

CALCULO DE POTENCIALES Y CAMPOS ELECTRICOS

Casio R. Oré

1. Introducción

La electrostática clásica basada en la ley de Coulomb proporciona las expresiones matemáticas para el cálculo de potenciales y campos eléctricos en cualquier punto del espacio, si es que se conoce la posición de las cargas eléctricas. Sin embargo, la enseñanza tradicional de este capítulo concluye con la presentación de estas expresiones, que en su mayoría son integrales, pues estas no son susceptibles a una solución analítica, salvo en casos muy elementales y no siempre de interés práctico.

Los textos escritos para esta materia exhiben el mismo comportamiento. Sin resultados concretos el estudiante queda con una idea vaga de lo que realmente ocurre.

La popularización de las microcomputadoras y, sobre todo, la confección de programas para el cálculo numérico de las más diversas expresiones matemáticas constituye una ayuda valiosa para remediar la deficiencia formulada. Es un mecanismo poderoso para ampliar nuestro conocimiento de la electrostática en este caso.

Sin embargo, las clases sobre electromagnetismo se siguen brindando en la misma forma que en el período pre-computadora. Esto ocurre sobre todo en sesiones con elevado número de estudiantes. Por mucho esfuerzo que hayan hecho las instituciones de enseñanza para adquirir microcomputadoras, todo parece indicar que no habrá el número adecuado para que cada alumno o grupo pequeño de estudiantes puedan tener una a su disposición para trabajos en un curso determinado. El costo de cada aparato no permite que un alto porcentaje de alumnos lo adquiera. El panorama se oscurece más al comprobar que la enorme mayoría de textos en el campo editados los últimos años ni siquiera mencionan la posibilidad de ayudarse con las microcomputadoras.

Una salida práctica de este entrapamiento es el uso de las calculadoras personales programables que se han hecho muy populares en el medio universitario. Ellas poseen la capacidad suficiente para resolver problemas usuales de electrostática. Un elevado número de estudiantes lo posee. Una pequeña dificultad lo constituye el empleo del lenguaje BASIC.

En el presente trabajo se presenta un ejemplo de cómo utilizar una calculadora programable para resolver problemas de electrostática en un curso intermedio de electromagnetismo.

2. Anillo con carga eléctrica uniforme

La teoría electromagnética muestra, que si se tiene una región en la que existe carga eléctrica distribuida con densidad $\rho(\vec{r}')$, el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ y el potencial eléctrico $\phi(\vec{r})$ en un punto del espacio, cuyo vector posición es \vec{r} , pueden ser evaluados mediante las integrales

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \quad (2)$$

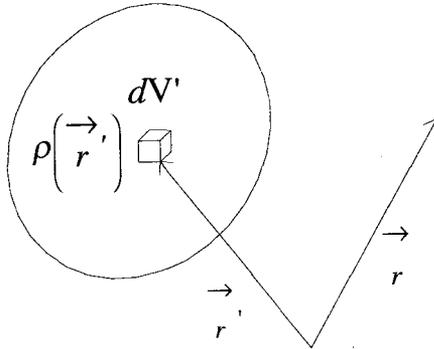


Fig. 1. Ubicación de la carga y del punto de observación.

Estas expresiones nos muestran que un conocimiento del valor de las cargas eléctricas y de su posición nos permiten conocer el potencial y campos eléctricos en cualquier punto del espacio. Sólo se requiere integrar las expresiones!

Apliquemos estas expresiones a un caso muy simple: Carga eléctrica uniformemente distribuida con una densidad lineal λ_0 C/m en un anillo de radio R . La geometría del problema indica que el sistema de variables cilíndricas es la más recomendada. Para esto, coloquemos el anillo en el plano $x - y$ de un sistema de coordenadas con su centro coincidente con el origen del sistema (Fig. 2).

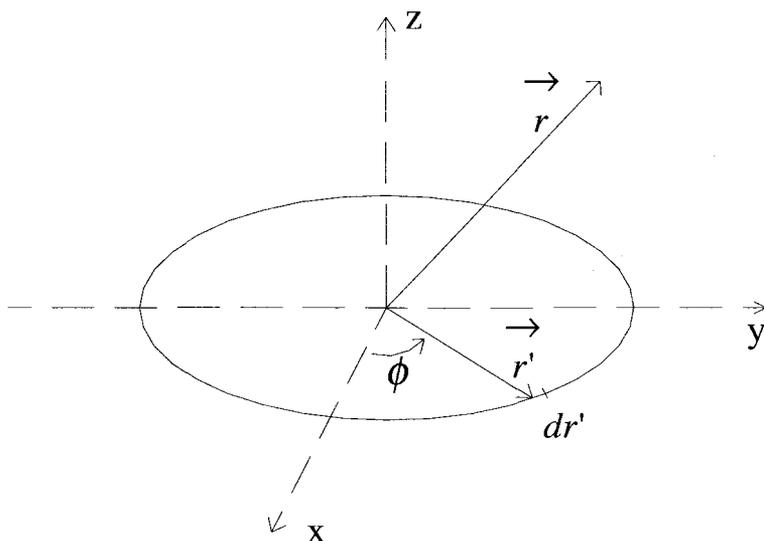


Fig. 2. Anillo con carga uniforme. Se advierte $\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$
 $\vec{r}' = R \cos \phi \hat{i} + R \sin \phi \hat{j}$
 $dr' = R d\phi$

Las expresiones (1) y (2) adquieren las formas

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{[(x - R\cos\phi)^2 + (y - R\sin\phi)^2 + z^2]^{1/2}} \quad (3)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{(x - R\cos\phi)\hat{i} + (y - R\sin\phi)\hat{j} + z\hat{k}}{[(x - R\cos\phi)^2 + (y - R\sin\phi)^2 + z^2]^{3/2}} d\phi \quad (4)$$

Estas expresiones no tienen una solución analítica. Aquí observamos claramente que aun en el caso de una distribución de carga eléctrica muy simple no es posible obtener ni el potencial, ni el campo eléctrico. Por lo general, el profesor del curso opta por evaluarlos únicamente en puntos del eje del anillo (eje z), región donde la integración es trivial.

3. Potenciales y campos eléctricos

Pasaremos ahora a calcular potenciales y campos eléctricos en diversos puntos del espacio, mediante el auxilio de la computadora personal CASIO FX-720P que tiene una capacidad de 2048 bytes y la programación es en el lenguaje BASIC.

Para evaluar la integral, la circunferencia tiene que dividirse en un número de partes que por comodidad fueron tomados iguales. Para que el valor proporcionado por una integración numérica no difiera mucho del valor real de la integral, el tamaño del elemento de arco debe ser el menor posible. Pero esta exigencia tiene que ser contrapesada con el tiempo requerido para cada evaluación. Cuanto más pequeño sea el elemento de arco, mayor será el número de cálculos, más tiempo se requerirá. Fueron efectuadas tres evaluaciones previas dividiendo la circunferencia en 500, 300 y 100 partes iguales. Se observó que el resultado obtenido con una división en 100 partes difería en uno por mil del obtenido con la división en 500 partes. Esto motivó que todos los cálculos presentados hayan sido evaluados con una división de la circunferencia en 100 partes: $d\phi = 6,2836/100 (=D)$.

La evaluación requiere, además, que sea proporcionado los valores del radio R y de la densidad lineal $\lambda_0 (=L$ que en el programa elaborado debe darse en $\mu\text{C}/\text{m}$).

El programa BASIC elaborado para el cálculo del potencial es el siguiente:

```
10 INPUT R,L
12 INPUT X,Y,Z
13 D=6.2836/100
14 F=0:I=0
15 A=X-R*COS F
16 B=Y-R*SEN F
17 C=(A^2+B^2+Z^2)^.5
18 I=I+1/C
19 F=F+D
20 IF F<6.2836 THEN 15
21 P=90000*R*L*D*I
22 PRINT X,Y,Z,P
```

La línea 21 multiplica el valor de la integral I por la constante

$$\frac{R\lambda \Delta\phi}{4\pi\epsilon_0}$$

Los resultados obtenidos para 10 puntos se muestran en la tabla I, donde el radio fue considerado 3m y $L = 5 \times 10^{-3} \mu\text{C/m}$.

Es de observar que para puntos del eje existe una solución analítica

$$\phi(0,0,z) = \frac{\lambda_0 R}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}$$

que para los 2 puntos mostrados en la tabla I proporcionan los valores

$$\phi(0,0,0) = 282,7(43) \quad (62)$$

$$\phi(0,0,1) = 268,2(33) \quad (51)$$

Los números entre () son la 5ta. y 6ta. cifra significativa que da la fórmula (izquierda) y el cálculo numérico (derecha) respectivamente. La diferencia entre ambos resultados es inferior al 0,01%.

La coordenada x de los 10 puntos escogidos tienen el valor 0. Un punto cualquiera de los mostrados tiene la forma $(0, y_0, z_0)$. La simetría azimuthal permite afirmar que todos los puntos de la forma $(x, \sqrt{y_0^2 - x^2}, z_0)$ tienen el mismo valor del potencial, razón por el cual no constituye restricción alguna el haber escogido $x = 0$.

Para el campo eléctrico hay que evaluar 3 integrales correspondientes a las componentes $E_x (=H)$, $E_y (=I)$, $E_z (=K)$. El programa BASIC toma entonces la forma:

```

10 INPUT R,L
12 INPUT X,Y,Z
13 D=6.2836/1000:F=0
14 H=0:I=0:K=0
    
```

```

15 A=X-R*COS F
16 B=Y-R*SEN F
17 C=(A↑2+B↑2+Z↑2)↑1.5
18 H=H+A/C:I=I+B/C:K=K+Z/C
19 F=F+D
20 IF F< .2836 THEN 15
21 G=90000*R*L*D
22 H=H*G:I=I*G:K=K*G
23 PRINT X,Y,Z
24 PRINT H,I,K

```

La tabla I muestra los resultados obtenidos y en la Fig. 3 se grafican.

TABLA I

x	y	z	$\phi(V)$	$E_x(V/m)$	$E_y(V/m)$	$E_z(V/m)$
0	0	0	282,7	0,0	0,0	0,0
0	1	0	291,1	0,0	-17,9	0,0
0	2	0	325,7	0,0	-60,3	0,0
0	0	1	268,2	0,0	0,0	26,8
0	1	1	272,9	0,0	-9,4	32,4
0	2	1	286,1	0,0	-14,6	57,4
0	1	2	235,4	0,0	0,1	39,1
0	2	2	233,1	0,0	0,5	46,5
0	3	1	284,6	0,0	32,1	92,0
0	3	2	220,1	0,0	20,9	47,1

Para el punto (0,0,1) el resultado analítico para E_z da el valor 26,823, mientras que el presente cálculo 26,825, diferencia inferior al 0,01%.

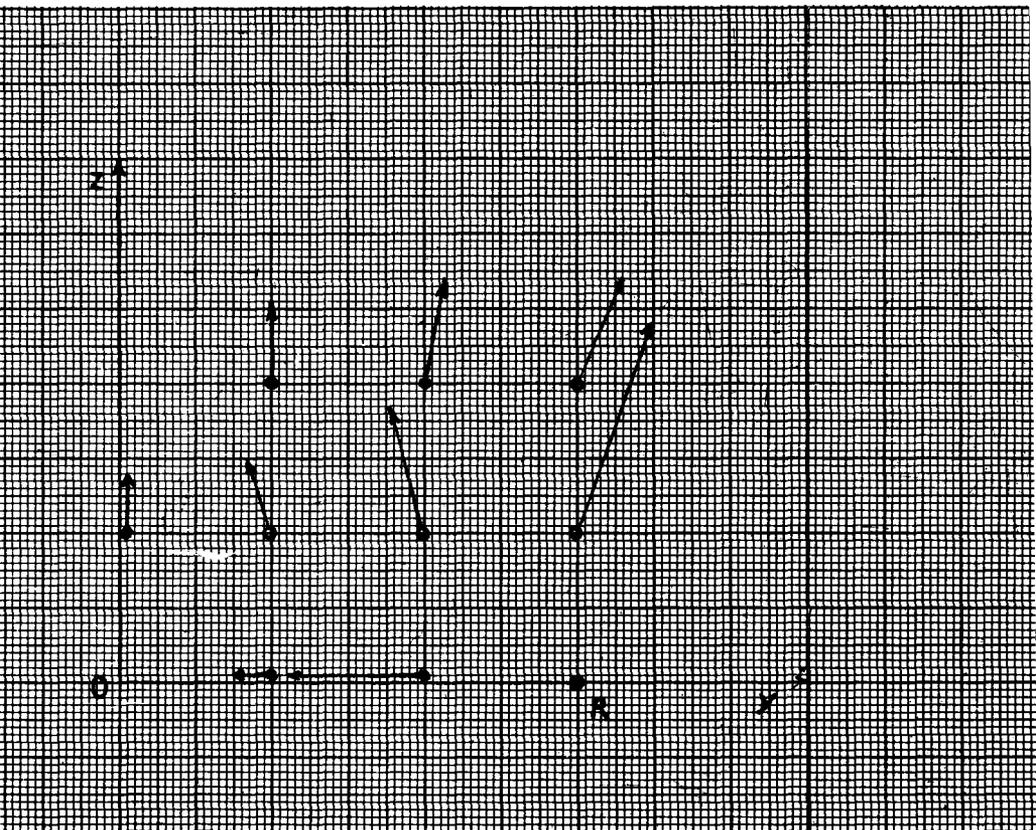


Fig. 3. Campo eléctrico de un anillo cargado. ● Intersección del anillo con el plano y-z.

4. Líneas de campo eléctrico

Una manera alternativa de visualizar el campo eléctrico generado por distribuciones de carga es mediante la construcción de las denominadas líneas de campo eléctrico. La característica de estas líneas es que en cualquier punto del espacio son paralelas al campo eléctrico en el mismo punto. Si $d\vec{r}$, es un elemento de línea, se tiene $d\vec{r} \parallel \vec{E}$, o en término de componentes

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}.$$

Estas relaciones permiten la construcción de líneas de campo en base al conocimiento del campo eléctrico. Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ el punto por donde deseamos que pase la línea. Para obtener un segundo punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ se evalúa el campo \vec{E} en P_0 . Designando a sus 3 componentes con E_{x0}, E_{y0}, E_{z0} se tiene

$$\Delta x = \Delta s \cdot E_{x0} / E \Delta y = \Delta s \cdot E_{y0} / E \Delta z = \Delta s \cdot E_{z0} / E \quad (10)$$

donde

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \quad E = \sqrt{E_{x0}^2 + E_{y0}^2 + E_{z0}^2}$$

Por lo tanto

$$x_1 = x_0 + \Delta s \cdot E_{x0} / E ; y_1 = y_0 + \Delta s \cdot E_{y0} / E ; z_1 = z_0 + \Delta s \cdot E_{z0} / E \quad (6)$$

Para obtener un tercer punto de la línea $P_3(x_2, y_2, z_2)$ se evalúa $E(x_1, y_1, z_1)$ y se repite el procedimiento anterior.

De acuerdo a su definición, Δs es la distancia entre dos puntos de la línea calculados sucesivamente y es un dato que debe proporcionarse para el cálculo numérico. La distancia infinitesimal $d\vec{r}$, que es paralela a \vec{E} , ha sido reemplazada por la distancia finita $\Delta \vec{s}$. Este reemplazo puede introducir errores en la ubicación de la línea si es que no se tiene la precaución de tomarlo lo suficientemente pequeño para que esto no ocurra. Se hicieron varios cálculos previos después de los cuales se adoptó la resolución que un valor muy adecuado era considerarlo igual a $R/400$ ($=S$).

Debido a la simetría azimuthal de la presente distribución de carga y con el propósito de reducir el tiempo de cálculo (obsérvese que $R/400$ es una distancia muy pequeña) se consideró apropiado ubicar la línea sólo en el plano y - z . Se evita con ello el cálculo de E_x , pues en todo momento es cero.

El programa elaborado toma la forma:

```

10 INPUT R
12 INPUT X,Y,Z
13 D=6.2836/100:S=R/400
14 I=0:K=0:F=0
15 A=X-R*COS F
16 B=Y-R*SEN F
17 C=(A^2+B^2+Z^2)^1.5
18 I=I+B/C:K=K+Z/C
19 F=F+D
20 IF F<6.2836 THEN 15
22 M=SQR(I*I+K*K)
23 Y=Y+S*I/M:Z=Z+S*K/M
25 PRINT Y,Z
26 GOTO 14

```

Como la distancia entre puntos sucesivos es muy pequeña es recomendable que la impresión se haga solo cada cierto número de puntos. Si se conviene que la impresión se haga cada 10 puntos puede añadirse las siguientes líneas al programa:

```

13 ... :J=0
21 J=J+1
24 IF J<10 THEN 14
25 ... :J=0

```

Las líneas halladas son presentadas en la Fig. 4. Se observa que ellas abandonan la porción del anillo que intercepta al plano y-z, se dirigen hacia el eje del anillo para luego gradualmente ir cambiando de dirección y terminar alejándose de él. A mayores distancias estas líneas se harán radiales, esto es, parecerán proceder del origen de coordenadas. Otro detalle que se observa es que en regiones donde hay concentraciones mayores de líneas los campos son más intensos.

Las direcciones de los vectores mostrados en la Fig. 3 concuerdan con las líneas presentes en la Fig. 4.

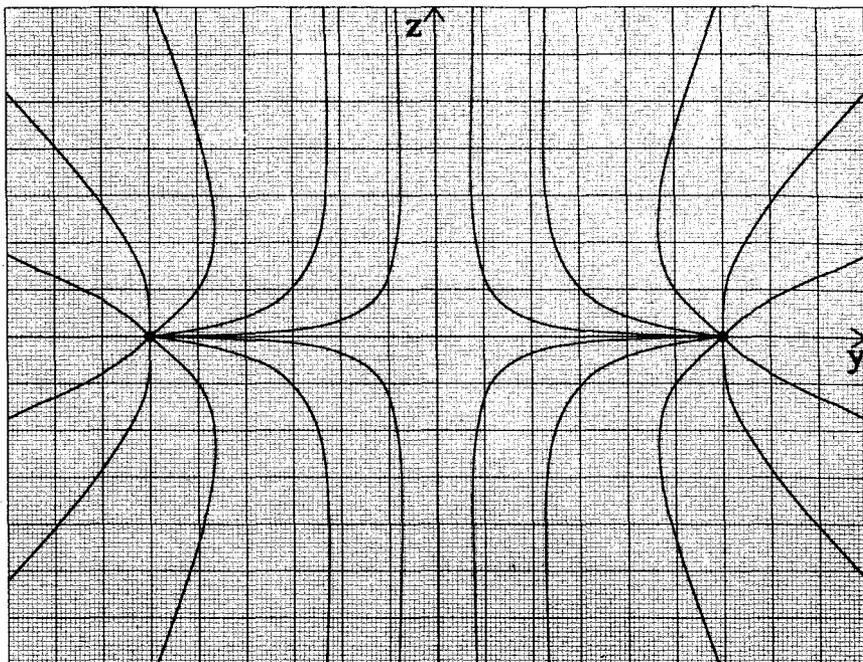


Fig. 4. Líneas de campo eléctrico producidas por un anillo cargado.
 ● Intersección del anillo con el plano y - z .

5. Superficies equipotenciales

Las superficies equipotenciales guardan una estrecha y muy simple relación geométrica con las líneas de campo; son perpendiculares entre sí. La teoría electromagnética muestra que $\vec{E} = -\nabla\phi$. A su vez, la teoría de vectores señala que $\nabla\phi$ es perpendicular a la superficie $\phi = \text{constante}$. Se puede, por lo tanto, emplear el modo de obtener líneas de campo para calcular curvas equipotenciales en el plano y - z . Bastaría una pequeña pero muy significativa modificación en el programa.

Sea, nuevamente, P_0 un punto de la curva equipotencial. Para calcular un segundo punto P_1 es necesario calcular \vec{E} en P_0 . Este tendrá la forma $(0, E_{y0}, E_{z0})$. La línea que une P_0 con P_1 debe ser perpendicular a \vec{E} . Un vector perpendicular a \vec{E} , en el plano $y-z$ es $(0, E_{z0}, -E_{y0})$. Las coordenadas de P_1 serán entonces

$$x_1 = 0 ; \quad y_1 = y_0 + \Delta s \cdot E_{z0} / E ; \quad z_1 = z_0 - \Delta s \cdot E_{y0} / E.$$

Para obtener un tercer punto P_2 se evalúa \vec{E} en P_1 , se construye un vector perpendicular a esta \vec{E} y se procede como en el caso anterior.

Se adoptan las mismas precauciones que las tomadas para las líneas de campo. Solo debe cambiarse la línea 23 que ahora adopta la forma

$$23 \quad Y=Y+S*K/M; Z=Z-S*I/M$$

Debido a la simetría existente, basta calcular la curva en la región $z > 0$ pues la curva en $z < 0$ será simétrica a la anterior. En un comienzo, para conocer las bondades del cálculo y escoger el S adecuado se calculó una curva completa. De estar bien los cálculos, la curva se cerraría sobre sí misma. Se halló que para $S=R/400$ se tenía un 5% de diferencia entre el punto inicial y el final, pero esto para una curva muy pegada a la posición del anillo que se caracteriza por tener una curvatura muy elevada. Esto asegura que para las curvas presentadas la confiabilidad es bastante grande.

Se presenta en la Fig. 5 las líneas equipotenciales obtenidas. Las superficies equipotenciales serán obtenidas al hacer rotar las curvas alrededor del eje z .

Las gráficas muestran que las curvas equipotenciales cercanas a la corriente tienen la forma aproximadamente elíptica, cuya excentricidad va reduciéndose a medida que la distancia a la corriente disminuye, tal como era de preverse. En el otro extremo aun cuando la gráfica no lo muestre totalmente, para distancias suficientemente grandes, las curvas se van tornando asimismo circunferencias.

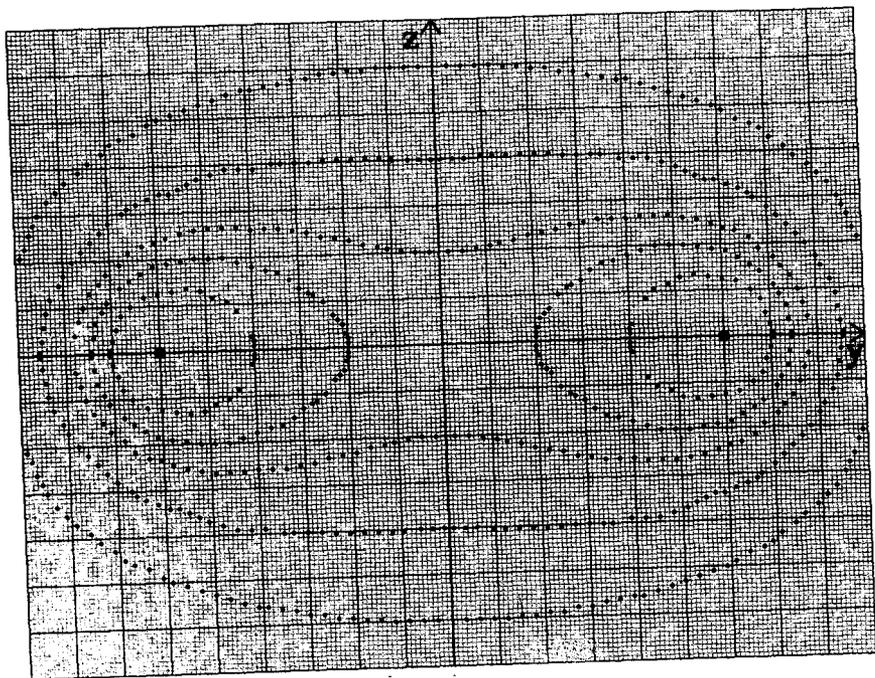


Fig. 5. Curvas equipotenciales producidas por un anillo cargado. ● Intersección del anillo con el plano y - z .

Si uno se desplaza a lo largo del eje y empezando del origen, se observa que la variación del potencial por unidad de longitud es menor para la región $y < R$ comparado con la región $y > R$, lo que en términos alternativos significa que el valor del campo eléctrico es también menor y de sentido contrario.

Las Figs. 4 y 5 fueron construidos con la misma escala. Al superponerlos puede observarse claramente que las líneas de campo son perpendiculares a las curvas equipotenciales.

6. Conclusión

Se ha mostrado como una calculadora personal puede ampliarse grandemente la comprensión de campos y potenciales eléctricos. Los programas que ha que confeccionarse son muy sencillos y están al alcance aun de los que no tienen mucha familiaridad con el BASIC. Para la integración se ha utilizado la regla del rectángulo, que es la más simple. Podría mejorarse el programa utilizando la regla del trapecio o de Simpson, aunque en el presente caso no sería necesario, pues en todo momento se ha ido cotejando los resultados.

Las gráficas contenidas en la Fig. 4 y 5 dicen mucho más que las ecuaciones 3 y 4.

La aplicación a situaciones más complejas es inmediata. Así, por ejemplo, tratándose de regiones con carga eléctrica no uniforme sino con una densidad $\rho(\vec{r})$ dependiente de la posición, esta información se almacena en el computador para luego convocarlo durante el proceso de integración. La dificultad que podría ocurrir es que los datos rebasen la capacidad del computador o, en su defecto, tome mucho tiempo el proceso de evaluación. En este último caso, la paciencia juega un papel predominante.

No se incluye bibliografía alguna. Son cientos los artículos que abogan por el uso de la computación en la física. Las fórmulas matemáticas utilizadas aparecen en cualquier texto de electromagnetismo intermedio. La programación en BASIC está detallada en los folletos adjuntos a la calculadora personal.