenemos

$$((A_1(y) - \omega I)u, u) = A_1(y)u, u) - \omega\|u\|^2 \leq \left(\frac{1}{2}\alpha KR - \omega\right)\|u\|^2 \leq 0.$$

Por tanto $A_1(y) - \omega I$ es disipativo para todo $\omega \geq \frac{1}{2}\alpha KR$. □

Proposición 11. *Si* $\omega \geq \frac{1}{2}\alpha KR$, *entonces* $A_1(y) - \omega I$ *es* A_0 *limitado.*

Prueba.

Para todo $u \in Y$ tenemos

$$\|(A_1(y) - \omega I)u\| \leq \|a(y)\partial_x u\| + \|\omega u\| \leq \|a(y)\|_\infty \|\partial_x u\| + \omega\|u\|. \quad (5.2)$$

De la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg obtenemos

$$\|\partial_x u\| \leq M \|\partial^3{}_x u\|^{1/3} \|u\|^{2/3}.$$

Luego, de la desigualdad de Young para todo $\varepsilon > 0$

$$\|\partial_x u\| \leq \varepsilon \|\partial^3{}_x u\| + C(\varepsilon)\|u\| .$$

Tomamos $\varepsilon = \frac{1}{2\|a(y)\|_\infty}$ y sustituyendo en (5.2)

$$\|(A_1(y) - \omega I)u\| \leq \frac{1}{2}\|A_0 u\| + C\|u\| \text{ para todo } u \in D(A_0)$$

lo que prueba la proposición. □

Definimos el operador A por

$$\begin{cases} D(A) = Y \\ A(y) = A_0 + A_1(y) \quad \text{para} \quad y \in D(A). \end{cases}$$

Notemos que para cada $y \in Y$, $D(A(y)) = H^3(\mathbf{R})$ y $A(y)u = \partial^3_x u| + a(y)\partial_x u$.

Proposición 12. *$\{A(y)\}_{y\in W}$ es una familia de operadores lineales en X que generan semigrupos de clase $C_0(1,\omega)$, donde $\omega \geq \frac{1}{2}\alpha KR$.*

Prueba.

De las Proposiciones 11, 12, tenemos que el operador $A(y)$-ωI genera un C_0-semigrupo de contracciones para todo $\omega \geq \frac{1}{2}\alpha KR$.. Así[3], $A(y)$ genera un $C_0(1,\omega)$-semigrupo en X. □

La Proposición 12 prueba la Hipótesis 2.

Hipótesis 3. Sea $S(\mathbf{R})$ el espacio de Schwartz de las funciones en $\mathbf{R}$ rápidamente decrecientes en el infinito. Notemos que si $u \in S(\mathbf{R})$ entonces $Su \in S(\mathbf{R})$ y

$$\partial_x^k Su = S\partial_x^k u \quad \text{para } u \in S(\mathbf{R}) \text{ y } k \in \mathbf{N}. \tag{5.3}$$

Ahora sea M_a el operador de multiplicación por a, esto es

$$M_a\, u(x) = a(y(x))u(x)$$

donde $y \in W$ es arbitrario. Sabemos que $M_a \in L(Y)$.

Usando M_a podemos escribir

$$A(y) = -\partial^3_x - M_a\,\partial_x\,.$$

Luego, si $u \in S(\mathbf{R})$ tenemos, por (5.3), que

$$[SA(y) - A(y)S]u = [SM_a - M_a S](-\partial_x u). \tag{5.4}$$

Probamos la siguiente estimativa.

Proposición 13. *Para todo $u \in S(\mathbf{R})$*

$$\|(SM_a - M_a S)u\| \leq C\|a\|_s\,\|u\|_{s-1}$$

---

[3] *Si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un $C_0(M,0)$-semigrupo en X con generador A-βI, entonces $\{T(t)=e^{\beta t}S(t)\}_{t\geq 0}$ es un $C_0(M,\beta)$-semigrupo en X con generador A. La recíproca también vale.*

Prueba.

Sea $u\in S(\mathbf{R})$ y denotemos $a(x) = a(y(x))$. Entonces

$$[(SM_a - M_a S)u]^\wedge (\xi) = (1+\xi^2)^{s/2} M_a u(\xi) - M_a Su(\xi).$$

Pero $M_a \varphi(\xi) = (\hat{a} * \hat{\varphi})(\xi)$ para toda $\varphi\in S(\mathbf{R})$, luego

$$[(SM_a - M_a S)u]^\wedge (\xi) = (1+\xi^2)^{s/2} (\hat{a} * \hat{\varphi})(\xi) - (\hat{a} * \hat{S}u)(\xi)$$

$$\int \left[(1+\xi^2)^{s/2} - (1+\eta^2)^{s/2}\right] \hat{a}(\xi - \eta)\, \hat{u}(\eta) d\eta. \tag{5.5}$$

Por el Teorema del valor medio tenemos

$$\left| (1+\xi^2)^{s/2} - (1+\eta^2)^{s/2} \right| = s(1+ \theta^2)^{s/2} |\theta|\, |\xi - \eta|$$

donde θ pertenece al intervalo de extremos ξ y η. Así

$$\left| (1+\xi^2)^{s/2} - (1+\eta^2)^{s/2} \right| \leq C(1+ \theta^2)^{(s-1)/2} |\xi-\eta|$$

de donde

$$\left| (1+\xi^2)^{s/2} - (1+\eta^2)^{s/2} \right| \leq C \left[(1+\xi^2)^{(s-1)/2} - (1+\eta^2)^{(s-1)/2}\right] |\xi-\eta|. \tag{5.6}$$

Por tanto, de (5.5) y (5.6) obtenemos

$$\left|[(SM_a - M_a S)u]^\wedge (\xi)\right| \leq C \int \left[(1+\xi^2)^{(s-1)/2} -(1+\eta^2)^{(s-1)/2}\right] |\xi-\eta| \hat{a}(\xi -\eta) \hat{u}(\eta) d\eta.$$

Sea g tal que $\hat{g}(\xi) = |\xi|\, |\hat{a}(\xi)|$, y denotando

$$I_1(\xi) = \int (1+\xi^2)^{(s-1)/2}\, \hat{g}(\xi - \eta)\, |\hat{u}(\eta)|\, d\eta$$
$$I_2(\xi) = \int (1+\xi^2)^{(s-1)/2}\, \hat{g}(\xi - \eta)\, |\hat{u}(\eta)|\, d\eta$$

entonces

$$\left|[(SM_a - M_a S)u]^\wedge (\xi)\right| \leq sI_1(\xi) + sI_2(\xi). \tag{5.7}$$

Sea $\hat{f}_1(\xi) = |\hat{u}(\xi)|$, entonces

$$I_1(\xi) = (1+\xi^2)^{(s-1)/2} (\hat{g} * \hat{f}_1)(\xi) = (1+\xi^2)^{(s-1)/2}\, g \hat{f}_1(\xi).$$

Luego

$$\|I_1\|^2 = \int (1+\xi^2)^{s-1} \mid g\hat{f}_1(\xi)|^2\, d\xi = \|g f_1\|^2_{s-1} \leq C\, \|g\|^2_{s-1}\, \|f_1\|^2_{s-1}$$

pues $s - 1 \geq 2$. Pero,

$$\|f_1\|^2_{s-1} = \int (1+\xi^2)^{s-1} \mid \hat{f}_1(\xi)|^2\, d\xi = \int (1+\xi^2)^{s-1} \mid \hat{u}(\xi)|^2\, d\xi = \|u\|^2_{s-1}$$

y también

$$\|g\|^2_{s-1} = \int (1+\xi^2)^{s-1} \mid \hat{g}(\xi)|^2\, d\xi \leq \int (1+\xi^2)^{s} \mid \hat{a}(\xi)|^2\, d\xi = \|a\|^2_s\, .$$

Por tanto,

$$\|I_1\| \leq C\, \|a\|_s\, \|u\|_{s-1}\, . \tag{5.8}$$

Ahora, si $\hat{f}_2(\xi^2)^{(s-1)/2} \mid \hat{u}(\xi)|$ entonces

$$I_2(\xi) = \int \hat{g}(\xi - \eta)\, \hat{f}_2(\eta) d\eta = (\hat{g} * \hat{f}_2)(\xi).$$

Así, de la desigualdad de Young

$$\|I_2\| = \|\hat{g} * \hat{f}_2\| \leq \|\hat{g}\|_{L^1}\, \|\hat{f}_2\|$$

donde

$$\|\hat{f}_2(\xi)\|^2 = \int (1+\xi^2)^{s-1} \mid \hat{u}(\xi)|^2\, d\xi = \|u\|^2_{s-1}$$

y

$$\|\hat{g}\|_{L^1} = \int |\hat{g}(\xi)| d\xi = \int |\xi|\, |\hat{a}(\xi)|\, d\xi = \int |\xi| \frac{(1+\xi^2)^{1/2}}{(1+\xi^2)^{1/2}} |\hat{a}(\xi)|\, d\xi$$

$$\leq \left(\int \xi^2 (1+\xi^2) \mid \hat{a}(\xi)|\, d\xi\right)^{1/2} \left(\int (1+\xi^2)^{-1/2} d\xi\right)^{1/2} \leq C\, \|a\|_2\, .$$

Luego

$$\|I_2\| \leq C\|a\|_2\, \|u\|_{s-1} \leq C\, \|a\|_s\, \|u\|_{s-1}\, . \tag{5.9}$$

De (5.7), (5.8) y (5.9) obtenemos

$$\|(SM_a - M_a S)u\| = \|[(SM_a - M_a S)u]^\wedge\| \| \leq C\|a\|_s \|u\|_{s-1}$$

lo que completa la prueba. □

Por tanto de (5.4) y la Proposición 13, obtenemos

$$\|[SA(y) - A(y)S]u\| [Sm_a - M_aS] (-\partial_x u)\| \leq C\|a\|_s \|u\|_s ,$$

para todo $u \in S(\mathbf{B})$. Ahora, para cada $y \in W$, definimos el operador lineal $\tilde{B}(y)$ por

$$\begin{cases} D(\tilde{B}(y)) = S(\mathbf{R}) \\ \tilde{B}(y)u = (SA(y) - A(y)S)S^{-1}u \quad \text{para} \quad u \in S(\mathbf{R}). \end{cases} \tag{5.10}$$

Entonces, para todo $u \in S(\mathbf{R})$, tenemos que

$$\|\tilde{B}(y)u\| \leq C \|a\|_s \|S^{-1} u\|_s \leq \|a\|_s \|u\|_{L^2} . \tag{5.11}$$

Así $\tilde{B}(y)$ es un operador lineal limitado. Como $S(\mathbf{R})$ es denso en X, extendemos $\tilde{B}(y)$ a X por continuidad y obtenemos el operador lineal $B(y)$ tal que

$$B(y) \in L(X) \quad \text{y} \quad \|B(y)\|_{L(X)} \leq C\|a\|_s = \lambda_1 \quad \text{para} \quad y \in W.$$

Veamos ahora la siguiente proposición.

Proposición 14. *Para cada $y \in W$ tenemos que $D(SA(y)S^{-1}) = D(A(y))$ y*

$$SA(y)S^{-1} = A(y) + B(y).$$

Prueba.

Sea $y \in W$, $u \in D(A(y)) = H^3$ y $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $S(\mathbf{R})$, tal que $u_n \to u$ en H^3. Entonces (5.10)

$$A(y)S^{-1} u_n = S^{-1} [A(y)u_n + \tilde{B}(y)u_n]$$

y como $B(y)u = \lim_{n\to\infty} \tilde{B}(y) u_n$ obtenemos que

$$A(y)S^{-1} u_n \xrightarrow{X} S^{-1} [A(y)u + B(y)u] \qquad \text{cuando } n\to\infty.$$

Por otro lado $\lim_{n\to\infty} S^{-1} u_n$ en X, y como $A(y)$ es un operador cerrado tenemos que $S^{-1} u \in D(A(y))$ y

$$A(y)S^{-1} u_n \xrightarrow{X} A(y)S^{-1} u \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

Luego

$$A(y)S^{-1} u = S^{-1} [A(y)u + B(y)u] \in H^s .$$

Por lo tanto $u \in D(SA(y)S^{-1})$ y

$$SA(y)S^{-1} u = A(y)u + B(y)u$$

esto prueba que $SA(y)S^{-1}$ es una extensión de $A(y)+B(y)$. Además, si $\lambda > \omega$ entonces $\lambda \in \rho(A(y))$ y

$$S[A(y) - \lambda I]S^{-1} u = A(y)u + B(y)u - \lambda u \qquad \text{para } u \in H^{-3} .$$

En consecuencia

$$S[A(y) - \lambda I]S^{-1} = A(y) + B(y) - \lambda I$$

es decir, $SA(y)S^{-1} = A(y) + B(y)$. □

De (5.11) y la Proposición 14 tenemos la Hipótesis 3.

Hipótesis 4. Vamos a mostrar la siguiente proposición.

Proposición 15. *Para cada* $y \in W$, $D(A(y)) \supseteq Y$, $A(y)$ *es un operador lineal limitado de* Y *en* X, *y existe* $\mu_1 > 0$ tal que

$$\|A(y_1) - A(y_2)\|_{L(Y,X)} \leq \mu_1 \|y_1 - y_2\|_{L^2}$$

para todo $y_1, y_2 \in W$.

Prueba.
Como $s \geq 3$ tenemos que $D(A(y)) = H^3 \supseteq Y$ para cada $y \in W$. Además, para $u \in Y$ tenemos que

$$\|A(y)u\| = \|\partial^3_x u\| + \|a(y)\partial_x u\|$$

$$\leq \|\partial^3_x u\| + \|a\|_{L^\infty} \|\partial_x u\|$$
$$\leq (1 + \|a\|_{L^\infty}) \|u\|_s$$

pues $\|\partial^3_x u\|$ y $\|\partial_x u\|$ no son mayores que $\|u\|_s$. Luego

$$\sup\{\|A(y)u\| : \|u\|_s = 1\} \leq 1 + \|a\|_{L^\infty}$$

y por tanto $A(y)$ es un operador lineal limitado de Y en X. Ahora, si $y_1, y_2 \in W$ entonces para $u \in Y$

$$A(y_1)u - A(y_2)u \leq (a(y_2) - a(y_1))\, \partial_x u$$

así

$$\|A(y_1)u - A(y_2)u\| \leq \|a(y_2) - a(y_1)\| \, \|\partial_x u\|_{s-1}$$
$$\leq \sup_{x \in W} |\partial_x a(x)| \, \|y_1 - y_2\| \, \|u\|_s .$$

Entonces

$$\|A(y_1) - A(y_2)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \sup_{x \in W} |\partial_x a(x)| \, \|y_1 - y_2\|$$

y la prueba está completa. □

Así hemos verficado la Hipótesis 4.

Hipótesis 5. Es trivialmente satisfecha pues $W = B_R[0]$ es una bola centrada en el origen.

Hipótesis 7. Probemos que existe $\mu_3 > 0$ tal que

$$\|B(y_1) - B(y_2)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \mu_3 \|y_1 - y_2\|_s$$

para cada $y_1, y_2 \in W$.

En efecto, es fácil ver que

$$B(y) = [M_a S - S M_a) \partial_x S^{-1}$$

donde $a = a(y)$. Entonces

$$B(y_1 - B(y_2) = [S(M_{a_2} - M_{a_1}) - (M_{a_2} - M_{a_1})S]\,\partial_x S^{-1}.$$

Como $M_{a_2} - M_{a_1} = M_{a_2 - a_1}$, tenemos que

$$B(y_1) - B(y_2) = [S(M_{a_2 - a_1}) - (M_{a_2 - a_1})S]\partial_x S^{-1} = B(y_1 - y_2).$$

Por lo tanto

$$\|B(y_1) - B(y_2)\|_{L(Y,X)} \leq C\|a\,(y_1 - y_2)\|_s \leq C\|y_1 - y_2\|_s$$

esto completa la prueba de la Hipótesis 7.

Hipótesis 6 y 8. Son trivialmente satisfechas pues $f \equiv 0$.

Habiendo verificado las hipótesis de los Teoremas 3.1 y 4.1, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 5.1 *Para todo* $\varphi \in H^s$ *donde* $s \geq 3$, *existe* $T_0 \in \mathbf{R}$ *y una única función*

$$u \in C([0,T_0], H^s) \cap C^1([0,T_0], L^2)$$

tal que u es solución de (5.1), *y u depende continuamente de* φ.

El argumento dado anteriormente muestra que la forma del término ∂_x^3 en (5.1) no tiene significado especial. Este término puede ser substituído por $P(D)u$ con cualquier polinomio P, de grado $m \geq 2$, con la siguiente condición si m es un número par, el signo del coeficiente del término principal debe ser $(-1)^{m/2}$. En este caso se puede elegir $Y = H^s$ con $s \geq m$.

En [K6] Kato probó la existencia, unicidad y dependencia continua del dato inicial para la solución local cuando $\varphi \in H^s$ con $s > \frac{3}{2}$ ($s = \infty$ es incluído). Además, la solución permanece en el mismo espacio del dato inicial. Para aplicar el Teorema 3.1, en este caso, es necesaria una transformación preliminar de la incógnita por

$$u(t) = T(t)v(t), \tag{5.12}$$

donde $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es el C_0-grupo unitario en H^s generado por el operador anti-adjunto ∂_x^3 en cada H^s. Sustituyendo (5.12) en (5.1) obtenemos la ecuación de evolución cuasi lineal para v

$$\partial_t v + A(t,v)v = 0,$$

donde

$$A(t,y) = T(-t)a(T(t)y)\,\partial_t T(t)$$

es un operador lineal que depende de t y de $y \in H^s$. Al verificar las hipótesis correspondientes al Teorema 3.1, el trabajo es análogo, excepto por la Hipótesis 4. En lugar de ésta, se puede probar que

$$t \in [0,T] \longmapsto A(t,y) \in L(Y,X)$$

es fuertemente continua, y no continua en la norma de $L(Y,X)$ como requiere la Hipótesis 4.

Es importante anotar aquí que el resultado de Kobayasi [Ko] para las ecuaciones de evolución lineales, mencionado al final de la sección 2, permite mostrar que es suficiente la continuidad fuerte de

$$t \in [0,T] \mapsto A(t,y) \in L(Y,X)$$

en el caso cuasi lineal. Así el Teorema 3.1 puede ser aplicado.

Referencias.

[A] R. Adams. *Sobolev spaces.* Academic Press, (1975).

[D] J.R. Dorroch. *A simplified proof of a Theorem of Kato Linear Evolution Equations.* J. Math. Soc. of Japan, **27** (1975), 474-478.

[K1] T. Kato. *Linear evolution equations of "Hyperbolic" type.* J. Faculty of Science Univ. of Tokyo, **17** (1970), 241-258.

[K2] T. Kato. *Linear evolution equations of "Hyperbolic" type II.* J.Math. Soc. of Japan, **25** (1973), 648-666.

[K3] T. Kato. *Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations.* Lecture and Notes in Mathematics, **448** (1975), 25-70.

[K4] T. Kato. *On the Korteweg-de Vries equation.* Manuscripta Math., **28** (1979), 89-99.

[K5] T. Kato. *On the Cauchy problem for the (Generalized) KdV equations.* Studies in Applied Mathematics, Advances in Mathematics Supplementary Studies, **8** (1983), 93-128.

[K6] T. Kato. *Abstract evolution equations, linear and quasi linear. Revisited.* Preprint.

[Ko] K. Kobayasi. *On a theorem for linear evolution equations of hyperbolic type.* J. Math. Soc. of Japan, **31** (1979), 647-654.

[K-S] K. Kobayasi, N. Sanekata. *A method of iterations for quasi-linear evolution equations in nonreflexive Banach spaces.* Hiroshima Math. J., **19** (1989), 521-540.

[P] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer-Verlag, (1983).

[S] N. Sanekata. *Abstract quasi-linear equations of evolution in non-reflexive Banach spaces.* Hiroshima Math. J., **19** (1989), 109-139.

jmscott@pucp.edu.pe