Pro Mathematica Vol. XI, Nos. 21-22, 1997

LA GEOMETRIA DE DESCARTES

IV Centenario del nacimiento de Descartes

Roberto ***Velásquez***

1. En 1618, concluídos sus estudios formales, quedaba en Descartes un melancólico contraste entre lo apredido en sus libros y la realidad del mundo que lo rodeaba. Galileo, con su telescopio, había descubierto en 1610, las manchas solares, el aspecto de la superficie lunar y las "estrellas mediceas", es decir, los satélites de Júpiter. La tesis de Copérnico triunfa, no es el sol el que gira alrededor de la Tierra: nuestros sentidos nos engañan. Kepler acaba de probar que las órbitas no son circulares: la curva perfecta desaparece del cosmos. Los cielos no son inalterables, la armonía de las esferas es sólo un mito. Aristóteles y Ptolomeo estaban errados: los sabios se equivocan. La Tierra no es más el centro del universo, ni siquiera se puede afirmar que éste tenga centro.

✏ *Profesor del Departamento de Ciencias. PUCP.*

La unidad religiosa estaba rota desde que Lutero fijara sus 95 tesis en Wittenberg: La Guerra de los Treinta Años estaba ad-portas. Nada en la filosofía quedaba fuera de discusión. Nada estaba libre de duda. Entonces, dice Descartes: "*Consideré las innumerables opiniones que acerca de una misma cosa pueden tener los sabios, vi que todas ellas se encuentran con frecuencia muy lejos de la verdad, y desde aquel momento creí falso, o poco menos, todo lo que se presentaba a mi inteligencia aun con el carácter de verosímil*"... "*Me impulsaba el imperioso deseo de aprender a distinguir lo verdadero de lo falso para juzgar mis acciones con claridad y caminar rectamente por la senda de la vida*". Pero ello exigía tener un punto de partida, algo de lo que no pudiera dudar. A Descartes le era posible dudar de todo, pero le era imposible admitir que él, el ser que pensaba, no existiera. Pienso, luego existo. *Cogito, ergo sum.* Sólo un postulado, no un teorema del punto fijo, pero de algo se tiene que partir. El resto, para él, era no aceptar "*en mis juicios sino lo que presente a mi espíritu tan clara y distintamente que yo no tenga forma alguna de ponerlo en duda*". Pero para ello necesitaba un método.

2. La obra fundamental de Descartes es su **Discours de la métohode pour bien conduire la raison et chercher la verité dans les sciences, plus la Dioptrique, les Méteors et la Géométrie, que sont des essais de cette méthode**, que aparece en Leiden en 1637. El Discurso del Método es un escrito de carácter autobiográfico que, como nos dice su autor, no es mas que "*una historia, o si preferís, un cuento*" que hará conocer "*los caminos que he seguido, mostrando mi vida como en un cuadro*".

Hay en la vida de Descartes, según un biógrafo del siglo XVII, Adrien Baillet, una fecha de importancia capital, el 10 de noviembre de 1619. Esa noche, Descartes, quien se hallaba en Francfort con motivo de la coronación del emperador Fernando II, tuvo tres sueños, que según el mismo relata, interpretó, el primero como una advertencia contra los errores pasados, el segundo como la comprensión del espíritu de la verdad, y el tercero como se le abrían los conocimientos de todas las ciencias. En síntesis, si uno cree el cuento, Descartes tuvo una visión onírica de lo que debía ser el método que buscaba. En apariencia, las reglas del método eran simples y consistían en *dividir las dificultades* complejas en simples (análisis); *proceder por orden*, empezando por lo más simple a lo más complejo (síntesis); y *hacer revisiones* generales para tener la seguridad de no haber omitido algo. Empero, aplicar dicho método a casos concretos, de modo que "*aun pensadores mediocres pudieran obtener resultados verdaderos*" era otra

Des minimes de Paris

LA GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision : Ainsi n'a'ton autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Commēt le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

cosa y exigía ejemplos. La Dióptrica, en la que emprende un estudio sobre la naturaleza de la luz; los Meteoros, que incluían una explicación cuantitativa del arco iris; y sobre todo la Geometría, son los ensayos que presenta como ejemplos de aplicación de su método. Sin ellos no puede entenderse el Discurso del Método; sin éste, ciertamente no se puede comprender la razón de su Geometría.

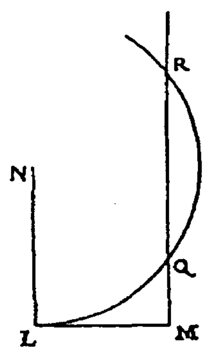
3. La Geometría es el primer texto matemático que puede leerse en la actualidad sin dificultad en lo que a notación se refiere. Descartes introduce el uso de las primeras letras del alfabeto para los valores conocidos y las últimas para las incógnitas, y rompe con la tradición griega de considerar x^2 y x^3 como área de un cuadrado y volúmen de un cubo, respectivamente, interpretándolos como segmentos: pero el libro es parco en explicaciones y en ejemplos, no siendo de descartar que cierta oscuridad haya sido deliberada, como se deduce de la frase final del texto: "*Espero que nuestros descendientes me estarán agradecidos, no sólo por las cosas que aquí he explicado, sino también por aquellas que he omitido voluntariamente a fin de dejarles el placer de descubrirlas*".

Cuando se estudia el texto original, lo primero que se observa es que en él no hay la presentación formal de un sistema de coordenadas rectangulares, pues, por lo general, toma implícitamente como dado un sistema de coordenadas oblícuas ad hoc para el problema que se estudia. No hay fórmulas para distancias, ni pendientes, ni ángulo entre dos rectas, ni otros temas usualmente vinculados a lo que se conoce como Geometría Analítica. Esto no debe extrañar pues la motivación del texto de Descartes es la de mostrar que todo "*problema de geometría puede reducirse fácilmete a términos tales que únicamete sea necesario, para construirlos, conocer la longitud de algunas líneas rectas*", conforme lo precisa en la frase inicial del Libro Primero, titulado **"De los problemas que pueden construirse sin emplear mas que círculos y rectas".**

Los únicos teoremas de geometría clásica usados por Descartes en su Geometría, se reducen a los de semejanza de triángulos y al de Pitagoras. Esto lo confirma él en una carta a la princesa platina Isabel, quien había sido su alumna mientras estuvo refugiada en Holanda, diciendo: "*En la solución de un problema geométrico, tomo cuidado, tanto como me es posible de usar como líneas de referencia rectas paralelas o rectas en ángulos recto, y no uso otros teoremas que los de semejanza de triángulos y el que señala que en un triángulo recto el cuadrado de la hipotenusa es* angle, iusques a O, en sorte qu'N O soit esgale a N L, la toute O M est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete sorte

$$z \infty \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}.$$

Que si iay $yy \infty - ay + bb$, & qu'y soit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le mesme triangle rectangle N L M, & de sa baze M N i'oste N P esgale a N L, & le reste P M est y la racine cherchée. De façon que iay $y \infty - \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}$. Et tout de mesme si i'auois $x^4 \infty - ax^2 + b^2$. P M seroit x^2. & i'aurois $x \infty \sqrt{- \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}}$: & ainsi des autres.



Enfin si i'ay

$$z^2 \infty az - bb:$$

ie fais N L esgale à $\frac{1}{2} a$, & L M esgale à b cõme deuãt, puis, au lieu de ioindre les poins M N, ie tire M Q R parallele a L N. & du centre N par L ayant descrit vn cercle qui la couppe aux poins Q & R, la ligne cherchée z est M Q, oubiẽ M R, car en ce cas elle s'exprime en deux façons, a sçauoir $z \infty \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa - bb}$, & $z \infty \frac{1}{2} a - \sqrt{\frac{1}{4} aa - bb}$.

Et si le cercle, qui ayant son centre au point N, passe par le point L, ne couppe ny ne touche la ligne droite M Q R, il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut assurer que la construction du problesme proposé est impossible.

Au

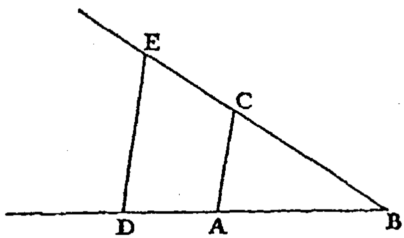
igual a la suma de los cuadrados de los lados. Y no vacilo en introducir varias cantidades desconocidas para reducir la cuestión a fin de que dependa solo de esos teoremas". Aparece aquí una referencia implícita al sistema de coordenadas rectangulares y se observa que Descartes no aplica la denominación de Pitágoras al conocido teorema.

4. La Geometría está dividida en tres libros. En el primer item del Libro Primero, que denomina "*Cómo se relaciona los cálculos de la Aritmética con las operaciones de la Geometría*", fijando un segmento de recta arbitrario como unidad de medida, procede a construir la suma, la diferencia, la multiplicación, la división y la raíz cuadrada de segmentos y explica cómo se obtienen las soluciones geométricas de las ecuaciones del tipo $x^2 = ax + b^2$ y $x^2 = ax - b^2$ (págs. 302 y 303 de la edición prícipe), considerando únicamente las raíces positivas. En este Libro se ocupa del problema de Pappus de Alejandría, referente a encontrar el lugar geométrico de los puntos tales que el producto de sus distancias a dos rectas dadas esté en una cierta razón con el producto de sus distancias a otras dos rectas dadas.

El Libro Segundo trata **"De la naturaleza de las líneas curvas"**, y en él clasifica a las curvas en geométricas (las que hoy denominamos curvas algebraicas) y mecánicas, señalando que probablemente "*los antiguos geómetras rehusaron aceptar curvas más complejas que las secciones cónicas*" por el hecho "*que las primeras que atrajeron su atención fueron la espiral, la cuadratrix, y otras similares que realmente pertenecen a las mecánicas, y no están entre aquellas que pienso que deberían estar aquí*", (pág. 317). Por tanto, se limita a considerar las curvas algebraicas y a dar algunos ejemplos referentes al trazado de las normales a las mismas señalando que este "*problema es más útil y más general, no sólo que yo conozca, sino que haya deseado conocer en Geometría*"(pág. 342). Su entusiasmo es justificado, pues Dercartes resuelve este problema, que posteriormente fue tratado mediante el cálculo infinitesimal, con recursos puramente algebraicos y usando el método de los coeficientes indeterminados.

El Libro Tercer. **"De la construcción de problemas que son sólidos o más que sólidos"**, es básicamente álgebra: reconstrucción de una ecuación conociendo sus raíces; sustituciones, hoy comunes en la teoría de ecuaciones; y resolución gráfica de ecuaciones mediante la intersección de eſt a l'autre, ce qui eſt le meſme que la Diuiſion; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou pluſieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne; ce qui eſt le meſme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligibile.

La Multiplication.

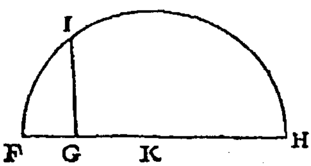


Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

La Diuiſion.

Oubien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.

l'Extraction de la racine quarrée.



Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouſte en ligne droite F G, qui eſt l'vnité, & diuiſant F H en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur F H, c'eſt G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cauſe que i'en parleray plus commodement cy aprés.

Commēt on peut

Mais ſouuent on n'a pas beſoin de tracer ainſi ces ligne una cierta curva con una circunferencia, que concluye con la resolución gráfica de la ecuación completa de sexto grado.

Esto no debe extrañar, pues fue el desarrollo logrado por el álgebra en el siglo XVI lo que inspiró a Descartes la idea de combinarla con la geometría clasica, aplicando a ésta el lenguaje de aquel. "*Con la dióptrica y los meteoros* -escribió al padre Mersenne poco después de publicar el Discurso del Método- *he procurado convencer de que mi método es mejor que el ordinario, pero con la Geometría pretendo haberlo demostrado*". La Geometría fue el único escrito matemático publicado en vida por Descartes, pues los restantes aparecen en su correspondencia y en obras póstumas. Conviene hacer constar aquí que Descartes no tenía buena opinión de discípulos y continuadores, porque son como la hiedra "*que no puede subir más alto que los árboles a los que se aferra y que más bien desciende cuando llega a la clima*".

5. Desde la perspectiva de la evolución histórica de la matemática, la geometría de Euclides, que representaba los números por segmentos de recta y el producto por un rectángulo, consiguió resolver ecuaciones cuadráticas, y Apolonio estudió las secciones cónicas con métodos que casi anticipan lo que habrían de ser las coordenadas, pero la falta de un aparato simbólico que diera flexibilidad a sus argumentos limitó a la geometría griega al nivel de tratamiento de casos particulares. Nicolás Oresme, en su **Tractatus de latitudinibus formarum**, en el que enseña a representar gráficamente la marcha de un fenómeno, se aproxima más a la concepción moderna. Si bien no definió el concepto de función, tuvo el acierto de representar geométricamente las variaciones de una magnitud cualquiera haciendo intervenir el concepto de tiempo, lo que no fue jamás considerado por la estática matemática griega. Para Oresme, un fenómeno depende de una variable cuyos valores representa por alturas, que él llama *latitudes* de la forma, mientras que los tiempos son las *longitudes*, de modo que tomando éstas en una línea horizontal (lo que hoy llamamos eje de abscisas) y aquellas en verticales trazadas por los puntos que representan a los tiempos, la curva que pasa por los extremos de las alturas define las variaciones del fenómeno en función del tiempo. Las concepciones de otros geómetras renacentistas, especialmente las de Gregorio de San Vicente, Cavallieri y Roberval, tenían generalidad en sí mismas, más no en sus aplicaciones y por eso fueron, en cierto modo, infecundas en el contexto de la matemática y lo dominante en dicha época fue el Algebra de Bombelli y Vieta. De otro lado, sabemos que P. Fermat, tenía un concepto claro de lo que era un sistema de coordenadas, porque así se deduce de la lectura de su **Isagoge ad locos**

planos et solidos, obra escrita poco antes que la Geometría de Descartes, pero publicada con posterioridad a ella. Por eso, es pertinente hacer notar que el mérito de la Geometría de Descartes no radica en la paternidad en el uso de las coordenadas, ya utilizadas en cierta forma por Apolonio y ciertamente por Oresme y Fermat, sino en prever que su empleo sistemático daba a la geometría un método de gran potencia creadora y de una universalidad desconocida hasta entonces, que permitía abordar cuestiones que superaban los recursos de los griegos, porque no era necesario imaginar un procedimiento especial para cada figura o problema geométrico.

6. Las ideas de Descartes respecto al rol del álgebra en la geometría, y en la totalidad de la matemática, han sido motivo de un nuevo análisis y revisión conceptual ante el panorama de la matemática contemporánea. Ya Boutroux señalaba "que para Descartes el álgebra precede lógicamente a todas las otras ramas de la matemática y no está condicionada de modo alguno por la naturaleza de los problemas a los cuales se aplica". Para Descartes, acota Paul Germain, el Algebra no es una ciencia sino un método que conduce a la realización de su propósito: **una matemática universal que fundiera el análisis geométrico de los antiguos con el álgebra de los modernos.** El álgebra es la estructura madre de la matemática y dice Descartes: "*Me parece que las huellas de esta verdad están en Pappo y en Diofanto, que vivieron, si no en los primeros tiempos, al menos muchos siglos antes de ahora, y me inclino a creer que los escritores mismos la han suprimido, por cierta astucia perniciosa, pues así como es cierto que lo han hecho muchos artífices respecto de sus inventos, así de ellos temieron quizá, que siendo fácil y sencilla, se envileciera después de divulgada*". Por su parte Bourbaki, basándose en diversos escritos de Descartes, afirma que éste va más lejos y que concibe la unidad esencial "*de todas las ciencias que se denominan corrientemente Matemáticas... Aunque sus objetos sean diferentes, no por ello dejan de acordarse en tanto que no tienen en cuenta otra cosa que las relaciones o proporciones que se encuentran en ella*". Es obvio el cordón umbilical entre Descartes y los Bourbaki: es decir entre quien veía en el álgebra, descargada "*de las múltiples cifras e inexplicables figuras*", la clave de "*la verdadera Matemática*" y quienes señalan al álgebra como estrucutra-madre de la matemática y están a la vanguardia de la "invasión de todos los campos por el álgebra", según la conocida frase de Choquet.

7. Recapitulando. Desde Euclides, hasta el siglo XVII, la geometería era la ciencia racional de un objeto no construído por la razón: el espacio. Los diversos teoremas de la geometría griega están racionalmente eslabonados por un método deductivo, pero dichos teoremas se refieren a propiedades del espacio, entendido como algo no construído ni elaborado por la razón sino captado por los sentidos. Lo fundamental en la obra de Descartes, cuyo punto de partida era la desconfianza de toda fuente de conocimiento que no fuera la razón, es la **racionalización del espacio.** Descartes no inventa el sistema de coordenadas, pero es el primero que comprende que la sustitución de un punto del plano por un par de números constituye el caso más simple de interpretación en términos abstractos, de un dato de la intuición del espacio.

A diferencia de Fermat, que como otros matemáticos que le antecedieron consideraba que los problemas relativos a las figuras son geométricos y que en ellos interviene el álgebra como medio auxiliar, para Descartes el álgebra es el método de construcción y solución de los problemas geométricos. La aplicación sistemática del álgebra a la geometría, hecha por Descartes, al reemplazar imágenes intuitivas por símbolos algebraicos libera a la razón matemática de la atadura de la representación sensible. Se racionaliza así el espacio y, al racionalizarlo, éste ya no tiene ataduras físicas, entre ellas la de la tridimensionalidad. La posibilidad de crear espacios n-dimensionales quedaba abierta. Los espacios abstractos estaba a la vista. En tal sentido, sin exageración, puede decirse que la geometría actual es cartesiana.