Pro Mathematica Vol. XI, Nos. 21-22, 1997

CONVERGÊNCIA NO ESPAÇO DE ORDENS DE UM CORPO FORMALMENTE REAL

José Carlos ***Cifuentes Vásquez***

Introduçâo.

Nesta palestra pretendemos mostrar que a topologia de Harrison do espaço de ordens de um corpo formalmente real é uniformizável, e que o espaço uniforme resultante é Cauchy-completo, explicitando os limites das redes de Cauchy correspondentes. Como corolário teremos que tal espaço é compacto já que, como veremos a estructura uniforme subjacente é totalmente limitada.

✏ *Universidad Federal do Paraná, Departamento de Matemática. Brasil.*

ESTRUCTURA UNIFORME DO ESPAÇO DE ORDENS.

Seja F um corpo, dizemos que F é *formalmente real* se $-1 \notin \Sigma F^2$. Artin e Schreier mostraram que um corpo F é formalmente real se e só se existe uma ordem linear $\leq$ compatível com as operações de F (cf. [Pr], p. 5).

Cada ordem linear compatível $\leq$ sobre F pode ser identificada com um *cone positivo de F*, ie. com um subconjunto $P \subseteq F$ tal que

$$\begin{aligned} &P + P \subseteq P \\ &P \, . \, P \subseteq P \\ &P \cap -P = \{0\} \\ &P \cup -P = F. \end{aligned}$$

A identificação se faz mediante a seguinte tradução: dada uma ordem $\leq$ definese o cone associado como $P_{\leq} = \{x \in F \,/\, x \geq 0\}$, e dado o cone P define-se a ordem associada como $x \leq_P y$ se e só se $y - x \in P$. Esta definição é tal que $\leq_{P_{\leq}} = \leq$ e $P_{\leq_P} = P$.

Seja X_F a coleção de cones positivos de F, ie. a coleção de ordens de F. A *topologia de Harrison* sobre X_F é definida mediante a seguinte sub-base de abertos: $\{H(a)\}_{a \in F}$, onde para cada $a \in F$, $H(a) = \{P \in X_F \,/\, a \in P\}$. Os elementos da base são coleções da forma $H(a_1,\ldots,a_n) = \bigcap_{i=1}^{n} H(a_i)$. Uma propriedade fundamental desta base é que os seus membros são *clopens*, ie. abertos e fechados, o que é uma consequência da identidade $H(a)^c = H(-a)$, válida para $a \neq 0$; para $a = 0$, $H(a) = X_F$ que trivialmente é um clopen.

Un espaço topológico com uma base de clopens é dito um *espço zero-dimensional.*

Num espaço zero-dimensional X, a partir de uma base de clopens $\mathcal{B}$, pode ser definida a seguinte sub-base de uniformidade (cf. [Ke] cap.6): $\{\mathcal{U}_V\}_{V \in \mathcal{B}}$, onde para cada $V \in \mathcal{B}$, $\mathcal{U}_V = \{(x,y) \in X \times X \,/\, x \in V \Leftrightarrow y \in V\}$. Aqui também, a base de uniformidade, que chamaremos de *uniformidade natural*, é obtida mediante interseções finitas dos membros da sub-base.

Uma base de uniformidade captura as propriedades essenciais dos conjuntos $\{\mathcal{U}_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$, definidos no produto cartesiano $M \times M$ de um espaço métrico (M,d), onde para cada $\varepsilon > o$, $\mathcal{U}_\varepsilon = \{(x,y) \in M \times M \,/\, d(x,y) < \varepsilon\}$. Neste caso, as bolas do espaço são obtidas fixando uma coordenada:

$$B_\varepsilon(x) = \mathcal{U}_\varepsilon[x] = \{(x \in M \,/\, (x,y) \in \mathcal{U}_\varepsilon\} = \{y \in M \,/\, d(x,y) < \varepsilon\}.$$

No caso de um espaço zero-dimensional X, as "bolas generalizadas" correspondentes obtém-se como

$$\mathcal{U}_V[x] = \{y \in X \,/\, (x,y) \in \mathcal{U}_V\} = \{y \in X \,/\, x \in V \Leftrightarrow y \in V\} = \begin{cases} V, & \text{se } x \in V \\ V^c, & \text{se } x \notin V \end{cases}.$$

O V substitui o raio do caso métrico.

Esta última propriedade tem como consequência imediata que o espaço uniforme resultante é totalmente limitado (cf. [Ke] p.198) pois, por exemplo, se $V \neq \phi, X$, então, existem $x \in V$ e $y \in V^c$, logo, $X = V \cup V^c = \mathcal{U}_V[x] \cup \mathcal{U}_V[y]$, ie. X é a união finita de "bolas" de "raio" dado.

Na teoria de espços uniformes temos a seguinte caracterização da compacidade:

COMPACIDADE = COMPLETUDE DE CAUCHY + LIMITAÇÃO TOTAL,

sendo que o primeiro membro independe da uniformidade, porém o segundo não. Aqui, um espaço uniforme é dito *Cauchy-completo* se toda rede de Cauchy converge (cf. [Ke] p.198).

No caso da topologia de Harrison, e a respeito da uniformidade natural, ser compacto equivale a ser Cauchy-completo.

Mostraremos que o espaço uniforme subjacente a X_F é Cauchy-completo construindo os limites das redes de Cauchy do espaço.

Se $(D,\leq)$ é um conjunto dirigido, então, uma rede $\{x_i\}_{i \in D}$, num espaço zero-dimensional X, é dita *rede de Cauchy* se para todo $V \in \mathcal{B}$ existe $k \in D$ tal que para $i,j \geq k$, $(x_i, x_j) \in \mathcal{U}_V$; e um ponto $x \in X$ é dito *limite* da rede $\{x_i\}_{i \in D}$ se para $V \in \mathcal{B}$ existe $k \in D$ tal que para todo $i \geq k$, $(x,x_i) \in \mathcal{U}_V$.

No caso de ser X um espaço de Hausdorff os limites são únicos; eles serão demostrados por $x = \lim_i x_i$. O espaço de ordens X_F é Hausdorff pois, se $P,Q \in X_F$ com $P \neq Q$, então, por exemplo, existe $a \in P \backslash Q$, ie. $P \in H(a)$ e $Q \in H(a)^c = H(-a)$. Portanto, os limites das redes em X_F são únicos.

U-CONVERGÊNCIA.

O estudo da convergência das redes de Cauchy num espaço zero-dimensional (que suporemos Hausdorff), e a respeito da uniformidade natural, pode ser feito mediante o estudo de um outro tipo de convergência, a *U*-convergência, cujos limites podem ser calculados explicitamente.

Definição. *Sejam X um espaço zero-dimensional e $\mathcal{B}$ uma base de clopens em X Sejam $\{x_i\}_{i \in D}$ uma rede em X e U um ultrafiltro sobre D* (ie. $U \subseteq P(D)$ *tal que* (a) $\phi \notin U$, (b) $A,B \in U$ *implica* $A \cap B \in U$, (c) $A \in U$ e $A \subseteq B$ *implica* $B \in U$, (d) *para todo* $A \subseteq D$, $A \in U$ *ou* $A^c \in U$). *Definimos o U-limite por:* $x = lim_U\, x_i$ *se e somente se para todo* $V \in \mathcal{B}$, $\{i \in D \,/\, (x,x_i) \in \mathcal{U}_V\} \in U$; *ou equivalente, para todo* $V \in \mathcal{B}$,

$$(*) \qquad x \in V \Leftrightarrow \{i \in D \,/\, x_i \in V\} \in U.$$

Podemos entender a *U*-convergência interpretando o ultrafiltro *U* como uma coleção de suboconjuntos "grandes" de *D* no sentido da teoria da medida. De fato, dado um ultrafiltro *U* sobre *D* pode ser definida uma medida aditiva $\mu_U : P(D) \to \{0,1\}$ por $\mu_U(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } A \in U \\ 0, & \text{se } A \notin U \end{cases}$; analogamente, dada uma medida aditiva μ: $P(D) \to \{0,1\}$ pode ser definido um ultrafiltro U_μ sobre *D* por $U_\mu = \{A \subseteq D \,/\, \mu(A) = 1\}$. Esta definição é tal que $\mu_{U_\mu} = \mu$ e $U_{\mu_U} = U$.

Desde ponto de vista, $x = \lim_U x_i$ se e só se para todo $V \in \mathcal{B}$, $x \in V \Leftrightarrow x_i \in V$ para "quase todo" $i \in D$ (no sentido doultrafiltro *U*).

É consequência imediata da definição que (no caso de ser *X* um espaço de Hausdorff), se existe $\lim_U x_i$, então, é único e $\{\lim_U x_i\} = \cap\{V \in \mathcal{B} / \{i \in D / x_i \in V\} \in U\}$. Daí, se *X* é compacto, a existência de $\lim_U x_i$ estaria garantida por pertencer à interseção de uma família de fechados (básicos) com a Propriedade de Interseção Finita.

CARACTERIZAÇÃO DA COMPLETUDE DE CAUCHY.

O nexo fundamental entre a convergência de uma rede de Cauchy e a *U*-convergência é dado no seguinte *Lema de Convergência* que enunciaremos sem demonstração. Para isso precisamos do seguinte conceito: um ultrafiltro *U* sobre um conjunto dirigido *D* é dito *livre* se contém todos os subconjuntos $A_k = \{i \in D \,/\, i \geq k\}$ para $k \in D$.

Lema de Convergência. *Seja* $\{x_i\}_{i\in D}$ *uma rede de Cauchy em X e U um ultrafiltro livre sobre D. Então,* $lim_i\ x_i$ *també́n existe e, neste caso,* $lim_i\, x_i = \lim_U x_i$. □

A partir daí podemos demonstrar facilmente o seguinte teorema de caracterização da completude de Cauchy e, portanto, da compacidade, de um espaço zero-dimensional.

Teorema 1. *São equivalentes:*

i) *Para toda rede* $\{x_i\}_{i\in D}$ *e todo ultrafiltro u sobre D, existe* $\lim_U x_i$.
ii) *Para toda rede de Cauchy* $\{x_i\}_{i\in D}$ *e todo ultrafiltro livre U sobre D, existe* $\lim_U x_i$.
iii) *O espaço X é Cauchy-completo.*
iv) *O espaço X é compacto.*

Demonstração.
(i $\Rightarrow$ ii): Trivial.
(ii $\Rightarrow$ iii): Consequência imediata do Lema de Convergência.
(iii $\Rightarrow$ iv): Imediato por ser *X* um espaço uniforme totalmente limitado.
(iv $\Rightarrow$ I): Imediato pelo fato de que $\{\lim_U x_i\}$ expressa-se como interseção de uma família de fechados com a Propriedade de Interseção Finita. □

Usando a parte (i) do teorema de caracterização anterior podemos demonstrar que o espaço de ordens X_F de um corpo formalmente real *F* é Cauchy-completo e, portanto, compacto.

Devemos mencionar que as demonstrações usuais da compacidade do espço X_F consistem em mergulhar o espaço como um subespaço fechado do espaço compacto $\{0,1\}^F$, estando $\{0,1\}$ munido da topologia discreta (cf. [Pr] p.91).

Teorema 2. X_F *é Cauchy-completo.*

Demonstração.

Seja $\{P_{i\in D}$ uma rede de cones positivos em X_F e U um ultrafiltro sobre D. O U-limite $P = \lim_U P_i$, se existir, deve satisfazer a seguinte propriedade: para todo $a\in F$, $P\in H(a) \Leftrightarrow \{i\in D \,/\, P_i \in H(a)\}\in U$, ie. $a\in P\Leftrightarrow\{i\in D/a\in P_i\}\in U$, logo, $P = \{a\in F \,/\, \{i\in D \,/\, a\in P_i \}\in U\}= \bigcup_{A\in U} \bigcap_{i\in A} P_i$ (limite-indutivo dos P_i).

Basta provar que tal P é um cone positivo em F e, para tal efeito, usaremos o Teorema de Ultraprodutos de Łós (cf. [B-S] cap. 5).

Consideremos a família de estructuras ordenadas $\{<F,P_i>\}_{i\in D}$. Então, pelo Teorema de Łós, o ultraproduto módulo U da família, $<F^D/U, \Pi_U P_i >$, é um corpo ordenado, sendo F^D/U, salvo identificações, uma extensão (trascendente) de F e $\Pi_U P_i$ um cone positivo em F^D/U tal que

$$(\Pi_U P_i) \cap F = \bigcup_{A\in U} \bigcap_{i\in A} P_i = P.$$

Por tanto, P é cone positivo em F. □

O método seguido pode ser utilizado para demonstrar a completude de Cauchy de, entre outros, o espectro real de um anel con a topologia construtiva (cf. [B-C-R] cap. 7) e, em forma mais geral, do espaço de Stone de uma álgebra de Boole (cf. [Ci]). É importante mencionar que a equivalência (*) que define a U-convergência é a versão topológica do Teorema de Ultraprodutos de Łós.

Referências.

[B-C-R] Bochinak J., Coste, M. e Roy, M-F. *Géométrie Algébrique Réelle.* Springer-Verlag, 1987.

[B-S] Bell, J.L. e Slomson, A.B. *Models and Ultraproducts: An Introduction.* North-Holand Pub. Comp. Amsterdam, 1969.

[Ci] Cifuentes, J.C. *Cauchy Completeness of the Stone Space of a Boolean Algebra.* A aparecer.

[Ke] Kelley, J.L. *General Topology.* D. Van Nostrand Comp. Princeton, 1955.

[Pr] Prestel, A. *Lectures on Formally Real Fields.* IMPA, Rio de Janeiro, 1975.

jccifa@mat.ufpr.br