Pro Mathematica: Vol. XI, Nos. 21-22, 1997

INTRODUCCION A LA GEOMETRIA PROYECTIVA Y GEOMETRIA ALGEBRAICA

José Manuel ***Aroca***

§ 0 Introducción

Comenzaremos estas notas con una introducción elemental para justificar el origen de la Geometría Proyectiva.

Históricamente, la Geometría Proyectiva comienza en los tratados de Perspectiva de los pintores y de hecho el primer tratado de la misma se debe al pintor francés Desargues (1591-1661).

Antes de proceder a la introducción formal del espacio proyectivo, vamos a describir en un caso particular y dentro del espíritu del Programa de Erlangen de F. Klein, las transformaciones proyectivas en dimensión dos y sobre el cuerpo real.

✉ *Dpto. de Algebra, Geometría y Topología. Facultad de Ciencias. Universidad de Valladolid, España.*

Trabajando en el espacio $\mathbb{R}^3$ podemos considerar un plano α y el haz de rectas de vértice en un punto $P \notin \alpha$ y definir dos operaciones:

a) "Proyectar α desde P", consiste en tomar para cada punto Q de α la recta PQ;

b) "Cortar el haz de vértice P", consiste en tomar para cada recta que pasa por P el punto (si existe) en que dicha recta corta a α.

La composición de dos de estas operaciones da lugar a la perspectividad. Esta transformación se obtiene tomando dos planos α y β de $\mathbb{R}^3$ y un punto $P \notin \alpha \cup \beta$, y consiste en proyectar α desde P y cortar a continuación por β, es decir es una correspondencia π: $\alpha \to \beta$, en la cual $\pi(X) = Y \Leftrightarrow PX \cap \beta = Y$.

Obviamente, π no es una aplicación, pues los puntos de corte de α con el plano paralelo a β por P, **puntos de fuga** de π, no tienen imagen; del mismo modo los puntos de corte de β con el plano paralelo a α por P tampoco tienen original, pero fuera de estos puntos, π es una biyección y transforma rectas en rectas.

La presencia de esos puntos de fuga tiene efectos interesantes (Fig. 1)

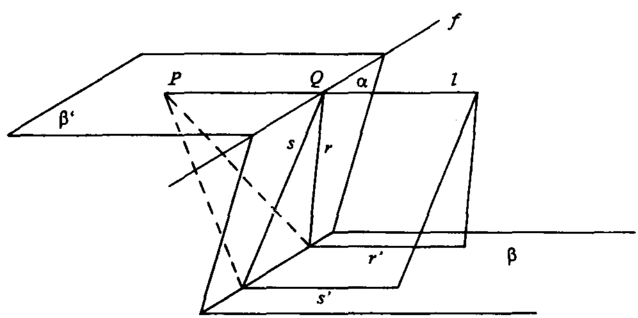

Fig. 1

Así, si r y s son dos rectas de α (Fig. 1) que se cortan en Q, punto de fuga, $\pi(r)$ y $\pi(s)$ son rectas paralelas (y paralelas ambas a $l = PQ$) luego rectas concurrentes se pueden transformar en paralelas y viceversa. Del mismo modo (Fig. 2), un cuadrilátero se puede transformar en un paralelogramo.

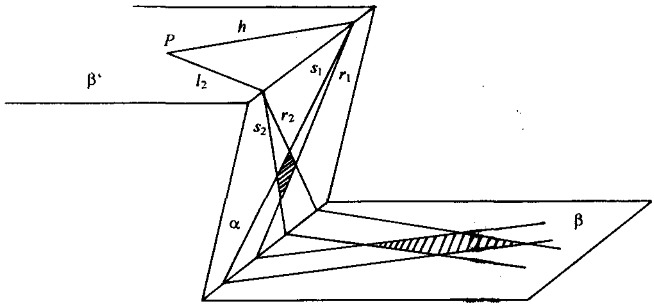

Fig. 2

Es un buen ejercicio comprobar que se puede transformar un cuadrilátero en un cuadrado.

La pregunta natural es si existe algún elemento geométrico para perspectividades, es decir invariante respecto de estas transformaciones. La respuesta es que el único elemento invariante es la razón doble. Veamos, siempre en el caso real, cómo se construye este elemento.

Si A,B,C,D son cuatro puntos de una recta, y fijamos en ella un sentido de recorrido, se llama razón doble de A,B,C,D a $[ABCD] = \dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{\overline{AD}\;\overline{BC}}$ (donde $\overline{XY}=d(XY)$ ó $\overline{XY}=-d(XY)$ según el vector $\overrightarrow{XY}$ tenga el sentido prefijado o el opuesto; de hecho, si fijamos el vector $\underline{u}$, $\overrightarrow{XY} = \overline{XY}\cdot\underline{u}$). Es claro que la razón doble $[ABCD]$ no depende del sentido de recorrido elegido para definirla

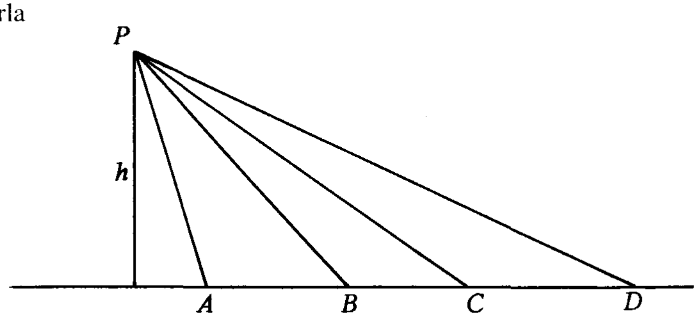

Fig. 3

Observemos (Fig. 3) que si P es un punto cualquiera no incluído en la recta que contiene a los cuatro puntos, y h es la distancia de P a esta recta

$$[ABCD]=\frac{1/2\,\overline{AC}\cdot h\;\; 1/2\,\overline{BD}\; h}{1/2\,\overline{AD}\; h\;\; 1/2\,\overline{BC}\cdot h}=\frac{S_{[PAC]}\cdot S_{[CBD]}}{S_{[PAD]}\cdot S_{[CBC]}}$$

(donde $S_{[XYZ]}$ = Area del triángulo XYZ). Entonces

$$[ABCD]=\frac{\frac{1}{2}\,\overline{PA}\,.\,\overline{PC}\,.\,sen\; A\hat{P}C\,.\,\frac{1}{2}\,\overline{PB}\;\overline{PD}\,.\,sen\; B\hat{P}D}{\frac{1}{2}\,\overline{PA}\,.\,\overline{PD}\,.\,sen\; A\hat{P}D\,.\,\frac{1}{2}\,\overline{PB}\;\overline{PC}\,.\,sen\,(B\hat{P}C)}=$$

$$=\frac{sen\; A\hat{P}C\,.\,sen\; B\hat{P}D}{sen\; A\hat{P}D\,.\,sen\; B\hat{P}C}$$

Es decir, es independiente de los puntos A,B,C,D siempre que estén alineados y las rectas PA, PB, PC, PD, sean constantes, por tanto no cambia por perpectividades y efectivamente es un elemento geométrico.

Comprobado que existen estos elementos, subsiste el hecho de que las perspectividades no son aplicaciones por la existencia de las "líneas" de fuga"; la única forma de dar imagen a los puntos de estas líneas consiste en añadir al plano nuevos puntos, los puntos del infinito, y ese es el origen de la geometría que vamos a estudiar. La forma de añadir estos puntos es substituir el plano por el haz de rectas.

En las líneas anteriores hemos señalado las dos características más importantes de la Geometría Proyectiva: Aparición de puntos del infinito, y sustitución de las distancias (G. Euclidea) o razones de distancias (G. Afin) por la razón doble como invariante numérico.

§1 ESPACIO PROYECTIVO. COORDENADAS PROYECTIVAS

1.1 Sea k un cuerpo arbitrario, V un espacio vectorial sobre k, se llama espacio proyectivo asociado a V, al cociente de V-$\{\underline{0}\}$ por la relación $\underline{u}\sim\underline{v} \Leftrightarrow \exists h\in k,\ \underline{u}=h\underline{v}$

El espacio proyectivo asociado a V se representa por $\mathbb{P}(V)$ y cada una de las clases $\underline{u}\sim = \{\underline{v} \mid \underline{v} = h\underline{u},\ h\in k,\ h\neq 0\} = [\underline{u}]$, se llama "punto del espacio proyectivo".

Si L es un subespacio de V, $\mathbb{P}(L)$ se identifica de modo natural a un subconjunto de $\mathbb{P}(V)$. Los subconjuntos construídos $\mathbb{P}(V)$, de esta forma se llaman subespacios proyectivos. Por convenio, $\Phi=\mathbb{P}(\{\underline{0}\})$ es un espacio proyectivo.

Se llama dimensión del subespacio proyectivo $\mathbb{P}(L)=S$ a la dimensión de L menos una unidad, así los puntos proyectivos corresponden a rectas vectoriales, las rectas proyectivas a planos vectoriales, etc. Trivialmente se verifica que la intersección de subespacios proyectivos es un subespacio y que si se define

$$\mathbb{P}(L_1) + \mathbb{P}(L_2) = \mathbb{P}(L_1 + L_2)$$

el conjunto de subespacios proyectivos de $\mathbb{P}(V)$ con las operaciones + e $\cap$ es un retículo modular y atómico isomorfo al retículo de subespacios vectoriales de V.

La fórmula de las dimensiones

$$\dim S_1 + \dim S_2 = \dim(S_1 \cap S_2) + \dim(S_1 + S_2)$$

se traslada de modo evidente (supuesto siempre que V es finito dimensional) al retículo de subespacios de $\mathbb{P}(V)$ y así, por ejemplo, en el plano, dos rectas se cortan siempre (no existe el paralelismo).

En efecto, si r y s son rectas (dimensión 1) en el espacio $\mathbb{P}$ (dimensión 2) y $r \neq s$, como $r \subset r+s \subset \mathbb{P}$, $r \neq$ r+s, debe ser $r+s = \mathbb{P}$, por tanto

$$\dim(r \cap s) = \dim r + \text{dm}\, s - \dim(r+s) = 1+1-2 = 0 \ \Rightarrow\ r \cap s \text{ es un punto.}$$

Como el retículo de subespacios de V es complementario, el de subespacios de $\mathbb{P}(V)$ también lo es, pero si $\dim \mathbb{P}(V) = n$, $\dim V = n+1$ y si $S = \mathbb{P}(L)$ con $\dim S = d$, es $\dim L = d+1$, luego el complementario $\overline{L}$ de L tiene dimensión $\dim \overline{L} = \dim V - \dim L = n\text{-}d$ y $\overline{S} = \mathbb{P}(\overline{L})$, que es el complementario de S ($S + \overline{S} = \mathbb{P}(L+\overline{L}) = \mathbb{P}(V)$, $S\cap\overline{S} = \mathbb{P}(L\cap\overline{L}) = \Phi$) tiene dimensión $\dim \overline{S} = n-d-1$. Así en el plano, un punto P y una recta r con $P\notin r$ son complementarios y en el espacio de dimensión 3, lo son dos rectas que se cruzan.

1.2 Antes de entender el espacio proyectivo a partir de la geometría afin, vamos a ver cómo se pueden establecer coordenadas en un espacio proyectivo. Para ello podemos trasladar de modo trivial las nociones de dependencia e independencia lineal de puntos a uno de estos espacios.

Los puntos $[\underline{u}_1],...,[\underline{u}_r]$ de $\mathbb{P}(V)$ se dicen dependientes o independientes desde el punto de vista proyectivo si y solo si los vectores $\{\underline{u}_1,...,\underline{u}_r\}$ son linealmente dependientes o independientes.

Asi, si dim $V = n+1$ y $[\underline{u}_0],...,[\underline{u}_n]$, son puntos independientes, los vectores $\{\underline{u}_o,...,\underline{u}_n\}$ son independientes en V y por tanto forman una base, pero esta base no esta determinada por los puntos, ya que si $h_o,...,h_n \in k^* = k\text{-}\{0\}$, $[h_i\underline{u}_i] = [\underline{u}_i]$ y por tanto $\{h_o\underline{u}_o,...,h_n\underline{u}_n\}$ es otra base de V asociada a los mismos puntos. Para conseguir una forma de unicidad en la asignación de una base a un conjunto maximal de puntos independientes, se añade un punto más, y se llama "referencia proyectiva" a una familia $\{P_o,...,P_n\ ,\ U\}$ de $n+2$ puntos de $\mathbb{P}(V)$ tales que cualquier subconjunto de $n+1$ de ellos esté compuesto por puntos independientes . Entonces:

1) $$\exists \underline{v}_o,...,\underline{v}_n \in V \text{ con } [\underline{v}_i] = P_i \quad [\sum_0^n \underline{v}_i] = U \qquad (1.2.1)$$

En efecto, si $P_i = [\underline{u}_i]$ como $\{\underline{u}_o,...,\underline{u}_n\}$ son una base de V si $U = [\underline{w}]$ es:

$$\underline{w} = \sum_0^n \alpha_i \underline{u}_i \quad \text{y} \quad \alpha_i \neq 0\ \forall i,$$

llamando $\alpha_i\ \underline{u}_i = \underline{v}_i$, se tiene el resultado.

2) Si: $\underline{w}_0,...,\underline{w}_n \in V$ y $[\underline{w}_i] = P_i\ \forall i,\ [\sum_0^n \underline{w}_i] = \underline{u},\ \ \exists h \in k \text{ con } \underline{w}_i = h\underline{v}_i\ \forall i.$

$$(1.2.2)$$

En efecto, $[\underline{w}_i] = [\underline{v}_i] = P_i \quad \forall i \Rightarrow \exists h_i \in k$ con $\underline{w}_i = h_i\,\underline{v}_i\ \forall i$ y

$$[\sum_0^n \underline{w}_i] = [\sum_0^n \underline{v}_i] = U \Rightarrow \exists \mu \in k \quad \sum_0^n \underline{w}_i = \mu \,.\sum_0^n \underline{v}_i\,, \text{ pero } \sum_0^n w_i = \sum_0^n h_i\,\underline{v}_i$$

luego, $h_i = \mu\ \ \forall i$ por ser los $\{\underline{v}_0,...,\underline{v}_n\}$ linealmente independientes.

De este modo, a cada referencia proyectiva se le asocian infinitas bases $\{\underline{v}_0,...,\underline{v}_n\}$ que varian sólo en un factor de proporcionalidad. Así, si $P \in \mathbb{P}(V)$ y $\mathcal{R} = \{P_0,...,P_{n}: U\}$ es una referencia, tomando una base $\{\underline{v}_0,...,\underline{v}_n\}$ con $[v_i] = P_i\ \ \forall i,\ \ [\Sigma\ \underline{v}_i] = U$ (base normalizada asociada a la referencia) y un representante $[\underline{w}] = P$ de P, $\underline{w} = \sum_{0}^{n} x_i \underline{v}_i$ y los números $(x_0,...,x_n)$ se llaman coordenadas de P en la referencia. Obviamente están determinados salvo un factor de proporcionalidad y resulta más correcto llamar coordenadas de P a la familia de infinitas matrices $[x_0,...,x_n] = \{\rho(x_0,...,x_n) \mid \rho \in k^*\}$.

1.3 Las coordenadas proyectivas están íntimamente ligadas a la razón doble que tuvimos ocasión de ver en la introducción.

Definición: Si A,B,C,D son cuatro puntos distintos dos a dos y alineados en un espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$, se llama razón doble de estos cuatro puntos a

$[ABCD] = \frac{x_0}{x_1}$ donde $[x_0 x_1]$ son las coordenadas de D en la referencia $\{A,B:C\}$.

Ejercicio 1 Comprobar que si $R = \{P_0,...,P_n: U\}$ es una referencia en $\mathbb{P}$, A,B,C,D tienen coordenadas $[a_0,...,a_n]$ $[b_0,...,b_n]$ $[c_0,...,c_n]$ $[d_0,...,d_n]$ y los índices i,j son tales que $\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} \neq 0$, entonces:

$$[ABCD] = \frac{\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ c_i & c_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_i & b_j \\ d_i & d_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ d_i & d_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_i & b_j \\ c_i & c_j \end{vmatrix}}.$$

Ejercicio 2 Históricamente una posición de especial importancia para cuatro puntos es la de la "cuaterna armónica". Los puntos A,B,C,D, alineados, se dice que forman una cuaterna armónica si y sólo si $[ABCD] = -1$.

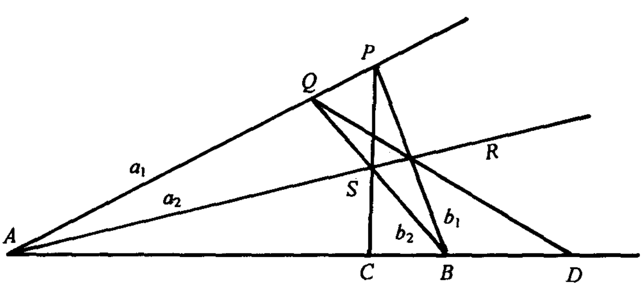

Fig.4

Probar que (Fig.4) A,B,C,D forman una cuaterna armónica si y solo si dadas rectas a_1, a_2, por A y b_1,b_2 por B si se llama $P = a_1 \cap b_1$, $Q = a_1 \cap b_2$

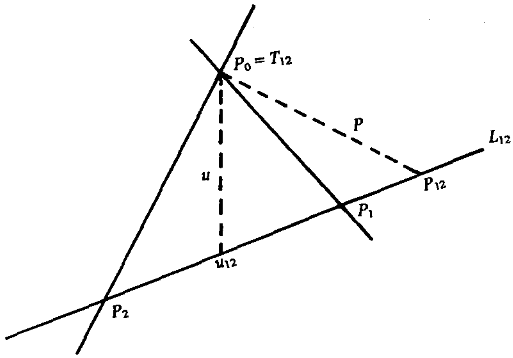

Fig. 5

$R = a_2 \cap b_1$ $S = a_2 \cap b_2$, es

$$(Q+R) \cap (A+B) = D$$

$$(P+S) \cap (A+B) = C$$

Ejercicio 3 Estudiar la variación de $[A_1\, A_2\, A_3\, A_4]$ por permutaciones.

Con esta definición de razón doble, que posteriormente veremos que generaliza la definición clásica que hemos visto en la introducción, se pueden interpretar las coordenadas proyectivas.

Sea $\mathcal{R} = \{P_0,...,P_n: U\}$ una referencia proyectiva, y sean i,j tales que $0 \leq i < j \leq u$,

llamamos:

$$L_{ij} = P_i + P_j$$

$$T_{ij} = P_0 + ... + \hat{P}_i + ...+ \hat{P}_j +...+ P_u$$

$$U_{ij} = (T_{ij} + U) \cap L_{ij}$$

y para cada punto P llamamos

$$P_{ij} = (T_{ij} + P) \cap L_{ij}.$$

Entonces P tiene coordenadas $[x_0...x_n]$ en la referencia $\mathcal{R}$ si y sólo si $[P_i\, P_j\, U_{ij}\, P_{ij}] = \frac{x_i}{x_j}$ $\forall i,j$ (Fig. 5)

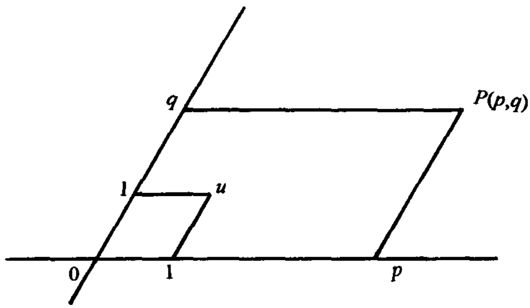

Fig. 6

Este hecho prueba que las coordenadas proyectivas son generalizaciones de las afines, ya que estas se obtienen proyectando el punto P sobre los ejes coordenados y comparando estas proyecciones con el segmento unidad (razón simple). Observemos que cuando uno de los puntos de la razón doble se lleva el infinito, la razón doble se transforma en razón simple de los tres puntos (coordenada afin) (Fig. 6)

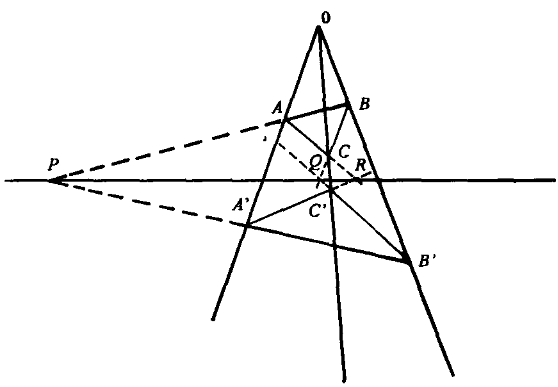

Fig. 7

1.4 Dualidad. Es una de las facetas más atrayentes de la geometría proyectiva. Poncelet obtuvo de modo empírico el principio siguiente.

Principio Si un Teorema relativo a puntos rectas, etc, es válido, es también válido el que resulte de permutar punto y recta, contenido y contiene, suma e intersección.

Por ejemplo el célebre Teorema de Desargues, válido en geometría plana sobre un cuerpo arbitrario:

Si A,B,C, $A'B'C'$ son dos triángulos en posición homológica, es decir con AA',BB',CC' concurrentes en un punto 0, entonces los puntos de corte de lados homológos están alineados.

La formulación simbólica del teorema es: Los puntos

$$(A+A') \cap (B+B') \cap (C+C') = \{0\}$$

$$\Rightarrow (A+B) \cap (A'+B') = P,$$

$$(B+C)\cap(B'+C') = Q \quad (A+C)\cap(A'+C') = R$$

están alineados.

El enunciado dual dice:

Dados los triángulos de lados a,b,c y $a'b'c'$ si $a\cap a'$, $b\cap b'$, $c\cap c'$ estan en la misma recta 0, entonces:

$$a\cap b + a'\cap b', b\cap c + b'\cap c', a\cap c + a'\cap c'$$

son concurrentes.

Se obtiene así como dual el recíproco del teorema de Desargues y el principio de dualidad permite mostrar la equivalencia en el Teorema de Desargues con sólo probar una implicación.

Desde un punto de vista moderno, la dualidad deja de ser un principio y pasa a ser un teorema y no sólo en dimensión dos sino en dimensión arbitraria. El principio de dualidad proyectiva ha sido el origen geométrico de la noción de dual de un espacio vectorial y de la de ortogonalidad entre un espacio vectorial y su dual.

Recordemos que dado un espacio vectorial V, se llama dual de V a $V^* = \mathrm{Hom}(V,k)$. Existe una vía natural de relacionar los subespacios de V y V^*, la ortogonalidad:

$$\begin{cases} \text{si } \; E \subset V \quad \text{se llama} \quad w(E) = \{f \in V^* \mid f(\underline{v}) = 0 \;\; \forall \underline{v} \in E\} \\ \text{si } \; F \subset V^* \;\; \text{se llama} \quad w(F) = \{\underline{v} \in U \mid f(\underline{v}) = 0 \;\; \forall f \in E\} \end{cases}$$

Es claro que:

i) $w(E)$, $w(F)$ son siempre subespacios de V^* y V respectivamente
ii) Si $E \subset E'$ $w(E') \subset w(E)$
iii) Si E d.l. de E' , $w(E') \subset w(E)$
iv) Si L es el subespacio generado por S, $w(L) = w(S)$
v) Si V es de dimensión finita, $\dim w(L) = \dim V - \dim L$ (L subespacio de V)
vi) Si V es de dimensión finita, $w^2(L) = L$(L subespacio de V)

(Las mismas propiedades se verifican en V^*)

En términos vectoriales tenemos un antisomorfismo de rectículos

$$w: \mathcal{L}(V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(V^*)$$

(w es biyectiva y $L_1 \subset L_2 \Leftrightarrow w(L_2) \subset w(L_1)$), por tanto

$$w(L_1 \cap L_2) = w(L_1) + w(L_2) \quad \text{y} \quad w(L_1+L_2) = w(L_1) \cap w(L_2).$$

Como el retículo de subespacios del espacio V es isomorfo al retículo de subespacios proyectivos de $\mathbb{P}(V)$, tenemos un antiisomorfismo de retículos:

$$\begin{cases} \omega : \mathcal{L}(\mathbb{P}(V)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(\mathbb{P}(V^*)) \\ \mathbb{P}(L) \mapsto \mathbb{P}(w(L)) \end{cases}$$

Este isomorfismo lleva subespacios de dimensión d (vectorial d+1) en subespacios de dimensión n-d-1 (vectorial n+1 - (d+1) = n-d) y transforma contenido en contiene, suma en intersección e intersección en suna. Por tanto, este isomorfismo es exactamente el principio de dualidad de Poncelet, ya que si una propiedad p es válida en $\mathbb{P}(V)$ admite una formulación en términos de retículos, es válida para todos los espacios $\mathbb{P}(W)$ con W de la misma dimensión de V, ya que todos los espacios de la misma dimensión son isomorfos. Entonces, la propiedad es válida en $\mathbb{P}(V^*)$ y aplicándole w, su dual es válida automáticamente en V.

El espacio $\mathbb{P}(V^*)$, además de proporcionarnos el Teorema de dualidad, permite la construcción de nuevos espacios proyectivos, los espacios de hiperplanos. En efecto, leyendo cada punto $[f] \in \mathbb{P}(V^*)$ como recta vectorial en V^*, la ortogonalidad nos proporciona un hiperplano $w(f) = \{\underline{v} \mid f(\underline{v}) = 0\} =$ Ker$f$, de modo que los puntos $\mathbb{P}(V^*)$ se pueden considerar como hiperplanos de $\mathbb{P}(V)$ y se puede afirmar que:

Los hiperplanos de un espacio proyectivo forman un espacio proyectivo.

Así, si $\mathcal{R} = \{P_0,...,P_n: U\}$ es una referencia proyectiva, podemos tomar una base normalizada asociada a la referencia $\{\underline{u}_0,...,\underline{u}_n\}$ y construir su base dual $\{f_0,...,f_n\}$; esta base está unívocamente determinada por la fórmula

$$f_i(\underline{u}_j) = \delta_{ij} \qquad \forall i,j \quad 0 \le i \le n \qquad 0 \le j \le n$$

y determina una referencia $\{H_0,...,H_n, H_u\} = \mathcal{R}^*$ en el espacio $\mathbb{P}(V^*)$ por:

$$H_i = [f_i] \qquad 0 \le i \le u \quad , \quad H_u = [f_0 + ... + f_n].$$

$w(f_i)$ es exactamente el hiperplano $x_i = 0$, por tanto un hiperplano H tiene coordenadas $[a_0,...,a_n]$ en $\mathcal{R}^*$ si y sólo si su ecuación en $\mathbb{P}(V)$ respecto de la referencia $\mathcal{R}$ es

$$a_0 x_0 + ... + a_n x_n = 0.$$

Así queda recogida de modo intrínseco la posibilidad de asociar coordenadas a hiperplanos.

1.5 Radiaciones. Proyecciones y secciones.

Veamos ahora cómo construir nuevos espacios proyectivos de interés para establecer el concepto geométrico correspondiente a las aplicaciones lineales.

Si L es un subespacio vectorial de V de dimensión d+1 (dim $V = n$+1), se puede construir el espacio vectorial cociente $V/L = W$; este espacio tiene dimensión n+1 - (d+1) = n-d, y para interpretarlo geométricamente, basta hacer la construcción siguiente:

Sea $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ y $S = \mathbb{P}(L)$, entonces $\mathbb{P}$ es un espacio proyectivo de dimensión n y S un subespacio de dimensión d. Los puntos del espacio proyectivo $\mathbb{P}(V/L)$ son las clases $[\underline{v}+L] = \{h\underline{v} + L \mid h \in k^*\}$, y cada una de estas clases, determina unívocamente un subespacio de dimensión d+1 que contiene a S.

En efecto: Tomando el punto $[\underline{v}+L]$ se puede construir el subespacio

$$[\underline{v}] + S = \mathbb{P}(L(\underline{v}) + L) \qquad (\text{donde } L(\underline{v}) = \{h\underline{v} \mid h \in k\})$$

$$\dim([\underline{v}] + S) = \dim[\underline{v} + \dim S - \dim[\underline{v}] \cap S = 0 + d - (-1) = d+1.$$

Además, es obvio que

$$[\underline{v}+L] = [\underline{w}+L] \Leftrightarrow \underline{v} + L = h\,\underline{w} + L,\ \ h\in k^* \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow L(\underline{v}) + L = L(\underline{w}) + L \Leftrightarrow [\underline{v}] + S = [\underline{w}] + \mathrm{S}.$$

Recíprocamente: Si S' es un subespacio de dimensión d+1 que contiene a S, tomando $[\underline{v}] \in S'$ $[\underline{v}] \notin S$ (que existe por ser $S' \neq S$) es $[\underline{v}] + S = S'$ (Por tener ambos la misma dimensión y estar contenido el primero en el segundo).

Por tanto, los puntos de $\mathbf{P}\ ({}^{V}\!/_{L})$ representan a los subespacios de $\mathbf{P}(V)$ de dimensión d+1 que contienen a $\mathbf{P}(L)$. Este espacio se llama la radiación de vértice S y se representa por ${}^{\mathbf{P}}\!/_{S}$.

La correspondencia $\mathbf{P}\text{-}S \rightarrow {}^{\mathbf{P}}\!/_{S}$ (Fig.8) que asocia a cada punto $P\in \mathbf{P}\text{-}S$ el subespacio P+S se llama **proyección**.

Vamos a identificar la proyección en un sistema adecuado de coordenadas. Para ello consideramos un subespacio vectorial L' complementario de L, es decir tal que

$$\left.\begin{array}{l} L+L'=V \\ L\cap L'=\{\underline{0}\} \end{array}\right\}$$

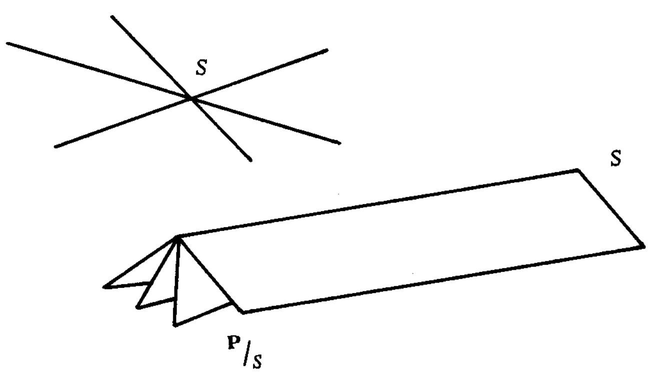

Fig. 8

Para construir este subespacio, basta tomar una base de L $\{\underline{v}_0,\ldots,\underline{v}_d\}$ y ampliarla a una base de V $\{\underline{v}_0,\ldots,\underline{v}_d\ \underline{v}_{d+1},\ldots,\underline{v}_n\}$, entonces $\{\underline{v}_{d+1},\ldots,v_n\}$ forman una base de L' que tendrá dimensión n-d (Ejemplo, si $n = 2$, $d = 0$, n-$d = 2$).

Con estas notaciones, $\{\underline{v}_{d+1} + L,\ldots,\underline{v}_n + L\}$ es una base de ${}^{V}\!/_{L}$ y la aplicación

$$\begin{aligned} L' &\to {}^{V}\!/_{L} \\ \underline{v} &\mapsto \underline{v} + L \end{aligned}$$

es lineal y lleva una base en otra, luego es un isomorfismo de espacios vectoriales (Fig.9)

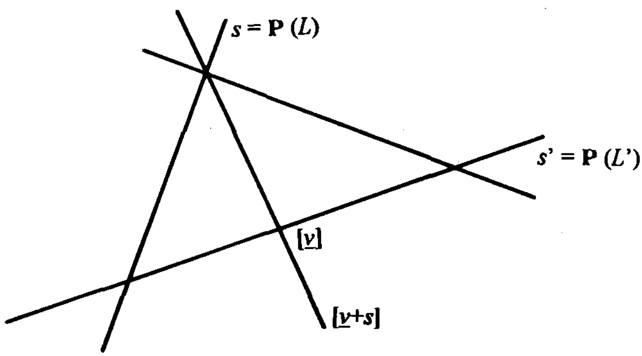

Fig. 9

Esta aplicación induce, en términos proyectivos, una biyección:

$$\begin{aligned} S' = \mathbb{P}(L') &\xrightarrow{\ \sim\ } {}^{\mathbb{P}}\!/_{S} \\ P &\mapsto P+S \end{aligned}$$

cuya inversa se obtiene escribiendo $\forall S_1 \in {}^{\mathbb{P}}\!/_{S}$ un punto $P \in S'$ con $P+S = S_1$, entonces claramente $P \in S_1 \cap S'$, y como

$\dim S_1 \cap S' = \dim S_1 + \dim S'' - \dim(S_1 + S')$ y $\dim S_1 = d+1$, $\dim S' = n$-d-1

y $\qquad S_1 + S' \supset S + S' = \mathbb{P} \Rightarrow S_1 + S' = \mathbb{P} \Rightarrow \dim(S_1 + S') = n$,

luego,

$$\dim(S_1 \cap S') = 0 \quad \text{y} \quad S_1 \cap S' = \{P\}.$$

Por tanto, la inversa de la proyección de S' desde S es la intersección por S' y por eso se llama a esta aplicación: **Sección**.

Si tomamos como referencia en S',

$$\{[v_{d+1}]...[v_n]: [v_{d+1} +...+ v_n]\}$$

y como referencia en $\mathbb{P}/_S$,

$$\{[v_{d+1} + L],...,[v_n+L], [v_{d+1} +...+ v_n] + L\}$$

las proyecciones (o secciones) pasan del punto de coordenadas $[a_0,...,a_{n-d+1}]$ al subespacio con las mismas coordenadas. Este hecho motiva el que la razón doble sea invariante por proyección, más precisamente:

"Si S y S' son subespacios complementarios, P_1,P_2,P_3,P_4 son puntos de S alineados y $S_i = P_i+S \quad 1\leq i\leq 4$, entonces $[P_1,P_2,P_3,P_4] = [S_1,S_2,S_3,S_4]$ ".

Ya que la razón doble se calcula en términos de coordenadas y éstas son, en las referencias adecuadas, estables por proyecciones y secciones.

1.6 Proyectividades y Aplicaciones lineales

Si S_1 y S_2 son dos subespacios de dimensión d en $\mathbb{P}$ de dimensión n, se llama perspectividad de S_1 en S_2 a la transformación π, obtenida tomando un subespacio S complementario de S_1 y S_2, y componiendo la proyección de S_1 desde S, $\varphi_1: S_1 \rightarrow \mathbb{P}/_S$ con la sección de $\mathbb{P}/_S$, por S_2, $\varphi_2: \mathbb{P}/_S \rightarrow S_2$ ($\pi = \varphi_2\, \varphi_1$).

Entonces: $\pi(P) = (P+S) \cap S_2 \quad \forall P\in S_1$.

π es obviamente una aplicación biyectiva.(Fig.10).

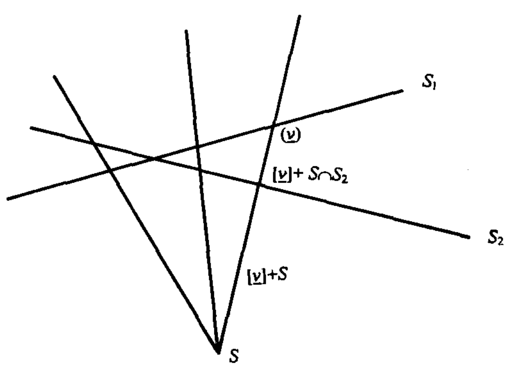

Fig. 10

Se llama proyectividad de Poncelet entre S_1 y S_2 a una cadena de proyecciones y secciones

$$S_1 \to \mathbb{P}/T_1 \to U_1 \to \mathbb{P}/T_2 \to U_2 \dots U_{r-1} \to \mathbb{P}/T_5 \to S_2 .$$

En esta sección vamos a comprobar que estas proyectividades son exactamente los isomorfismos de espacios vectoriales.

Si V_1 y V_2 son dos espacios vectoriales de dimensión $d+1$ y φ es un isomorfismo de V_1 en V_2, φ es compatible con la relacion que define el espacio proyectivo. En efecto:

$$\forall \underline{u}_1\ \underline{u}_2 \in U_1 \quad \underline{u}_1 \sim \underline{u}_2 \Leftrightarrow \underline{u}_1 = h\ \underline{u}_2 \Leftrightarrow \varphi(\underline{u}_1) = h\varphi(\underline{u}_2) \Leftrightarrow \varphi(u_1) \sim \varphi(u_2).$$

Por tanto, φ induce una correspondencia. biunívoca

$[\varphi]:\mathbb{P}(V_1) \to \mathbb{P}(V_2)$ por $[\varphi][\underline{v}]$ (como φ es isomorfismo, $\underline{v} \neq \underline{0} \Rightarrow \varphi(\underline{v}) \neq 0$)

Observemos que si φ_1 y φ_2 son isomorfismos de U_1 en U_2 es

$$[\varphi_1] = [\varphi_2] \Leftrightarrow \exists\ h \in k^* \qquad \varphi_1 = h\varphi_2 \qquad \text{(Ejercicio).}$$

Entonces, podemos identificar $[\varphi]$ con la familia de isomorfismos $\{h\varphi \mid h \in h^*\}$.
(De hecho estamos "proyectivizando" el grupo lineal $GL(V)$ para construir el grupo lineal proyectivo $PGL(V)$)

La biyección $[\varphi]:\mathbb{P}(V_1) \to \mathbb{P}(V_2)$ se llama a una recta de isomorfismos y es esencialmente lo mismo que una proyectividad de Poncelet.

Proposición 1.6.1 Si S_1 y S_2 son subespacios de la misma dimensión de $\mathbb{P}(V)$, $S_1 = \mathbb{P}(L_1)$, $S_2 = \mathbb{P}(L_2)$, y π: $S_1 \to S_2$ es una proyectividad de Poncelet, existe un isomorfismo

$$\varphi: L_1 \xrightarrow{\sim} L_2 \text{ tal que } \pi = [\varphi].$$

Demostración: Como toda proyectividad es producto de perspectividades, basta probar el resultado para una perspectividad.

Si π: $S_1 \to S_2$ es una perspectividad, existe $S = \mathbb{P}(L)$ complementaria de S_1 y S_2 tal que π factoriza en

$$S_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{P}/S \xrightarrow{\varphi_2} S_2,$$

pero φ_1 esta dada por $\varphi_1(P) = P+S$ que corresponde a la aplicación vectorial

$$\overline{\varphi}_1\colon\ L_1 \to V/L$$
$$\underline{v} \mapsto V+L$$

y que es un isomorfismo de espacios vectoriales, luego $\varphi_1 = [\overline{\varphi}_1]$ y como la sección es la inversa de la proyección, $\varphi_2 = [\overline{\varphi}_2]$, donde

$$\overline{\varphi}_2\ V/L \xrightarrow{\sim} L_2$$
$$\underline{v}+L \longrightarrow \underline{v}$$

es el isomorfismo canónico pero ahora en dirección opuesta, luego

$$\pi = \varphi_2\,\varphi_1 = [\,\overline{\varphi}_2\,\overline{\varphi}_1] \qquad \text{y} \qquad \overline{\varphi}_2\,\overline{\varphi}_1\colon\ L_1 \xrightarrow{\sim} L_2$$

es un isomorfismo. □

Proposición 1.6.2 Si $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(V_1)$ y $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V_2)$ son espacios de la misma dimensión y $[\varphi] : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$ es la recta de isomorfismos generada por un isomorfismo φ: $V_1 \to V_2$, existe un espacio vectorial V que contiene a V_1 y V_2 como subespacios, y una proyectividad de Poncelet π: $\mathbb{P}(V_1) \to \mathbb{P}(V_2)$ como subespacios de v tal que

$$\pi = [\varphi].$$

Demostración: Sea $V = V_1 \oplus V_2$ y consideremos

$$q_1\colon V_1 \to V \qquad q_1(\underline{v}) = (\underline{v},0) \quad \forall \underline{v} \in V_1,$$

$$q_2\colon V_2 \to V \qquad q_2(\underline{u}) = (\underline{0},\underline{u}) \quad \forall \underline{u} \in V_2.$$

Si φ: $V_1 \to V_2$ es un isomorfismo, $\{\underline{v}_0,\ldots,\underline{v}_n\}$ es una base de V_1, y $\{\underline{u}_0,\ldots,\underline{u}_m\}$ es su imagen en V_2 ($\varphi(\underline{v}_i) = \underline{u}_i \quad 0 \le i \le n$).

Podemos identificar $\underline{v}_i \equiv q_i(\underline{v}_i)$ $i = 1,2$ y suprimir la componente $\underline{0}$ en los vectores de V, entonces si tomamos los subespacios de V

$$T_0 = L(\underline{u}_0, \underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n),\ T_1 = L(\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n) \ \ldots\ T_{n-1} = L(\underline{u}_0,\ldots\underline{u}_{n-1}, \underline{v}_n)$$

todos ellos tienen dimensión $n+1$ y podemos construir la cadena de isomorfismos

$$V_1 \xrightarrow{\Phi_0} T_0 \xrightarrow{\Phi_1} T_1 \longrightarrow \ldots\ T_{n-1} \xrightarrow{\Phi_n} V_2$$

con $\qquad \Phi_i(\underline{u}_j) = \underline{u}_j\, j \le i\text{-}1 \ \ \Phi_i(\underline{v}_k) = \underline{u}_k \qquad k \ge i,$

claramente $\qquad \varphi = \Phi_n \Phi_{n-1} \ldots \Phi_0.$

Y además las Φ_i tiene la propiedad de que $\exists\ L_{i-1} \subset T_{i-1}$ con $\dim L_{i-1} = n$, $L_{i-1} = T_{i-1} \cap T_i$ y compuesta por vectores invariantes por Φ_i . Por tanto, si demostramos que:

✦ Si V_1 y V_2 son subespacios de dimensión $n+1$ de un espacio de dimensión $2n + 2$ tales que si $L = V_1 \cap V_2$ es $\dim L = n$, y si α: $V_1 \to V_2$ es un isomorfismo que deja invariante todos los vectores de L, existe un subespacio R complementario de V_1 y V_2 tal que α es composición de los isomorfismos naturales $V_1 \xrightarrow{\sim} V/L \xrightarrow{\sim} V_2$. Entonces queda probado nuestro resultado.

Pero, ✦ es inmediato. Como $\dim V_1 \cap V_2 = n$, es

$$\dim V_1 + V_2 = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2 = n + 1 + n + 1 - n = n+2.$$

Si R_0 es un complementario de $V_1 + V_2$,

$$\dim R_0 = 2n+2 - (n+2) = n$$

y tomamos $\qquad \underline{v}_1 \in V_1 \qquad \underline{v}_1 \notin L$ y $\qquad \underline{v}_2 = \varphi(\underline{v}_1)$,

entonces $\underline{v}_1$ y $\underline{v}_2$ son linealmente independientes, y si

$$\underline{v} \in L(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \qquad \underline{v} \neq \underline{v}_1 \qquad \underline{v} \neq \underline{v}_2 \qquad \text{(por ejemplo } \underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2)$$

es $\qquad L(\underline{v}) \cap R_0 = \{\underline{0}\}$ (pues $L(\underline{v}) \subset V_1 + V_2$ complementario de R_0),

luego $\qquad \dim(L(\underline{v}) + R_0) = n+1.$

Además, $R_1 = L(\underline{v}) + R_0$ es complementario de V_1 y V_2 (Ejercicio) y si consideramos la composición

$$\delta\colon V_1 \xrightarrow{\sim} V/R_1 \xrightarrow{\sim} V_2 \quad \forall \underline{v} \in L,\ \delta(\underline{v}) = \underline{v} \qquad \text{y} \qquad \delta(\underline{v}_1) = \underline{v}_2,$$

luego δ coincide con α sobre L y en $\underline{v}_1$, y como

$$\dim V_1 = \dim L + 1, \qquad \delta = \alpha . \ \square$$

1.7 Llamamos, entonces, grupo proyectivo de un espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ a $GL(V)/\sim\ = PGL(V)$, es decir el grupo de transformaciones de la forma $[\varphi]$, donde φ es un automorfismo de V. Según hemos visto, este grupo coincide con el de proyectividades de Poncelet de $\mathbb{P}(V)$ cuando se sumerge $\mathbb{P}(V)$ en un espacio proyectivo $\mathbb{P}(W)$ de dimensión mayor.

Entonces son invariantes por el grupo proyectivo, y por tanto son "nociones geométricas" de la geometría proyectiva

- subespacios y contenido
- dimensiones
- intersección y suma
- razón doble

Cabría preguntarse cual es el conjunto mínimo de estas nociones que caracteriza a la geometría proyectiva. La respuesta es el resultado clásico de Von Staudt, que no demostraremos, y que establece lo siguiente:

Si dim $\mathbb{P}(V) = 1$ se llama proyectividad de Staudt de $\mathbb{P}(V)$ a toda aplicación φ: $\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ que induce un isomorfismo de retículos:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathbb{P}(V)) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{L}(\mathbb{P}(V)) \\ S & \mapsto & \varphi(S) \end{array}$$

Si dim $\mathbb{P}(V) = 1$ se llama proyectividad de Staudt de $\mathbb{P}(V)$ a toda biyección φ: $\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ tal que

$$[P_0\, P_1\, P_2\, P_3] = -1 \Leftrightarrow [\varphi(P_0)\ \varphi(P_1)\ \varphi(P_2)\ \varphi(P_3)] = -1$$

Entonces, se verifica el resultado siguiente:

Teorema de Staudt Si $\mathcal{R} = \{P_0,\ldots,P_n : U\}$ o $\mathcal{R}' = \{P'_0,\ldots,P'_n : U'\}$ son referencias de $\mathbb{P}(V)$, existen tantas proyectividades de Staudt que transforman $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}'$ como automorfismos del cuerpo base.

(Es decir, si *SGL(V)* es el grupo de proyectividades de Staudt de $\mathbb{P}(V)$, *SGL*(*V*) es producto de *PGL*(*V*) y Gal(*k*))

§ 2 GEOMETRIA AFIN Y GEOMETRIA PROYECTIVA

2.1 Compleción del Espacio Afin

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afin de espacio vectorial asociado V, sea $\mathcal{R}(\mathbb{A})$ el conjunto de rectas de $\mathbb{A}$, definimos la relación "tener la misma dirección" en $\mathcal{R}(\mathbb{A})$ por

$$r \sim s \Leftrightarrow r = s \text{ o } r \parallel s \ (\parallel \text{paralela}) \Leftrightarrow d(r) = d(s)$$

(Donde si $S \subset \mathbb{A}$ es un subespacio afin, $d(s)$ es el subespacio vectorial de dirección de s, $d(s) = \{ \overrightarrow{AB} \mid A,B \in S\}$).

A cada elemento de $\mathcal{R}(\mathbb{A})$ se le llama un "punto del infinito del espacio afin" o se llama completado de $\mathbb{A}$ al conjunto $\mathbb{A} \cup \mathbb{A}_\infty$ donde

$$\mathbb{A}_\infty = \mathcal{R}(A)/_\sim .$$

Con esta definición, resulta clara la afirmación: "r y s son rectas paralelas si se cortan en un punto del infinito".

Proprosición 2.1.1 $\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{A} \cup \mathbb{A}_\infty$ tiene estructura de espacio proyectivo.

Demostración El resultado es más preciso de lo que aparece en el enunciado, como vamos a observar en la construcción. (Fig.11)

Sea $W = k \times V$ donde tomamos $\mathbb{P}(W)$, k es el cuerpo base, dim W = dim V+1 y si tomamos $\mathbb{P}(W)$, podemos sumergir $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}_\infty$ en $\mathbb{P}(W)$ del modo siguiente:

Seleccionamos un punto 0 en $\mathbb{A}$ (la inmersión se puede hacer de modo intrínseco pero es formalmente muy complicado), y para cada punto afín P tomamos el punto proyectivo

$$[(1,\overrightarrow{0P})] \in \mathbb{P}(W).$$

La aplicación $i: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{P}(W)$. así obtenida es inyectiva pues:

$$i(P) = i(Q) \Rightarrow [(1, \overrightarrow{0P})] = [(1, \overrightarrow{0Q})] \Rightarrow \exists h \in k \quad (1, \overrightarrow{0P})] = h(1, \overrightarrow{0Q}) \Rightarrow$$
$$h = 1 \ \ \overrightarrow{0P} = h\, \overrightarrow{0Q} \Rightarrow \overrightarrow{0P} = \overrightarrow{0Q} \Rightarrow P = Q.$$

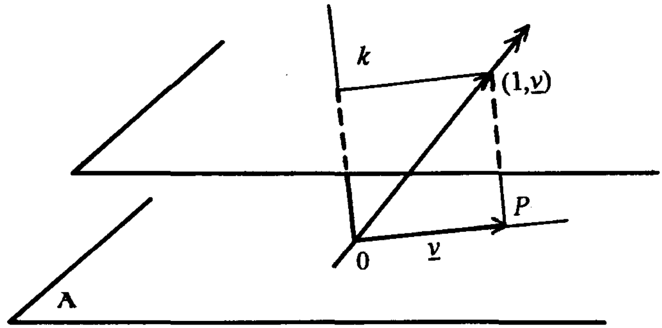

Fig. 11

Además, Im $i = \{[\alpha,\underline{v}] \in \mathbb{P}(W).| \, \alpha \neq 0\}$, ya que si $\alpha \neq 0$,

$$[\alpha,\underline{v}] = [1, \underline{v}/\alpha] = [1, \overrightarrow{0P})] = i(P) \qquad \text{con} \qquad P = 0 + \frac{1}{\alpha}.\underline{v}.$$

Definimos ahora j: $\mathbb{A}_\infty \to \mathbb{P}(W)$ por $j(r) = [0,\underline{v}]$ donde $\underline{v}$ es un vector cualquiera en la dirección de r, j es claramente inyectiva y

$$\text{Im } i \cup \text{Im } j = \mathbb{P}(V); \ \text{Im } i \cap \text{Im } j = \Phi,$$

luego identificando $\mathbb{A} \equiv \text{Im } i$, $\mathbb{A}_\infty \equiv \text{Im } j$, podemos escribir

$$\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{A} \cup \mathbb{A}_\infty = \mathbb{P}(W).$$

Pero el resultado no es meramente conjuntista. □

Proposición 2.1.2

a) Si $A_1,...,A_r \in \mathbb{A}$, $A_1,...,A_r$ son afinmente dependientes si y sólo si son proyectiva-mente dependientes como puntos de $\mathbb{P}(W)$.

b) Si S es un subespacio de $\mathbb{P}(W)$., $S \cap \mathbb{A}$ es un subespacio afin de $\mathbb{A}$, y si $S \cap \mathbb{A} \neq \Phi$, entonces

$$S \cap \mathbb{A}_\infty = \{r \sim | \, r \text{ recta en } S\}.$$

c) Si T es un subespacio afin de $\mathbb{A}$ y $\overline{T}$ es el mínimo subespacio proyectivo que contiene a T, entonces

$$\overline{T} \cap \mathbb{A} = T.$$

d) Si T_1 y T_2 son subespaciosde $\mathbb{A}$, T_1 y T_2 son paralelos si y sólo si

$$\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2 \subset \mathbb{A}_\infty \text{ y } \overline{T}_1 \cap \overline{T}_2 \neq \Phi$$

Demostración:

a) Por definición de dependencia afín $A_1,...,A_r$ son afinmente dependientes, si y sólo si

$$\exists h_1,...,h_r \in k \text{ con } \left\{ \begin{array}{c} 1 = h_1 + ... + h_r \\ 0 = h_1 \overrightarrow{0A_1} + ... + h_r \overrightarrow{0A_r} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$h_1(1, \overrightarrow{0A_1}) + ... + h_r(1, \overrightarrow{0A_r}) = (0, \underline{0})$$

y algún $h_i \neq 0 \Leftrightarrow [1, \overrightarrow{0A_1}]...[1, \overrightarrow{0A_r}]$ son linealmente dependientes.

b) Si $S \cap \mathbb{A} = \Phi$, entonces $S \cap \mathbb{A}$ es un subespacio afín. Si $S \cap \mathbb{A} \neq \Phi$, existe un conjunto finito de puntos $P_1,...,P_r \in S \cap \mathbb{A}$ tales que $\forall P \in \mathbb{P}(W)$, $P \in S \cap \mathbb{A} \Leftrightarrow P \in \mathbb{A}$ y P depende proyectivamente de $P_1,...,P_r$ (se construyen inductivamente y su número está acotado por $\dim S+1$). Como la dependencia de un punto de un conjunto de puntos independientes se puede expresar en términos de dependencia e independencia de conjuntos de puntos, $P \in S \cap \mathbb{A} \Leftrightarrow P \in \mathbb{A}$ y P depende afinmente de $P_1,...,P_r$ (por (a))$\Leftrightarrow S \cap \mathbb{A}$ es el subespacio de $\mathbb{A}$ generado por $P_1,...,P_r$.

c) Se sigue de la demostración anterior.

d) T_1 y T_2 paralelos $\Leftrightarrow T_1 \cap T_2 = \Phi$ y $d(T_1) \cap d(T_2) \neq \{\underline{0}\}$. Como de (b) y (c) es $\overline{T} = T \cup \mathbb{P}(d(T))$ se sigue (d). □

2.2 Coordenadas afines y proyectiva

Si $\mathbb{A}$ es un espacio afin $\mathcal{R} = \{0: \underline{u}_1,...,\underline{u}_n\}$ es una referencia afin de $\mathbb{A}$, y conside-ramos la inmersión de $\mathbb{A}$ en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(W)$ asociada al punto 0, podemos contruir una referencia en $\mathbb{P}(V)$ compuesta por

$$\{[1,\underline{0}]\ [0, \underline{u}_1],...,[0\ \underline{u}_n]: [1, \underline{u}_1+...+\underline{u}_n]\} = \mathcal{R}_P$$

que se llama referencia asociada y como se ve, está compuesta por $[1,\underline{0}] = [1, \overrightarrow{00}]$ que es el punto 0 y los puntos proyectivos correspondientes a las direcciones de los ejes y el punto proyectivo correspondiente al afín de coordenadas $(1,...,1)$.

Esta referencia se llama "referencia asociada a la inicial" y observemos que (Fig.12):

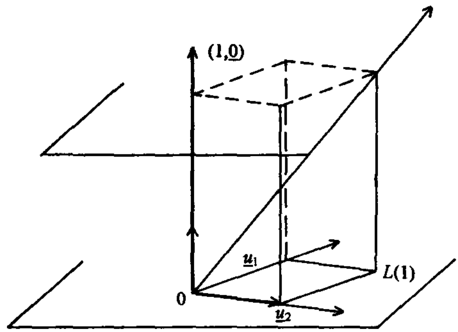

Fig. 12

i) Si $P \in \mathbb{A}$ y P tiene las coordenas afines $(x_1,...,x_n)$ es

$$\vec{0P} = x_1 \underline{u}_1 + ... + x_n \underline{u}_n \Leftrightarrow$$
$$(1,\vec{0P}) = (1,\underline{0}) + x_1(0\underline{u}_1) + ... + x_n(0,\underline{u}_n),$$

luego las coordenadas proyectivas de P en la referencia asociada son $[1,x_1,...,x_n]$:

ii) Si $P \in \mathbb{P}(V)$ y tiene coordenadas en $\mathcal{R}_P$, $[Y_0, Y_1,...,Y_n]$ se pueden dar dos casos:

ii-1 $y_0 \neq 0$, entonces P tiene coordenadas también $[1,\frac{y_1}{y_0},\dots,\frac{y_n}{y_0}]$, es decir

$$P = i(P_0) \text{ con } P_0 = 0 + \frac{y_1}{y_0}\underline{u}_1 + \dots + \frac{y_n}{y_0}\underline{u}_n,$$

luego P tiene coordenadass afines $(\frac{y_1}{y_0},\dots,\frac{y_n}{y_0})$.

ii-2 $y_0 = 0$ entonces $P \in \mathbb{A}_\infty$ y corresponde a la dirección del vector de coordenadas $(y_1,...,y_n)$ en la base $\{\underline{u}_1,...,\underline{u}_n\}$.

2.3 Cartas afines del espacio proyectivo

Hemos visto que el espacio afín n-dimensional se puede sumergir en el espacio proyectivo n-dimensional añadiéndole un hiperplano ($\mathbb{A}_\infty$). Este hiperplano, desde el punto de vista proyectivo, no es un hiperplano especial y cualquier hiperplano de un espacio proyectivo se puede considerar como hiperplano del infinito para una inmersión del espacio afín en el proyectivo. Más precisamente:

Proposición 2.3.1 Si $\mathbb{P}$ es un espacio proyectivo n-dimensional y H es un hiperplano de $\mathbb{P}$, se puede dotar a $\mathbb{P}$-H de estructura de espacio afín con H como hiperplano del infinito.

Demostración: Podemos definir una estructura afín en $\mathbb{P}$-H en función de un generador f de $w(H)$, es decir de una ecuación f de H, si $P \in \mathbb{P}$-H es

$$P = [\underline{u}] \qquad \underline{u} \notin H \Rightarrow f(\underline{u}) \neq 0,$$

entonces podemos seleccionar un representante $\underline{u}_0$ de P con $f(\underline{u}_0) = 1$, y si llamamos W al subespacio de V con $\mathbb{P}(W) = H$, definimos

$$P + \underline{v} = [\underline{u}_0 +, \underline{v}] \quad \forall\, P \in \mathbb{P}\text{-}H \ \forall \underline{v} \in W, [\underline{u}_0] = P,\ f(\underline{u}_0) = 1.$$

Es claro que con esta definición $\mathbb{P}$-H es un espacio afín de espacio vectorial asociado W y, además, que la compleción de $\mathbb{P}$-H es precisamente $\underline{\mathbb{P}}$. Si tomamos una referencia del espacio proyectivo $\{P_0,\ldots,P_n\colon U\}$ tal que $P_1,\ldots,P_n \in H$, entonces $P_i = [\underline{u}_i]$ con $\underline{u}_i \in W$ y $\{\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n\}$ son base de W, luego si $\{\underline{u}_0,\ldots,\underline{u}_n\}$ es una base normalizada asociada a la referencia, $\{P_0; u_1,\ldots,u_n\}$ es una referencia afín de $\mathbb{P}$-H, y si $P \in \mathbb{P}$-H es un punto de coordenadas proyectivas $[a_0,\ldots,a_n]$, $P = [\underline{u}]$ con $\underline{u} = a_0\,\underline{u}_0 + \ldots + a_n\,\underline{u}_n$.

En esta referencia, la ecuación de H es $x_0 = 0$, es decir la función f se puede elegir $f(x_0,\ldots,x_n) = x_0$, luego el vector $\overrightarrow{P_0 P}$ se calcula tomando un representante de P_0 con x_0=1, es decir $\underline{u}_0$, y otro de $[\underline{u}]$ con esta propiedad, es decir

$$\underline{u}_0 + \frac{a_1}{a_0}\underline{u}_1 + \ldots + \frac{a_n}{a_0}\underline{u}_n$$

y restándolos se obtiene por tanto

$$\overrightarrow{P_0 P} = \frac{a_1}{a_0}\underline{u}_1 + \ldots + \frac{a_n}{a_0}\underline{u}_n$$

y las coordenadas afines de P son

$$\left(\frac{a_1}{a_0},\ldots,\frac{a_n}{a_0}\right)$$

Nota: Si partimos de una referencia prefijada, se pueden encontrar fórmulas generales, que no tienen interés salvo en el caso siguiente (que es una pequeña variante del que hemos considerado).

Tomemos una referencia de $\mathbb{P}\{P_0,\ldots,P_i : U\}$ donde $P_0,\ldots,P_{i-1},P_{i+1},\ldots,P_n$ están en H, entonces la ecuación de H en esta referencia es $x_i = 0$, y tomando una base normalizada asociada a ella $\{u_0,\ldots,u_n\}$ y la referencia afín en $\mathbb{P}\text{-}H$ $\{P_i,\underline{u}_0,\ldots,\underline{u}_{i-1},\underline{u}_{i+1}\ldots\underline{u}_n\}$, el punto de coordenadas proyectivas $[a_0,\ldots,a_n]$ tiene coordenadas afines $(\frac{a_0}{a_i},\ldots,\frac{a_{i-1}}{a_i},\frac{a_{i+1}}{a_i},\ldots,\frac{a_n}{a_i})$ y recíprocamente, el punto de coordenadas afines $(b_1,\ldots,b_n)$ tiene coordenadas proyectivas $[b_1,\ldots,b_i,1,b_{i+1}\ldots b_n]$.

Entonces, si consideramos en un espacio proyectivo $\mathbb{P}$ una referencia $\{P_0,\ldots,P_n\colon U\}$ y llamamos H_i al hiperplano $x_i = 0$, se verifica que:

1) Si $U_i = \mathbb{P}\text{-}H_i$, es $\mathbb{P} = \bigcup\limits_0^n U_i$.

2) Cada U_i es un espacio afín de la misma dimensión de $\mathbb{P}$.

3) La referencia dada induce referencias afines $\{P_i,\underline{u}_0,\ldots,\hat{\underline{u}}_i,\ldots,\underline{u}_n\}$ en cada U_i: Si $P\in\mathbb{P}$ tiene coordenadas $[a_0,\ldots,a_n]$, $P\in U_i \Leftrightarrow a_i \neq 0$, y en este caso sus coordenadas en U_i son $(\frac{a_0}{a_i},\ldots,\frac{\hat{a}_i}{a_i},\ldots,\frac{a_n}{a_i})$.

4) Si llamamos $\varphi_i\colon U_i \xrightarrow{\sim} k^n$ a la correspondencia que asocia a cada punto sus coordenadas en U_i, la coorrrespondencia

$\varphi_j\,\varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ (j > i para fijar un caso particular)

viene dada por:

$$\varphi_j\,\varphi_i^{-1}(x_1,\ldots,x_n) = \varphi_j[x_1,\ldots,x_i,1,\ldots,x_n] = \left(\frac{x_1}{x_j},\ldots,\frac{\hat{x}_j}{x_j},\ldots\frac{1}{x_j}\ldots\frac{x_n}{x_j}\right).$$

Es decir, es birracional y no tiene polos (pues $x_j \neq 0$).

Se observa que los casos real, complejo o valorado no arquimediano, $\mathbb{P}$ tiene estructura de variedad analítica con este atlas.

Observación: $\mathbb{P}(V)$ se puede dotar de una topología (la de Zariski) sobre un cuerpo cualquiera, pero vamos a hallar una específica del caso real.

Se puede definir (Fig.13) una aplicación:

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}(\mathbb{R}^n) \\ \underline{v} & \mapsto & [\underline{v}] \end{array}$$

la aplicación no es inyectiva pues $\varphi(\underline{v}) = \varphi(-\underline{v})$, pero si pasamos al cociente en S^{n-1} por la acción de $\mathbb{Z}/_{(2)}$ (Identificamos puntos antípodas $\underline{v} \equiv -\underline{v}$), se obtiene

$$S^{n-1}/_{(\mathbb{Z}/(2))} \to \mathbb{P}^{n-1}$$

que es biyectiva y más aún es un difeomorfismo analítico, es decir desde el punto de vista geométrico, $\mathbb{P}^{n-1}$ es el cociente de la esfera S^{n-1} por la acción del grupo $\mathbb{Z}/_{(2)}$.

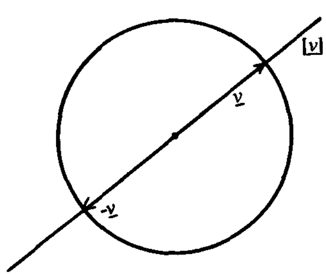

Fig. 13

Este resultado permite describir $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ en dimensiones bajas.

a) $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \simeq S^1$ (Fig.14)

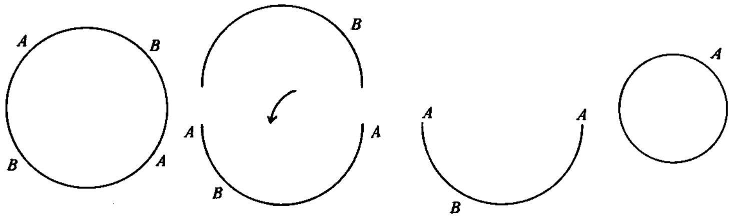

Fig. 14

b) $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tiene una estructura más complicada como se aprecia en los dibujos siguientes (Fig. 15):

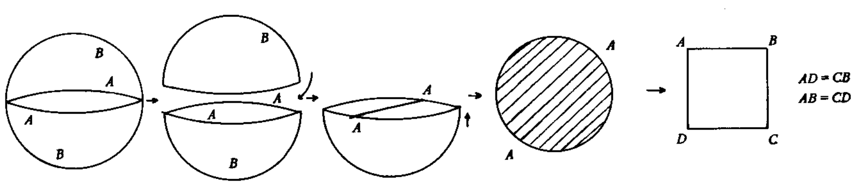

Fig. 15

Es decir, $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ no tiene representación en $\mathbb{R}^3$ (la superficie singular más próxima está descrita en *Hilbert-Cohn Vossen*) y hay que entenderlo como superficie en $\mathbb{R}^4$.

En el caso complejo, tiene especial interés la recta proyectiva

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}.$$

Es una compactificación de $\mathbb{R}^2$ por un punto que se puede identificar, como veremos en la sección siguiente, con la esfera S^2 vía la proyección estereográfica.. Esta identificación tiene especial interés por su adaptación a la métrica euclídea y constituye el ejemplo más simple de compactificación de un espacio adaptada a una métrica.

APENDICE: LA RECTA PROYECTIVA COMPLEJA Y LA GEOMETRIA CONFORME DE $\mathbb{R}^2$

A-1 Proyectividades de Staudt de la recta proyectiva

Vamos a obtener todas las proyectividades de Staudt de la recta proyectiva sobre un cuerpo arbitrario k (de característica distinta de 2 y 3).

Sea $\pi: \mathbb{P}_k^1 \to \mathbb{P}_k^1$ una proyectividad de Staudt, es decir, una correspondencia biunívoca tal que

$$[A,B,C,D] = -1 \Leftrightarrow [\pi(A), \pi(B), \pi(C), \pi(D),] = -1$$

Tomemos una referencia $\{P_0,P_1: U\}$ en $\mathbb{P}_k^1$ y supongamos que

$$(*)\ \pi(P_0) = P_0,\ \ \pi(P_1) = P_1,\ \ \pi(U) = U$$

Entonces, definimos una correspondencia $\tau: k \to k$ por

$$[P_0\, P_1\ U\, X] = h \ \Rightarrow\ [P_0\, P_1\ U\, \pi(X)] = \tau(h),\ \ \tau(0) = 0, \tau(1) = 1.$$

Sobre τ, podemos afirmar lo siguiente:

i) Si $h \neq 0$, existe un único punto X, el de coordenadas $[h,1]$ tal que $[P_0\ P_1\ U\ X] = h$, entonces $\tau(h)$ esta bien definido, por ser π biunívoca, y $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$; por tanto, τ es una aplicación.

ii) Como π es biunívoca, τ también lo es y $\pi[h,1] = [\tau(h),1]\ \forall\ h \in k$.

iii) $\forall\ \alpha \in k\ \ \tau\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\tau(\alpha)}{2}$. En efecto, si $\alpha = 0$ es trivial y si $\alpha \neq 0$,

$$[[0,1], [\alpha,1], [1\ 0], [\alpha/2,1]] = -1 \ \Rightarrow\ [[0,1]\ [\tau(\alpha),1], [1\ 0], [\tau(\alpha/2),1]] = -1$$

pero esta última razón doble vale

$$\frac{\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\ \begin{vmatrix}\tau(\alpha) & 1\\ \tau(\frac{\alpha}{2}) & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0 & 1\\ \tau(\frac{\alpha}{2}) & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\tau(\alpha) & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}} = \frac{\tau(\frac{\alpha}{2})-\tau(\alpha)}{\tau(\frac{\alpha}{2})}$$

debe ser $\tau(\alpha) = 2\,\tau\,(\frac{\alpha}{2})$.

iv) $\tau(\alpha+\beta) = \tau(\alpha) + \tau(\beta)$. Si $\alpha = \beta$ se sigue de (iii) y si $\alpha \neq \beta$ es

$$[[\alpha,1], [\beta,1], [1,0], [\frac{\alpha+\beta}{2},1]] = -1 \Rightarrow$$
$$[[\tau(\alpha),1]\ [\tau(\beta),1], [1\ 0], [\tau(\frac{\alpha+\beta}{2}),1]] = -1,$$

luego como antes $\tau(\frac{\alpha+\beta}{2}) = \frac{\tau(\alpha)+\tau(\beta)}{2}$ y de (iii), $\tau(\alpha+\beta) = \tau(\alpha)+ \tau(\beta)$.

v) $\tau(\alpha^2) = \tau(\alpha))^2\ \forall\ \alpha\in k$. Si $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ ó $\alpha = \frac{1}{2}$ es trivial, en caso contrario, observemos que si $\alpha+\beta \neq 0$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, entonces

$$[[\alpha,1], [\beta,1], [0,1], [\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta},1]] = -1$$

y el mismo razonamiento anterior prueba que:

$$\tau\,(\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}) = \frac{2\tau(\alpha)\tau(\beta)}{\tau(\alpha)+\tau(\beta)}.$$

Tomando $\beta = 1-\alpha$ (si $\alpha \neq \frac{1}{2}$, $\beta \neq \alpha$), se tiene

$$\tau(2\alpha - 2\alpha^2) = 2\tau(\alpha) - 2\tau(\alpha)^2 \quad (\ \tau(\alpha) + \tau(\beta) = \tau(\alpha+\beta) = \tau(1) = 1)\ )$$

y de nuevo por (iv) y (iii),

$$2\tau(\alpha) - 2\tau(\alpha^2) = 2\tau(\alpha) - 2\tau(\alpha)^2 \Rightarrow \tau(\alpha^2) = \tau(\alpha)^2.$$

vi) $\tau(\alpha\,\beta) = \tau(\alpha)\,\tau(\beta)\quad \forall\tau \in k$

Basta calcular

$$\tau[(\alpha+\beta)^2] = \tau(\alpha^2) + \tau(\beta^2) + 2\tau(\alpha\beta) = (\tau(\alpha+\beta))^2$$
$$= \tau(\alpha)^2 + \tau(\beta)^2 + 2\tau(\alpha)\tau(\beta)$$

y de nuevo por (v) se sigue el resultado.

Por tanto τ es un automorfismo de cuerpos y

$$\pi[\alpha_0,\alpha_1] = \pi[\frac{\alpha_0}{\alpha_1},1] = [\tau(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}),1] = [\frac{\tau(\alpha_0)}{\tau(\alpha_1)},1] = [\tau(\alpha_0)\ \tau(\alpha_1)]$$

si $\alpha_1 \neq 0$ y $\pi[10] = [10]$, por hipótesis, luego

"Existen tantas proyectividades de $\mathbf{P}_k^1$ que dejan invariante una referencia, como automorfismos del cuerpo k".

Si suponemos que π no verifica la condición (*), podemos siempre encontrar una recta de automorfismos σ que lleve $\{\pi(P_0)\ \pi(P_1): \pi(U)\}$ a $\{P_0\ P_1: U\}$ y $\sigma\pi$ verifica la propiedad (*); por tanto, existe el automorfismo τ con $\sigma\pi[x_0\,x_1] = [\tau(x_0), \tau(x_1)]$, luego

$$\pi[x_0\,x_1] = \sigma^{-1}[\tau(x_0)\ \tau(x_1)].$$

Entonces, como σ tiene una matriz $M = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}$ (con det $M \neq 0$) si $M^{-1} = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{pmatrix}$, las ecuaciones de π son

$$\pi[x_0\,x_1] = [y_0,y_1], \quad \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(x_0) \\ \tau(x_1) \end{pmatrix}.$$

Notas:

a) Si $K = \mathbb{R}$, como el único automorfismo de $\mathbb{R}$ es la identidad, ya que $\tau:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ automorfismo $\Rightarrow \tau(1) = 1 \Rightarrow \tau(n) = n \ \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$\tau(\frac{m}{n}) = \frac{\tau(m)}{\tau(n)} \quad \forall m,n \in \mathbb{Z}.$$

Y además, $\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta^2$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0 \Leftrightarrow \tau(\alpha) = \tau(\beta^2) = (\tau(\beta))^2$, $\tau(\beta) \neq 0 \Leftrightarrow \tau(\alpha) > 0$.

Entonces, $\tau(\alpha) = \alpha \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ pues si $\tau(\alpha) = \beta \neq \alpha$ y suponemos $\alpha < \beta$ (igual daría suponer la desigualdad contraria), entonces $\exists\ r \in Q$ con $\alpha < r < \beta$ y $\beta = \tau(\alpha) < \tau(r) = r$ lleva a contradicción.

b) Si $K = \mathbb{C}$, existen dos automorfismos **continuos** pues ahora no vale el razonamiento anterior ya que $\mathbb{C}$ no es ordenado, pero como $\tau(r) = r\ \forall r \in \mathbb{Q}$, si τ es continuo, $\tau(\alpha) = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, entonces como $i^2 = -1$, $\tau(i)^2 = \tau(i^2) = \tau(-1) = -1 \Rightarrow \tau(i) = \pm I$; si $\tau(i) = i$, τ es la identidad de $\mathbb{C}$ y si $\tau(i) = -i$,

τ es la conjugación. Pero, además, existe una infinidad de automorfismos no continuos de $\mathbb{C}$ (ya que $\mathbb{C}$ tiene grado de trascendencia ∞ sobre el cierre algebraico de $\mathbb{Q}$).

Entonces nos vamos a limitar a estudiar las proyectividades contínuas de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, que están siempre definidas por ecuaciones:

$$\pi[z_0,z_1] = [z'_0,z'_1] \text{ con}$$

$$\begin{cases} z'_0 = a_{00}\,\tau(z_0) + a_{01}\,\tau(z_1) \\ z'_1 = a_{10}\,\tau(z_0) + a_{11}\,\tau(z_1) \end{cases} \quad \tau = 1_c \text{ ó } \tau = \text{conjugación}$$

Si admitimos la notación $[\infty]$ para el punto del infinito en una inmersión prefijada

$$\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}},$$

entonces todos los puntos $[\alpha_0,\alpha_1]$ se pueden representar como

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \quad (\text{si } \alpha_0 \neq 0) \text{ ó } \infty \text{ para } [01],$$

con este convenio podemos "dividir" las dos ecuaciones anteriores, y llamando $z' = \frac{z'_1}{z'_0}$, $z = \frac{z_1}{z_0}$ escribir

$$z' = \frac{z'_1}{z'_0} = \frac{a_{10}\,\tau(z_0) + a_{11}\,\tau(z_1)}{a_{00}\,\tau(z_0) + a_{01}\,\tau(z_1)} = \frac{a_{10} + a_{11}\dfrac{\tau(z_1)}{\tau(z_0)}}{a_{00} + a_{01}\dfrac{\tau(z_1)}{\tau(z_0)}} = \frac{a_{10} + a_{11}\,\tau(z)}{a_{00} + a_{01}\,\tau(z)};$$

se obtienen así las llamadas transformaciones de Moebius de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

A-2 El grupo de Moebius

Las transformaciones de Moebius responden a dos expresiones diferentes; si

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} \neq 0 \; :$$

a) Transformaciones directas:

$$z' = \frac{a_{10} + a_{11}\, z}{a_{00} + a_{01}\, z} \,.$$

b) Transformaciones conjugadas:

$$z' = \frac{a_{10} + a_{11}\, \bar{z}}{a_{00} + a_{01}\, \bar{z}} \,, \qquad \bar{z} = x - iy \quad \text{si} \quad z = x + iy \,.$$

Estas transformaciones forman un grupo, ya que son la proyectividades contínuas de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ y entre ellas las directas forman un subgrupo de índice 2.

Si $a_{01} = 0$, $a_{00} \neq 0$ y se obtienen las transformaciones afines $z' = a\, z + b$ o semiafines $z' = a\, \bar{z} + b$ de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, son todas ellas biyectivas.

Si $a_{01} \neq 0$, usando z^* para indicar, según los casos, z o $\bar{z}$,

$$z' = a + \frac{1}{b\, z * c} \,, \quad a = \frac{a_{11}}{a_{01}} \,, \quad b = -\frac{a_{01}{}^2}{\Delta} \,, \quad c = -\frac{a_{00} a_{01}}{\Delta} \,,$$

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Entonces es inmediato comprobar que el grupo de Moebius está generado por las transformaciones siguientes:

i) $z' = a + z$

ii) $z' = b.z \qquad |b| = 1$

iii) $z' = r.z \qquad r \in \mathbb{R}$

iv) $z' = \bar{z}$

v) $z' = \dfrac{1}{z}$

Si identificamos $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, las transformaciones (i)-(iv) corresponden respectivamente a traslación, giro de ángulo arg. b, homotecia de razón r y simetría respecto al eje real. De modo que:

1- Las transformaciones $z' = a\, z + b$, $|a| = 1$ son exactamente los movimientos directos de $\mathbb{R}^2$.

2- Las transformaciones $\begin{cases} z' = a\ z + b \\ z' = a\ \bar{z} + b \end{cases}$ $|a| = 1$ son los movimientos.

3- Las transformaciones $\begin{cases} z' = a\ z + b \\ z' = a\ \bar{z} + b \end{cases}$ forman el grupo equiforme o grupo de las semejanzas de $\mathbb{R}^2$.

Queda únicamente por estudiar la transformación $z' = \frac{1}{z}$ y, más generalmente, todas las transformaciones $z' - a = \frac{r^2}{\bar{z}-\bar{a}}$ $(r \in \mathbb{R})$. Estas transformaciones son biyecciones de $\mathbb{C}-\{a\}$ en $\mathbb{C} - \{a\}$ y transforman a en ∞ y ∞ en a, y reciben el nombre genético de **inversiones**, de polo a y razón r^2. Geométricamente, identificando $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$ como

$$z' - a = \frac{r^2.(z-a)}{|z-a|^2} \quad , \quad z' \text{ y } z \text{ están alineados con } a$$

y como

$$|z' - a| = \frac{r^2}{|\bar{z}-\bar{a}|} = \frac{r^2}{|z-a|} \quad \Rightarrow \quad |z - a|\ |z'-a| = r^2\ ;$$

es decir, el producto de distancias de z y z' al punto a es constante y es igual a r^2. Luego, todos los puntos de la circunferencia de centro de a y radio r son invariantes, y de hecho son los únicos puntos invariantes, y la transformación intercambia el exterior y el interior del círculo limitado por esta circunferencia. Para entender un poco más esta transformación, conviene estudiar unos subconjuntos significativos de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, los ciclos.

A-3 Ciclos en $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

Como $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ es una recta proyectiva, se puede calcular la razón doble de cuatro puntos de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, aunque vía la identificación $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, no sean puntos alineados de $\mathbb{R}^2$. Entonces si $A,B,C \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ son puntos distintos, llamamos ciclo generado por ellos al conjunto:

$$[ABC] = \{X \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \mid [A,B,C,X] \in \mathbb{R}\}$$

i) $[ABC]$ es una circunferencia o una recta (según no contenga o contenga a ∞) en $\mathbb{R}^2$.

Supondremos que $\{A,B,C\} \subset \mathbb{R}^2$ y por tanto $A = [1,a]$ $B =[1,1]$, $C=[1,c]$, entonces

$$[A,B,C] \cap \mathbb{R}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid [a\ b\ c\ z] = h \in \mathbb{R}\}$$

es decir, está definido por la ecuación

$$\frac{c-a)\,(z-b)}{(c-b)\,(z-a)} = h \in \mathbb{R}\,.$$

De ella se puede despejar

$$z = \frac{a(c-b)h - b(c-a)}{(c-b)h - (c-a)}\,.$$

Entonces, como $(c - a) \neq 0$, $c\text{-}b \neq 0$, se pueden dar dos casos:

a) $\infty \in [ABC] \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{R}\quad h(c\text{-}b) - (c\text{-}a) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{c-a}{c-b} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ A,B,C alineados.

Entonces, dividiendo por $c\text{-}b$ y llamando $t = \dfrac{c-a}{c-b} \in \mathbb{R}$, es

$$z = \frac{a\ h - bt}{h-t} = a + (a-b)\,\frac{t}{h-t}$$

que es la ecuación de la recta por A y B.

b) $\infty \notin [ABC] \Leftrightarrow$ $v = \dfrac{c-a}{c-b} \notin \mathbb{R}$, entonces en la ecuación inicial del ciclo

$$u.\frac{z-b}{z-a} = h \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$

$$u.\frac{z-a}{z-b} = \bar{u}.\frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{z}-\bar{b}} \Leftrightarrow u(z\text{-}a)\,(\,\bar{z} - \bar{b}) = \bar{u}(\,\bar{z} - \bar{a})\,(z - b) \Leftrightarrow$$

$$(u - \bar{u})\, z\ \bar{z} = -[(u\ \bar{a} - \bar{u}\ \bar{b}\,]\, z - (\,\bar{u}\, a - u\, b)\ \bar{z}] + [u\ \bar{a}\, b - u\, a\ \bar{b}] = 0$$

cada uno de los tres términos de esta suma algebraica es real, y si $z = x + iy$,

$$u - \bar{u} = v \operatorname{Im} u = 2\alpha_1,\ (u\ \bar{a} - \bar{u}\ \bar{b})\, z - (\,\bar{u}\, a - u\, b)\ \bar{z} =$$

$$= 2 \operatorname{Im}((u\ \bar{a} - \bar{u}\ \bar{b})\, z) = 2\alpha_2\, x + 2\alpha_3 y,$$

$$u\ \bar{a}\, b - ua\ \bar{b} = 2 \operatorname{Im} u\ \bar{a}b = 2\alpha_4\,.$$

Entonces la ecuación es

$$\alpha_1(x^2 + y^2) + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 = 0$$

que es la ecuación de una circunferencia, que ha de ser real pues A, B y C están en ella.

Como las proyectividades de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ que manejamos tienen como automorfismo asociado 1 ó la conjugación y ambos dejan invariantes los reales, podemos afirmar que si π es una proyectividad contínua de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$$\pi[ABC] = [\pi(A)\ \pi(B)\ \pi(C)].$$

Es decir, las transformaciones de Moebius transforman ciclos en ciclos. En particular, una transformación de Moebius

$$z' = \frac{\alpha + \beta\ z}{\gamma + \delta\ z} \text{ con } \delta \neq 0$$

transforma $p = -\dfrac{\gamma}{\delta}$ en ∞ y transforma ∞ en $q = \dfrac{\alpha}{r}$; estos puntos se llaman polo y antipolo de la transformación (en la inversión ambos coinciden). Entonces dado el ciclo $\Gamma = [ABC]$ si Γ es una recta, Γ pasa por ∞, luego $\pi(\Gamma)$ pasa por q; si Γ no contiene a P, $\pi(\Gamma)$ no contiene a ∞, luego $\pi(\Gamma)$ es una circunferencia y si Γ contiene a p, $\pi(\Gamma)$ contiene a ∞ y es una recta, luego:

(*) Las transformaciones de Moebius transforman las rectas que pasan por el polo en rectas que pasan por el antipolo, y las rectas que no pasan por el polo en circunferencias que pasan por el antipolo.

(**) Las transformaciones de Moebius transforman circunferencias que pasan por el polo en rectas que no pasan por el antipolo y circunferencias que no pasan por el polo en circunferencias que no pasan por el antipolo.

A-4 Transformaciones conformes

Si V y W son dos variedades diferenciales con una métrica de Riemann, una aplicación diferenciable $f\colon V \rightarrow W$ se llama conforme si $\forall P \in V$

$$df_{\mathrm{p}}\colon T_{\mathrm{p}}(V) \rightarrow T_{\mathrm{p}}(W)$$

es una aplicación lineal conforme.

Recordemos que una aplicación entre espacios vectoriales métricos, se llama conforme si conserva los ángulos (no orientados) de los vectores.

i) Las isometrías de un espacio vectorial métrico son conformes pues conservan ángulos y distancias. Las semejanzas son conformes pues aunque no conservan distancias, es claro que conservan ángulos.

ii) Las transformaciones de Moebius son conformes. En efecto, basta comprobar que es conforme la inversión $z' = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$. En coordenadas cartesianas la inversión se escribe

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ y' = \dfrac{y}{x^2 + y^2} \end{cases} \qquad \text{(como aplicación de } \mathbb{R}^2 - (0,0) \to \mathbb{R}^2 - (0,0) \text{)}$$

y su diferencial, en el punto (xy), tiene como matriz

$$\begin{pmatrix} \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ -\dfrac{2yx}{(x^2 + y^2)^2} & \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} -\cos^2 \alpha + sen^2 \alpha & -2\cos\alpha \; sen\, \alpha \\ -2\cos\alpha \; sen\, \alpha & -sen^2 \alpha + \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -\cos 2\alpha & -sen\, 2\alpha \\ -sen\, 2\alpha & +\cos 2\alpha \end{pmatrix} \qquad \alpha = \arg(z) = arc \cos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Por tanto, si φ es la inversión, $(d\varphi)_p = h.S_p$ donde S_p es una simetría, luego $(d\varphi)_p$ es conforme y por tanto, todas las transformaciones de Moebius son conformes.

iii) En general, si T es un espacio vectorial métrico, una aplicación φ: $T \to T$ lineal, conforme, es de la forma $\varphi = h.\Phi$, donde Φ es una isometría. Entonces:

a) Si dim $T = 2$, si φ es conforme y $\varphi(\underline{v}) = \underline{w}$ para un vector cualquiera $\underline{v}$, existe una isometría ψ que será un giro si φ conserva la orientación, o una simetría si φ la cambia, tal que

$$\Psi\, \varphi(\underline{v}) = h\underline{v} \qquad (h > 0),$$

entonces como Ψ es también conforme,

$$\forall \underline{w}\underline{v},\hat{}\underline{w} = \Psi\varphi(\underline{v}),\hat{}\psi\varphi(\underline{w}) = \underline{v},\hat{}\psi\varphi(\underline{w}),$$

(ahora,ángulos orientados pues $\psi\varphi$ preserva la orientación)

por tanto,

$$\exists\, h_w > 0 \qquad \text{con} \qquad \Psi\varphi(\underline{w}) = h_w \,.\, \underline{w}$$

y como $\Psi\varphi$ es lineal, si tomamos $\underline{w}_1$ y $\underline{w}_2$

$$\psi\varphi(\underline{w}_1) = h_{w_1} w_1,\ \psi\varphi(\underline{w}_2) = h_{\underline{w}_2} \underline{w}_2,\ \psi\varphi(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) = h_{\underline{w}_1 + \underline{w}_2} (\underline{w}_1 + \underline{w}_2)$$

$$= h_{w_1} w_1 + h_{w_2} w_2$$

$$\Rightarrow \qquad h_{w_1} = h_{w_2} = h_{\underline{w}_1 + \underline{w}_2} \qquad \text{(si } \underline{w}_1 \text{ y } \underline{w}_2 \text{ son independientes).}$$

b) Si $\dim T > 2$, se reduce al caso (a) tomando planos $L \subset T$ y $\varphi|_L : L \to \varphi(L)$.

Lo mismo sucede claramente, tomando un vector independiente de ambos, si $\underline{w}_1$ y $\underline{w}_2$ son dependientes. Luego

$$\psi\varphi = h \,.\, \mathrm{Id} \Rightarrow \varphi = \boldsymbol{h} \,.\, \psi^{-1}.$$

Es decir, las únicas aplicaciones lineales conformes son las semejanzas.

iv) Cabe preguntarse por las transformaciones de $\mathbb{R}^2$ que sean conformes, si coinciden o no con el grupo de Moebius, pero es un cálculo muy simple que si $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa, fuera de los puntos en los que $\mathrm{Re}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ tienen una singularidad común, la correspondencia inducida $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es también conforme (condición de Cauchy Riemann).

v) Sin embargo, podemos considerar las inversiones como correspondencias de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, dadas por

$$f_h(\underline{x}) = \underline{a} + h \,.\, \frac{\underline{x} - \underline{a}}{|\underline{x} - \underline{a}|^2}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Estas correspondencias son biyecciones de $\mathbb{R}^n - \{\underline{a}\}$ en $\mathbb{R}^n - \{\underline{a}\}$ y generan un grupo de transformaciones que incluye los movimientos y las semejanzas, y está obviamente compuesto por transformaciones conformes. Entonces si $\boldsymbol{n \geq 3}$ hay un teorema de Liouville que asegura que éste es exactamente el grupo de transformaciones conformes.

Si en vez de limitarnos a $\mathbb{C}$ usamos $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, la situación es distinta como veremos a continuación.

A-5 Proyección Estereográfica

Consideremos S^2 y $\mathbb{R}^2$ sumergidos en $\mathbb{R}^3$ como las superficies de ecuaciones $x^2+y^2+(z-1)^2 = 0$ y $z = 0$, respectivamente (Fig. 16). Se llama proyección estereográfica de S^2 en $\mathbb{R}^2$ a la aplicación

$$\pi_0 \colon S^2 - \{P\} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

con P= (002) llamado polo de la proyección, dada por

$$\forall\, A \in S^2 \quad A \neq P \qquad \pi_0(P) = (PA) \cap \mathbb{R}^2 .$$

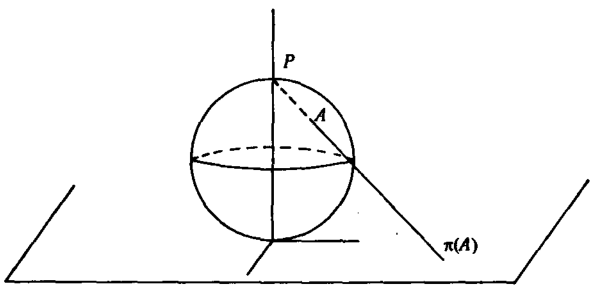

Fig. 16

En, coordenadas claramente

$$\pi_0(a,\, b,\, c) = \left(\frac{2a}{2-c}, \frac{2b}{2-c} \right)$$

y su inversa es

$$\pi_0^{-1}(u,v) = \left(\frac{4u}{a^2+v^2+4}, \frac{4v}{u^2+v^2+4}, \frac{2u^2+2v^2}{u^2+v^2+4} \right).$$

i) La proyección estereográfica es una aplicación conforme; la demostración de este hecho se puede hacer geométricamente de modo elemental, y también se puede hacer con un argumento similar al empleado en A-4, analizando la diferencial de la aplicacón; vamos a elegir este último para practicar con métricas de Riemann.

Dado el punto $A \in S^2$ $A \neq P$, podemos elegir una carta local que contenga a A dada por una función

$$J:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\rightarrow S^2 \qquad J(\alpha,\beta) = (\cos\alpha\cos\beta, \cos\alpha \operatorname{sen}\beta, 1+\operatorname{sen}\alpha).$$

Entonces la métrica en $T_x(S^2)$ para $X = J(\alpha,\beta)$ genérico, viene definida por la "primera forma fundamental"

$$N=\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \qquad E=\frac{\partial J}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial J}{\partial \alpha}=sen_{\alpha}^{2}\cos^{2}\beta+sen^{2}\alpha\ sen^{2}\beta+\cos^{2}\alpha=1,$$

$$F=\frac{\partial J}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial J}{\partial \beta}=0, \quad G=\frac{\partial J}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial J}{\partial \beta}=\cos^{2}\alpha\ sen^{2}\beta+\cos^{2}\alpha\ \cos^{2}\beta\ =\cos^{2}\alpha\ .$$

La condición de transformación conforme entre dos espacios viene dada por:

$$f: T_1 \rightarrow T_2 \text{ (con productos escalares } <,>_1 \text{ y } <,>_2)$$

es conforme si y sólo si $\exists\ h \in k$ con $f = h\varphi$ con φ isometría, es decir:

$$\forall\ \underline{v},\underline{w} \in T_1 < f(\underline{v}) . f(\underline{w}) >_2 = h^2 < \varphi(\underline{v}) . \varphi(\underline{w}) >_2 = h^2 < \underline{w},\underline{w} >_1$$

es decir, si N_1 y N_2 son las matrices de las métricas en T_1 y T_2, y M es la matriz de f

$$f \text{ conforme} \Leftrightarrow \exists\ h \in k\, M^t . N_2 . M = h^2 . N_1 .$$

En nuestro caso $N_1 = N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha \end{pmatrix}$, $N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y M es la matriz de la diferencial de la proyección estereográfica. En la carta local elegida, esta proyección es:

$$\pi(\alpha,\beta)=\left(\frac{2\cos\alpha\cos\beta}{1-sen\alpha},\frac{2\cos\alpha\ sen\beta}{1-sen\alpha}\right)$$

y su diferencial tiene como matriz

$$M=\begin{pmatrix} \dfrac{2\cos\beta}{1-sen\alpha} & -\dfrac{2\cos\alpha\ sen\beta}{1-sen\,\alpha} \\ \dfrac{2\,sen\beta}{1-sen\,\alpha} & \dfrac{2\cos\alpha\cos\beta}{1-sen\alpha} \end{pmatrix}=\frac{2}{1-sen\,\alpha}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\cos\alpha\ sen\,\beta \\ sen\,\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$M^t I.M = \frac{4}{(1-sen\,\alpha)^2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \cos^2\alpha\end{pmatrix} = \frac{4}{(1-sen\,\alpha)^2}.v$$

Luego la proyección estereográfica es conforme

ii) La proyección estereográfica se extiende a un difeomorfismo analítico

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \xleftarrow{\sim} S^2$$

<u>ii-1</u> $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ tiene estructura de variedad analítica real con el recubrimiento

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = U_0 \cup U_1$$

$$\begin{cases} U_0 = \{[z_0,z_1] \mid z_0 \neq 0\} & \varphi_0 : U_0 \to \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2,\ \varphi_0[z_0,z_1] = \dfrac{z_1}{z_0} \\ U_1 = \{[z_0,z_1] \mid z_1 \neq 0\} & \varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2,\ \varphi_1[z_0,z_1] = \dfrac{z_0}{z_1} \end{cases}$$

Entonces

$$\varphi_0(u_0 \cap u_1) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\ ,\ \varphi_1(u_0 \cap u_1) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

y

$$\varphi_1\varphi_0^{-1} : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\ ,\ \varphi_1\varphi_0^{-1}(a,b) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2}\right),$$

que es analítica.

<u>ii-2</u> La proyección estereográfica: π: S^2-$\{P\} \to \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, se puede extender por $\pi(P) = \infty$ a una biyección π: $S^2 \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, cuya ecuación sería:

$$\begin{cases} \pi\,(a,b,c) = [1, \frac{2a}{2-c} + i\frac{2b}{2-c}] = [2-c, 2a+i.2b] & \text{si } (a,b,c) \neq (0,0,2) \\ \pi\,(0,0,2) = [0,1] \end{cases}$$

Entonces π es un difeomorfismo analítico, pues si 0 es el punto (0,0,0),

$$S^2 = V_0 \cup V_1 \quad \text{con} \qquad V_0 = S^2 - \{P\}, V_1 = S^2 - \{0\}$$

y la proyección estereográfica desde P sobre $z = 0$, y desde 0 sobre $z = 0$, proporciona estructura de carta local a V_0 y V_1, de modo que $\{V_0,V_1\}$ es un atlas compactible con la estructura de S^2. Entonces π leída en $\{V_0,U_0\}$, $\{V_1,U_1\}$ es la identidad y por tanto π es un difeomorfismo analítico.

A-6 Transformaciones de Moebius y grupo conforme de S^2

Usando el difeomorfismo π, las proyectividades de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ (Transformaciones de Moebius de $\mathbb{R}^2$) se elevan por conjugación a difeomorfismos analíticos de S^2, ($\varphi:\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\to\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ induce $\pi^{-1}\varphi\,\pi$: $S^2\to S^2$). Como π es conforme, estas transformaciones son conformes. Entonces, existe un Teorema de Riemann, que no probaremos aquí, que establece que son las únicas transformaciones conformes de la esfera.

A título de ejercicio, vamos a estudiar desde un punto de vista elemental estas transformaciones conformes de la esfera.

i) Ciclos

Observemos que en la proyección estereográfica las circunferencias de S^2, que pasan por el polo P, se transforman en las rectas del plano, ya que si $\Gamma\subset S^2$ es una circunferencia, es una sección de S^2 por un plano, y si $P\in\Gamma$, las rectas que proyectan los puntos de Γ desde P cortan a $\mathbb{R}^2$ en la intersección de $\mathbb{R}^2$ con este plano. Recíprocamente si r es una recta de $\mathbb{R}^2$, el plano $P+r$ corta a S^2 en la circunferencia Γ, cuya proyección estereográfica es r.

Las circunferencias que no pasan por P se proyectan obviamente en cónicas de $\mathbb{R}^2$, pero estas cónicas son circunferencias. Para comprobarlo basta considerar Γ circunferencia de S^2 que no pasa por P, y el cono circunscrito a la esfera a lo largo de Γ. Como Γ es sección de S^2 por un plano, este cono sería un cono cuadrático y su vértice es el polo del plano respecto a S^2 (en la terminología clásica). Si llamamos Q al vértice del cono, para cada punto X de Γ, la recta QX está contenida en el plano tangente por X a Γ y es ortogonal a la tangente a Γ por X. Entonces la proyección de la recta QX es ortogonal a la tangente por $\pi(X)$ a la proyección de Γ. Por tanto, $\pi(\Gamma)$ es una curva ortogonal a todas las rectas que pasan por $\pi(Q)$ y es necesariamente una circunferencia con centro $\pi(Q)$.

Por tanto, los ciclos de $\mathbb{R}^2$ son exactamente las proyecciones esteregráficas de las circunferencias de S^2. Veamos ahora que las transformaciones aparentemente distintas de $\mathbb{R}^2$, la inversión y la simetría, provienen de las mismas transformaciones de S^2.

ii) Simetrías respecto de ciclos

Proposición.

a) Si r es una recta de $\mathbb{R}^2$ y S es la simetría respecto de r, $\forall\ P \notin r$, $S(P)$ es el punto de corte de todos los ciclos ortogonales a r que pasan por P.

b) Si Γ es una circunferencia de $\mathbb{R}^2$ y si S es la inversión cuya circunferencia de puntos invariantes es Γ, $\forall\ P \notin \Gamma$, $S(P)$ es el punto de corte de todos los ciclos ortogonales a Γ que pasan por P.

Demostración: Basta probar que si S es una transformación de Moebius y Γ es un ciclo cuyos puntos son invariantes por S, todo ciclo Γ' ortogonal a Γ es invariante por S. Entonces si $P \in \Gamma'$ es $S(P) \in S(\Gamma') = \Gamma'$ y puede que sea Γ una circunferencia o una recta si $P \in \Gamma$, existen al menos dos ciclos distintos que pasan por P y son ortogonales a Γ, y se sigue el resultado.

Pero esta afirmación resulta de ser S una circunferencia conforme, ya que si $X \in \Gamma \cap \Gamma'$, como $X \in \Gamma$ es $\pi(X) = X$, y como Γ y Γ' son ortogonales en X, $\pi(\Gamma) = \Gamma$ y $\pi(\Gamma')$ son también ortogonales en X. Por otra parte, si Γ o Γ' es una circunferencia, y Γ y Γ' son ortogonales $\Gamma \cap \Gamma'$ está compuesto por dos puntos y estos puntos y las tangentes en dos, determinan unívocamente Γ', luego $\Gamma = \Gamma'$. Si Γ y Γ' son rectas como Γ es de puntos invariantes $\pi(\infty) = \infty$ y π debe ser una simetría de eje Γ, las rectas ortogonales al eje de simetría son invariantes.

Entonces, llevando esta propiedad vía la proyección estereográfica a la esfera, se puede dar la definición siguiente:

Definición. Si Γ es una circunferencia de S^2, se llama simetría de S^2 respecto de Γ a la aplicación $S: S^2 \to S^2$ que deja invariante todos los puntos de Γ y verifica que $\forall\ P \in S^2\ P \notin \Gamma$, $S(P)$ es el punto de corte de todas las circunferencias de S^2 ortogonales a Γ y que pasan por P.

Con esta defición, las inversiones y simetrías de $\mathbb{R}^2$ provienen ambas de las simetrías respecto a circunferencias de S^2.

Estas transformaciones se pueden caracterizar también mediante la razón, donde:

iii) Caracterización de simetrías respecto a ciclos por la razón doble

Si $S\colon \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la inversión de la circunferencia invariante Γ y $P \notin \Gamma$, si 0 es el centro de Γ y r^2 es la razón (r = radio de Γ), se verifica que (Fig.17)

$$\overline{OP}.\overline{OS(P)} = r^2 \Rightarrow$$
$$r^2 = (\overline{OR_1} + \overline{R_1P})(\overline{OR_2} + \overline{R_2S(P)}) =$$
$$= (\overline{OR_2} + \overline{R_2P})(\overline{OR_1} + \overline{R_1S(P)})$$

y esto junto con

$$\overline{OR_1} = r, \quad \overline{OR_1} = -r$$

lleva tras las oportunas operaciones a

$$[R_1\, R_2\, P\, S(P)] = -1.$$

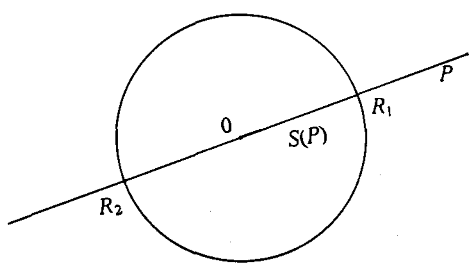

Fig. 17

Si $S\colon \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una simetría de eje r, entonces $P,S(P)$ corta al eje r en R_1 y en ∞, pues todas las rectas pasan por ∞ y

$$[\infty\, R_1\, P\, S(P)] = -1$$

por ser R_1 el punto medio de P y $S(P)$. (Fig.18) Entonces la simetría y la inmersión se caracterizan por la misma propiedad.

(*) Si t es la recta por P perpendiculas al ciclo de puntos invariantes Γ,

$$t \cap \Gamma = \{R_1, R_2\} \text{ y } [R_1\, R_2\, P\, S(P)] = -1\ .$$

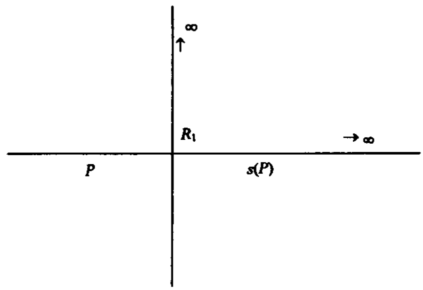

Fig. 18

No tenemos que limitarnos necesariamente al uso de una recta, pero para eso hay que definir la razón doble de puntos situados en una circunferencia.

Proposición.

a) Si A,B,C,D son cuatro puntos distintos de una circunferencia Γ y $P\in\Gamma$- $\{A,B,C,D\}$, $[PA, PB, PC, PD]$ es independiente del punto P.

b) Si P coincide con alguno de los puntos A,B,C,D se mantiene el resultado, cambiando la recta que une P con ese punto por la tangente en dicho punto a la circunferencia.

c) Si $A,B,C,D\in\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C} \subset\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ y calculamos $[ABCD]_c$ (razón doble de los cuatro puntos como puntos de la recta compleja), $[ABCD]_c$ es real si y sólo si A B C y D están en una recta o en una circunferencia, y en este caso ambas razones dobles coinciden.

Demostración:

a) En primer lugar, las rectas de $\mathbb{R}^2$ que pasan por P forman una recta proyectica, luego tiene sentido $[PA, PB, PC, PD]$; como las proyecciones y secciones dejan invariante la razón doble, si r es una recta que no pasa por P,

$$[PA, PB, PC, PD] = [PA \cap r, PB \cap r, PC \cap r, PD \cap r]$$

y por el cálculo que hicimos en la introducción

$$[PA, PB, PC, PD] = \frac{sen\ A\hat{P}C . sen\ B\hat{P}D}{sen\ A\hat{P}D . sen\ B\hat{P}C}$$

Entonces, si Q es otro punto de la circunferencia (Fig.19), por las propiedades del ángulo inscrito

$$A\hat{P}C = A\hat{Q}C, \quad B\hat{P}D = P\hat{Q}D \quad \text{etc},$$

luego

$$[PA, PB, PC, PD] = [QA, QB, QC, QD].$$

b) Es consecuencia de las propiedades de los ángulos exinscritos (uno de los lados es tangente a la circunferencia) que son idénticos a los de los ángulos inscritos.

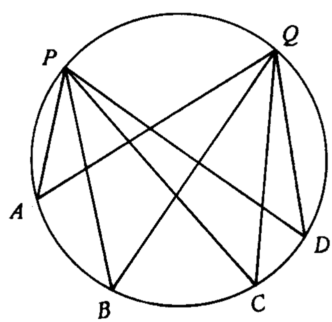

Fig. 19

c) Resulta de la definición de ciclo que $[ABCD]_c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D \in [ABC]$. Luego, $[ABCD]_c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A, B, C, D$ están en un ciclo (recta o circunferencia).

Por otra parte, como la inversión es una proyectividad de la recta compleja, deja invariante la razón doble compleja, luego si A, B, C, D están en una circunferencia Γ (Fig.20), tomando una inversión φ con polo en un punto de Γ, se transforma Γ en una recta y $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$, $\varphi(D)$, están alineados y

$$[A, B, C, D]_c = [\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(D)]_c .$$

Pero si cuatro puntos de $\mathbb{R}^2$ están alineados, es trivial que su razón doble como complejos coincide con su razón doble real, luego

$$[\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\varphi(D)]_{\mathrm{C}} = [\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\varphi(D)]_{\mathrm{R}} =$$
$$= [P\varphi(A), P\varphi(B), P\varphi(C), P\varphi(D)] = [PA, PB, PC, PD]$$
$$= [ABCD]_{\mathrm{R}} \,.$$

Lo cual prueba la proposición.

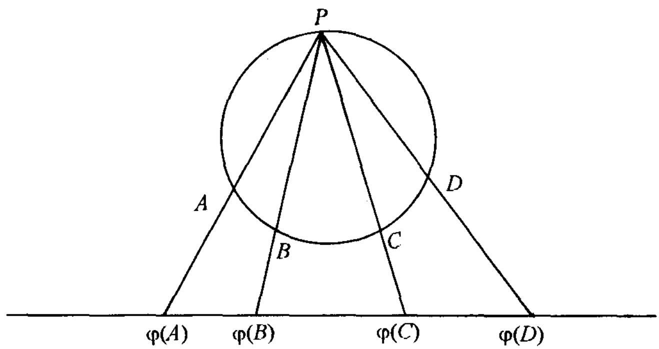

Fig. 20

Proposición. Si S es una transformación involutiva de Moebius de ciclo de puntos invariantes Γ, $P \notin \Gamma$ y Γ' es un ciclo ortogonal a Γ por P que corta a Γ en R_1 y R_2,

$$[R_1\, R_2\, P\, S(P)] = -1.$$

En efecto, $[ABCD] = \dfrac{1}{[ABCD]}$ y como R_1 y R_2 P $S(P)$ están en Γ' (según probamos en la proposición de ii) y Γ' es un ciclo, la razón doble real de estos puntos coincide con la compleja y es invariante por inversiones, luego

$$[R_1\, R_2\, P\, S(P)] = [S(R_1)\, S(R_2)\, S(P)\, S^2(P)]$$

pero $S(R_1) = R_1$, $S(R_2) = R_2$, $S^2(P) = P$, luego

$$[R_1\, R_2\, P\, S(P)] = [R_1\, R_2\, S(P)\, P] = \frac{1}{[R_1 R_2 P S(P)]} \Rightarrow [R_1\, R_2\, P\, S(P)] = \pm 1$$

y como no puede ser +1, es -1.

Proposición. La razón doble de cuatro puntos de un ciclo es invariante por proyección estereográfica.

Basta tomar un quinto punto del ciclo y usar que la proyección de un haz de rectas en otro deja invariante la razón doble.

Consecuencia: Las simetrías respecto a circunferencias en S^2 quedan caracterizadas por la propiedad siguiente:

Si S es una simetría de S^2 respecto a la circunferencia Γ, la imagen de un punto $P \notin \Gamma$ por S queda caracterizada por $[R_1\, R_2\, P\, S(P)] = -1$, donde R_1 y R_2 son los puntos de corte con Γ de una circunferencia de S^2 ortogonal a Γ que pasa por P.

A-7 Transformaciones de Moebius y proyectividades de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ que dejan S^2 invariante ($PO_{3,1}(\mathbb{R})$)

Desde un punto de vista puramente algebraico, se puede proceder a construir una compactificación conforme adaptada a la métrica de $\mathbb{R}^2$, extendible sin dificultad a $\mathbb{R}^n$. Vamos a trabajar desde un punto de vista proyectivo dando así un contenido geométrico a la construcción algebraica.

Consideremos la aplicación

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \qquad \varphi(x_1 x_2) = [\tfrac{1}{2}, x_1, x_2, \tfrac{1}{2}\,(x_1^2 + x_2^2)]$$

φ es claramente aplicación inyectiva y su imagen está contenida en la cuádrica

$$\begin{cases} y_0 = \beta \cdot \frac{1}{2} \\ y_1 = \beta\; x_1 \\ y_2 = \beta\; x_2 \\ y_3 = \frac{1}{2}\beta\,(x_1^2 + x_2^2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad y_1^2 + y_2^2 - 4 y_0 y_3 = 0 : [Q] \; .$$

Esta imagen es exactamente la cuádrica menos el punto [0,0,1]. Más ún, si proyectamos $[Q]$ estereográficamente, dado el punto [0001] sobre el plano $\mathbb{R}^2$, (Fig.21) se obtiene precisamente φ^{-1}. Por tanto φ no es otra cosa que la proyección estereográfica de la esfera S^2 sobre $\mathbb{R}^2$, vista en unas coordenadas proyectivas distintas.

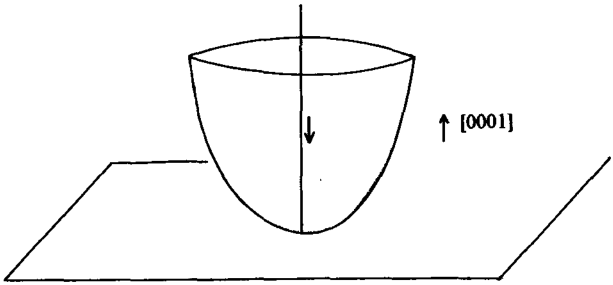

Fig. 21

Ejercicio. Deducir el cambio de coordenadas que deja $y_0 = 0$ invariante, transforma [0,0,0,1] en [1,0,0,2] y la cuádrica en la esfera

$$x^2 + y^2 + (z\text{-}1)^2 = 1 \text{ (Es tan trivial como parece).}$$

Ejercicios:

1) Comprobar que vía φ, una isometría de matriz A se transforma en la proyectividad de $\mathbb{R}^3$ de matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\,0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0\,0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Comprobar que la homotecia $z' = t\,z$ da lugar a la transformación de matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix}$$

3) Comprobar que la traslación $z' = z+a$ da lugar a la transformación de matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 2\beta & 0 & 1 & 0 \\ \alpha^2+\beta^2 & \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{si } a = \alpha + i\beta$$

4) Comprobar que la inversión $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$ determina la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5) Escribir la matriz correspondiente a la inversión $z' = a + \dfrac{1}{\overline{z} - \overline{a}}$.

De este modo tenemos una representación del grupo de Moebius como grupo de las proyectividades de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ que dejan invariante la cuádrica $y_1^2 + y^2 - 4y_0y_3 = 0$; como ésta es una cuádrica de rango 4 y signatura proyectiva 2, en su forma canónica tiene 3 unos y un -1, y por eso al grupo de proyectividades que la dejan invariante se le representa por

$$PO(3,1) \text{ ó } PO_{31}(\mathbb{R}).$$

Conclusión. En este apéndice hemos encontrado unas "misteriosas" relaciones entre varios hechos distintos.

Tomemos el cuerpo real $\mathbb{R}$ y el cuerpo complejo $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} = \mathbb{R}[x] \big/ {x^2+1}$, entonces hay una identificación $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$; en esta identificación y la inmersión correspondiente $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, las transformaciones proyectivas contínuas dan lugar a transformaciones conforme de $\mathbb{R}^2$. Estas transformaciones intercambian entre si "ciclos" que son rectas o circunferencias para la métrica estandar de $\mathbb{R}^2$ de matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cuyos vectores isotropos (de módulo 0) son precisamente (1 i) (1, -i), i,-i son "las soluciones" de la ecuación que define $\mathbb{C}$.

Por otra parte, hay una cuádrica en $\mathbb{P}^3_{\mathbf{R}}$, la esfera y una proyección de la esfera en $\mathbb{R}^2$ que transforma los ciclos en secciones planas (linealiza los ciclos) y la transformación de $\mathbb{P}^1_{\mathbf{C}}$ en lineales proyectivas.

Además, los ciclos están caracterizados en términos de razón doble por $[ABCD]_{\mathbb{C}} = [ABCD]_{\mathbb{R}}$ si y sólo si A,B,C,D están en un ciclo.

La pregunta natural es: ¿Cómo es de general este hecho?

La respuesta es que si pensamos en algebras de dimensión 2 sobre el cuerpo real

$$A_{(\alpha\,\beta)} = \mathbb{R}\,[x] \big/ (x^2 + \alpha\, x + \beta) .$$

Se pueden presentar tres casos:

i) $\alpha^2 - 4\beta < 0 \Leftrightarrow A_{(\alpha\,\beta)} \simeq \mathbb{C}$ caso complejo

ii) $\alpha^2 - 4\beta > 0 \Leftrightarrow A_{\alpha\,\beta} \simeq \mathbb{R}\,[x] \big/ x^2 - 1$ caso paracomplejo

iii) $\alpha^2 - 4\beta = 0 \Leftrightarrow A_{\alpha\,\beta} = \mathbb{R}\,[x] \big/ (x^2)$ $= \mathbb{D}$."cuerpo" de los números duales.

Y en estos casos se reproduce la situación casi completamente cubriendo:

a) Todas las métricas euclídeas de $\mathbb{R}^2$.
b) Las métricas hiperbólicas de $\mathbb{R}^2$.
c) Las métricas degeneradas de $\mathbb{R}^2$.

Las cuádricas que se toman para la proyección son:

a) Las de tipo elíptico

b) Las de tipo hiperbólico (cuádricas de rectas no degeneradas)

c) Los conos reales (0 cilindros, ya que estamos en el caso proyectivo y ambas cuádricas coinciden).

La situación, además, parece ser generalizada a dimensión cualquiera y se pueden reproducir las matrices de $\mathbb{R}^n$ y las transformaciones conformes para estas métricas (Ahora todas si $n \geq 3$) usando las algebras finítamente generadas sobre el cuerpo real.

§ 3 GEOMETRIA PROYECTIVA NO LINEAL

3.1 Polinomios homogéneos

Un polinomio $F(x_0,...,x_n) \in k(x_0,...,x_n)$ se llama homogéneo de grado d si

$$F(h\, x_0,...,h\, x_n) = h^d\, F(x_0,...,x_n).$$

Ejercicio. Se llama grado de un monomio $x_0^{a_0} \cdot ... \cdot x_n^{a_n}$ a $a_0 + ... + a_n = d$. Probar que $F(x_0,...,x_n)$ es homogéneo de grado d si y sólo si es combinación lineal de monomios de grado d.

Si el cuerpo base es de característica cero, se verifica que para un monomio

$$M = x_0^{a_0} \cdot ... \cdot x_n^{a_n}\,, \quad \frac{\partial M}{\partial x_i} = a_i \,.\, x_0^{a_0} \cdot ... \cdot x_i^{a_i - 1} \cdot ... \cdot x_n^{a_n} \qquad (a_i \text{ puede ser cero}),$$

entonces $x_i . \dfrac{\partial M}{\partial x_i} = a_i . M$, luego $\sum x_i \dfrac{\partial M}{\partial x_i} = d.M$, siendo d el grado del monomio. Entonces si $F(x_0,...,x_n)$ es un polinomio homogéneo de grado d, como F es combinación de monomios de este grado y las derivadas son lineales, se tiene la siguiente fórmula

$$\sum_0^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = d.F \qquad \text{(Identidad de Euler)}$$

Observemos que si $\mathbb{P}(V)$ es un espacio proyectivo unidimensional y fijamos una referencia $\mathcal{R}$ en $\mathbb{P}(V)$, los polinomios homogéneos actúan sobre $\mathbb{P}(V)$, pero no como funciones con valores en k, pues si F es homogéneo de grado d, $F[\underline{u}]$ no está bien definido ya que $F(h\underline{u}) = h^d F(\underline{u})$ y el valor $F[\underline{u}]$ depende del representante elegido. Sin embargo, tiene sentido el conjunto

$$V(F) = \{[\underline{u}] \mid F(\underline{u}) = 0\}$$

ya que si $F(\underline{u}) = 0$, $F(h\underline{u}) = h^d F(\underline{u}) = 0$.

Entonces $V(F)$ se llama una hipersuperficie en $\mathbb{P}(V)$, y los conjuntos intersección de un número finito de hipersuperficies se llaman "variedades algebraicas proyectivas".

Considerando el atlas afin $\mathbb{P}(V) = \bigcup_0^n U_i$ asociado a la referencia $\mathcal{R}$, se puede tratar de entender la estructura de las variedades proyectivas, desde el punto de vista afin. En efecto, tomando una de las cartas afines U_i, la relación entre coordenadas afines y proyectivas que ya vimos, establece que si $P \in U_i$ tiene coordenadas proyectivas $[y_0,...,y_n]$ con $y_i \neq 0$, sus coordenadas afines son $(\frac{y_0}{y_i},\ldots,\frac{\hat{y}_i}{y_i},\ldots,\frac{y_n}{y_i}) = (x_1,...,x_n)$, es decir

$$(*)\ x_j = \frac{y_{j-1}}{y_i} \quad 1 \leq j \leq i \qquad x_j = \frac{y_j}{y_i} \qquad i < j \leq n$$

Recíprocamente, si P tiene coordenadas afines $(x_1,...,x_n)$, sus coordenadas proyectivas son todas las $[y_0,...,y_n]$ que verifican (*) y tomando en particular $y_i = 1$ son

$$y_j = x_{j+1} \qquad 0 \leq j < i \qquad y_j = x_j \qquad i \leq j \leq n$$

de este modo

$$V(F) \cap U_i = \{P\colon (x_1,...,x_n) \mid F(x_1,...,x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n)\} = 0$$

Ejemplo. Si $F \in \mathbb{R}[x_0,x_1,x_2]$, es $F = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_0$, F es homogénea de grado 2 y

a) $V(F) \cap U_0 = \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid F(1,y_1,y_2) = 0\} = \{(y_1,y_2) \mid y_1^2 + y_2^2 - 2y_2 = 0\}$

es decir es la circunferencia (en $\mathbb{R}^2$) de centro (0,1) y radio 1.

b) $V(F) \cap U_1 = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2 \mid F(z_1,1,z_2) = 0\} = \{(z_1,z_2) \mid 1+z_2^2 - 2z_1z_2 = 0\}$

es decir es la hipérbola $z_2(2z_1-z_2) = 1$ de asintotas $z_2 = 0$, $z_2 = 2z_1$

c) $V(F) \cap U_2 = \{(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid F(t_1,t_2,1) = 0\} = \{(t_1,t_2) \mid t_2^2 + 1 - 2t_1 = 0\}$

es decir la parábola de eje $t_2 = 0$ con vértice $(\frac{1}{2},0)$

Desde el punto de vista proyectivo, es simplemente una cónica que no corta a $x_0 = 0$, corta en dos puntos a $x_1 = 0$ y es tangente en $x_2 = 0$ (Fig. 22).

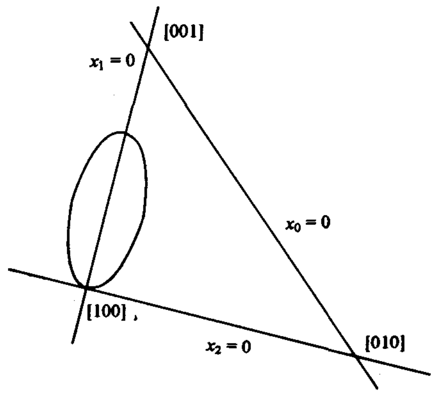

Fig. 22

Podemos ahora completar una variedad afín; si un conjunto de puntos está definido en el espacio afin por ecuaciones $f_j(x_1,...,x_n) = 0$, $1 \le j \le r$; se pueden tener todos los puntos proyectivos que verifiquen estas ecuaciones, identificado el espacio afin con la carta U_0,

$$f_j\left(\frac{y_1}{y_0},\ldots,\frac{y_n}{y_0}\right) = 0 \qquad 1 \le j \le r$$

"quitando denominadores", es decir multiplicando la ecuación f_j por $y_0^{d_j}$ con d_j = grado de f_j, se obtiene un sistema de ecuaciones homogéneas

$$F_j(y_0,\ldots,y_n) = y_0^{d_j} f_j\left(\frac{y_1}{y_0},\ldots,\frac{y_n}{y_0}\right) = 0 \qquad 1 \le j \le r$$

que definen una variedad algebraica proyectiva que se llama compleción de la variedad afin correspondiente.

Ejemplo. *Tangentes a una variedad proyectiva. Asíntotas*

Trabajando en el caso de hipersuperficies, podemos tomar, siempre sobre $k=\mathbb{R}$ o $k=\mathbb{C}$, una hipersuperficie proyectiva $F(x_0,\ldots,x_n) = 0$; si $P = [\alpha_0,\ldots,\alpha_n]$ es un punto de $V(F)$ y $\alpha_i \neq 0$, podemos permutar los puntos de la referencia (para simplificar la notación) y suponer $\alpha_0 \neq 0$. Entonces si $\frac{\alpha_i}{\alpha_0} = \beta_i$, P tiene coordenadas $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ y es solución de $f(y_1,\ldots,y_n) = F(1, y_1,\ldots,y_n) = 0$. Si suponemos que $\left(\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right)_p\right) \neq (0,\ldots,0)$, el hiperplano tangente a la hipersuperficie de $\mathbb{R}^n$

$$f(y_1,\ldots,y_n) = 0$$

en $P = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$, es el hiperplano de ecuación

$$\sum \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)_p (y_i - \beta_i) = 0$$

pero

$$\frac{\partial f(y_1,\ldots,y_n)}{\partial y_i} = \frac{\partial F(1, y_1,\ldots,y_n)}{\partial y_i} = \left[\frac{\partial F(x_0, x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i}\right]_{(1,y_1,\ldots,y_n)}$$

luego si llamamos

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_p = \left(\frac{\partial F(x_0,\ldots,x_n)}{\partial x_i}\right)_{(1,\beta_1,\ldots,\beta_n)}, \text{ es } \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)_p = \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_P,$$

entonces escribiendo el hiperplano tangente en coordenadas proyectivas $y_i = \frac{x_i}{x_0}$, la ecuación es

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_p \left(\frac{x_i}{x_0} - \beta_i\right) = 0 \Leftrightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_p (x_i - \beta_i x_0) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_p . x_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_p \beta_i\right) x_0$$

Pero por la fórmula de Euler

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) x_i = d.F(x_0,\ldots,x_n) \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_P \beta_1 = d.F(1, \beta_1,\ldots,\beta_n) = 0 \quad (\beta_0 = 1)$$

luego $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_i}\right)_p = -\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_i}\right)_p \cdot \beta_i$ y la ecuación proyectiva del hiperplano tangente es

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_p .x_i = 0\cdot$$

Si tenemos una variedad afin dada por $f(x_1,...,x_n) = 0$, se completa al proyectivo y los puntos que se añaden se llaman puntos del infinito de la variedad. Los hiperplanos tangentes en estos puntos son las asíntotas.

Por ejemplo, la curva $x^3y - xy^3 - 2x^2y^2 + 2y^4 + x^2y - x^3 + y^2 - 2x + 7 = 0$ completada al proyectivo es

$$x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 - 2x_1^2 x_2^2 + 2x_2^4 + x_1^2 x_2 x_0 - x_1^3 x_0 + x_2^2 x_0^2 - 2x_1 x_0^3 + 7x_0^4 = 0$$

Sus puntos del infinito son los de corte con $x_0 = 0$

$$x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 - 2x_1^2 x_2^2 + 2x_2^4 - (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)x_2(x_1 - 2x_2) = 0$$

[0,1,1], [0,1 -1], [0,0,1], [0,2,1]

La tangente en un punto cualquiera (con tangente) es

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = -x_1^3 + x_1^2 x_2 + 2x_2^2 x_0 - 6x_1 x_0^2 + 28x_0^3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 x_2 - x_2^2 - 4x_1 x_2^2 + 2x_1 x_2 x_0 - 3x_1^2 x_0 - 2x_0^3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1^2 - 2x_1 x_2 - 4x_1^2 x_2 + 8x_2^3 + x_1^2 x_0 + 2x_2 x_0^2$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}\right)_p x_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_p x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_p x_2 = 0 \; .$$

Entonces si $P = [0,1,1]$ por ejemplo, se obtiene $-3x_1 + 3x_2 = 0$ o sea $x\text{-}y = 0$, y si $P = [0,0,1]$ es: $x_2 = 0$ o sea $y = 0$.

3.2 Cuádricas en el espacio proyectivo

Llamaremos cuádrica al lugar de ceros de una ecuación homogénea de segundo grado. Una de estas ecuaciones admite siempre una expresión matricial:

$$F(x_0,\dots,x_n)=\sum a_{ii}x_i^2+2\sum_{i<j}a_{ij}x_ix_j=0=(x_0,\dots,x_n)\begin{pmatrix}a_{00},\dots,a_{0n}\\ \vdots \quad\quad \vdots\\ a_{n0},\dots,a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=$$

$$=0,\quad a_{ij}=a_{ji}$$

La matriz simétrica $A=(a_{ij})$ se llama matriz de la cuádrica. La ecuación $F(\underline{x})=0$ define diferentes cuádricas, dependiendo de la referencia que fijemos en el espacio proyectivo; dos de tales cuádricas se dicen proyectivamente equivalentes. Si fijamos una referencia $\mathcal{R}$, dos cuádricas Q_1 y Q_2 serán proyectivamente equivalentes cuando sus ecuaciones difieran en un cambio de referencia proyectiva, es decir una transformación de coordenadas

$$\begin{pmatrix}x_0\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\beta\ M\begin{pmatrix}y_0\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

(β es el factor de proporcionalidad presente en todas las fórmulas analíticas de geometría proyectiva por causa de la no unicidad de coordenadas). Entonces dos cuádricas de matrices A y B son equivalentes proyectivamente si y sólo si $\exists\ \beta\in k^*$, $\exists\ M\in GL_{n+1}(k)$ con

$$B=M^{t}AM\ .$$

Esta fórmula permite obtener el objeto intrínseco correspondiente a la cuádrica. Recordemos que:

a) Una forma bilineal simétrica sobre un espacio vectorial V es una aplicación

$$F\colon V\times V\to k\qquad (k \text{ cuerpo base})$$

tal que:

i) $\forall \underline{u},\underline{v}\in V\qquad F(\underline{u},\underline{v})=F(\underline{v},\underline{u})$

ii) $\forall \underline{u},\underline{v},\underline{w}\in V\ \ \forall a,b\in k,\ \ F(a\underline{u}+b\underline{v},\ \underline{w})=a\,F(\underline{u},\underline{w})+b\,F(\underline{v},\underline{w})$

b) Una forma cuadrática sobre un espacio vectorial V es una aplicación Q: $V \to k$, tal que:

i) $\forall\ a \in k \quad \forall \underline{v} \in V \ Q(a\underline{v}) = a^2\, Q(\underline{v})$

ii) la aplicación F: $V \times V \to k$ dada por $F(\underline{u},\underline{v}) = \frac{1}{2}(Q(\underline{u}+\underline{v}) - Q(\underline{u}) - Q(\underline{v}))$ es una forma bilineal.

c) Existe correspondencia biunívoca entre formas bilineales y cuadráticas, obtenida asociando a cada forma cuadrática Q la aplicación F de la propiedad (ii) y a cada forma bilineal F la aplicación $Q(\underline{u}) = F(\underline{u},\underline{u})$ que es claramente una forma cuadrática. Ambas correspondencias son inversas una de la otra.

d) Si $B = \{\underline{u}_0,...,\underline{u}_n\}$ es una base de V, B establece una correspondencia biunívoca entre formas bilineales y matrices simétricas, obtenida asignando a cada forma bilineal F, la matriz $M = (a_{ij})$, $a_{ij} = F(\underline{u}_i,\underline{u}_j)$. Entonces si $\underline{u}$ y $\underline{v}$ tienen coordenadas $\underline{x},\underline{y}$ respectivamente,

$$(*)\ F(\underline{u},\underline{v}) = (\underline{x})\, M(y)^t \ \text{ y } \ Q(\underline{x}) = F(\underline{x},\underline{x}) = \underline{x}M\underline{x}^t$$

Recíprocamente, cada matriz $M = (a_{ij})$ simétrica, induce una forma bilineal por la fórmula (*), por tanto son equivalentes los objetos siguientes:

i) Formas bilineales simétricas
ii) Formas cuadráticas
iii) Polinomios homogéneos de grado 2
iv) Matrices simétricas

e) La propiedad (i) de la definición de forma cuadrática, establece que

$$Q(\underline{v}) = 0 \ \Leftrightarrow \ Q(h\underline{v}) = 0 \ \ \forall h$$

y por tanto

$$[Q] = \{[\underline{v}] \in \mathrm{P}(V) \mid Q(\underline{v}) = 0\}$$

está bien definido. Este conjunto se llama cuádrica de puntos, y una vez que se fija una referencia, es la cuádrica de ecuación

$$Q(x_0,...,x_n) = 0$$

Pero en su definición no aparece la referencia para nada, esta es por tanto la noción intrínseca de cuádrica. Cuando trabajamos en un cuerpo algebraicamente cerrado, la cuádrica de puntos determina, salvo producto por una constante, la forma cuadrática que la origina. Esto no sucede si k no es algebraicamente cerrado, por ello la noción general de cuádrica es la siguiente:

Las formas cuadráticas sobre V forman un espacio vectorial de dimensión $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ (isomorfo al de matrices simétricas $(n+1) \times (n+1)$ con coeficientes en k); si llamamos $\mathbb{Q}$ a este espacio vectorial, entonces se llama cuádrica a todo punto de $\mathbb{P}(\mathbb{Q})$, es decir a toda clase $\{h\ Q \mid h \in k^*\} = [Q]$, $Q \in \mathbb{Q}$.

Dada una cuádrica $[Q]$, a la forma bilineal asociada a una cualquiera de las formas bilineales que representan $[Q]$ se le llama forma bilineal asociada a la cuádrica.

f) Dos vectores $\underline{u}$ y $\underline{v}$ se dicen ortogonales respecto de una forma cuadrática $\mathbb{Q}$, o de su forma bilineal asociada F, si $F(\underline{u},\underline{v}) = 0$ (se puede pensar siempre en una forma bilineal como un producto escalar). Si $E \subset V$ es un conjunto cualquiera de vectores, se llama subespacio ortogonal a E respecto de F a:

$$E^{\perp} = \{\underline{v} \in V \mid F(\underline{u},\underline{v}) = 0 \quad \forall \underline{u} \in E\}$$

<u>f-1</u> $E^{\perp}$ es siempre un subespacio vectorial de V

<u>f-2</u> Si $E \subset T$, $T^{\perp} \subset E^{\perp}$

<u>f-3</u> Si E depende linealmente de T, $T^{\perp} \subset E^{\perp}$

<u>f-4</u> Si E genera el subespacio L, $E^{\perp} = L^{\perp}$

Estas propiedades son inmediatas y se siguen de la bilinealidad de F. Se llama radical de F, o radical de Q a $\mathrm{rad}(Q) = V^{\perp}$, si $\mathrm{rad}\ Q = \{\underline{0}\}$ se dice que Q es no degenerada. Si B es una base de V y M es la matriz de F en B, decir que $\underline{u}$ y $\underline{v}$, de coordenadas $\underline{x},\underline{y}$ son ortogonales, equivale a decir que $F(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{x}\, M\, \underline{y}^t = 0$, y por tanto decir que $\underline{u}$ está en $\mathrm{rad}(Q)$, equivale a decir que

$$\underline{x}\, M\, \underline{y}^t = 0\ \forall \underline{y} \iff \underline{x}\, M = \underline{0}$$

Luego, $\underline{x}\, M = \underline{0}$ son las ecuaciones de $\mathrm{rad}(Q)$ y por el teorema de Rouche, $\dim \mathrm{rad}(Q) = \dim V -$ rango M y hemos obtenido que:

"Todas las matrices de una forma cuadrática tienen el mismo rango".

g) Si $Q: V \to k$ es una forma cuadrática, Q induce una aplicación

$$\overline{Q} : V/_{\mathrm{rad}(Q)} \to k, \qquad \overline{Q}(\underline{v} + \mathrm{rad}(Q) = Q(\underline{v})$$

que es una forma cuadrática no degenerada. Si elegimos una base de rad(Q) $\{\underline{v}_0,\ldots,\underline{v}_r\}$ y la ampliamos a una base de V, $\{\underline{v}_0,\ldots,\underline{v}_r,\underline{v}_{r+1},\ldots,\underline{v}_n\}$, la matriz de Q en esta base es $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ con N de dimensiones $(n\text{-}r) \times (n\text{-}r)$ y det $N\neq 0$, entonces N es la matriz de $\overline{Q}$ en la base $\{\underline{v}_{r+1}$ + rad(Q),...,$\underline{v}_n$ + rad(Q)$\}$. Por tanto, siempre podemos suponer que trabajamos con formas cuadráticas no degeneradas.

Si $Q : V \rightarrow k$ es no degenerada y L es un subespacio de V, tomando una base de L, $\{\underline{u}_0,\ldots,\underline{u}_r\}$ y ampliando esta base a una base de V, las ecuaciones de $L^{\perp}$ en esta base son

$$(0,\ldots,1,\ldots,o)\, M\, \underline{x}^t = 0 \qquad \text{(con el 1 en la posición } i,\ 0 \leq i \leq r)$$

las ecuaciones son necesariamente independientes, pues los coeficientes son filas de M, luego dim $L^{\perp}$ = dim V - dim L. Sin embargo, no es cierto en general que $L \cap L^{\perp} = \{\underline{0}\}$; obsérvese que esto equivale a que la aplicación $Q|_L : L \rightarrow k$, que es también una forma cuadrática, sea no degenerada y cuando esto sucede, $V = L + L^{\perp}$ y la suma es directa, por tanto si $\{u_0,\ldots,u_r\}$ es una base de L y $\{\underline{u}_{r+1},\ldots,u_n\}$ es una base de $L^{\perp}$ $\{\underline{u}_0,\ldots,\underline{u}_r,\underline{u}_{r+1},\ldots,\underline{u}_n\}$ es una base de V y la matriz de F en esta base es $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ con A matriz de $Q|_L$ y B matriz de $Q|_{L^{\perp}}$.

Una base $\{\underline{u}_0,\ldots,\underline{u}_n\}$ de V se dice ortogonal si $F(\underline{u}_i, \underline{u}_j) = 0$, $\forall i \neq j$ o lo que es lo mismo, si la matriz de F en esta base es una matriz diagonal.

Proposición. *Existe una base ortogonal de V respecto de cualquier forma bilineal F.*

Demostración: Se pueden dar dos casos:

1) $Q(\underline{v}) = 0 \ \ \forall \underline{v} \in V \Leftrightarrow F(\underline{v},\underline{w}) = \frac{1}{2}\,(Q(\underline{v} + w) - Q(\underline{v}) - Q(\underline{w})) = 0 \ \ \forall \underline{v},\underline{w} \Leftrightarrow F$ tiene la matriz 0 que es diagonal.

2) $\exists\, \underline{v}_0 \in V$ con $Q(\underline{v}_0) \neq 0$, entonces si $L_0 = L(\underline{v}_0)$, $L_0 \cap L_0^{\perp} = \{\underline{0}\}$ y $V = L_0 + L_0^{\perp}$; tomando $Q|_{L^{\perp}}$, dim $L_0^{\perp}$ = dim V-1 y se repite el razonamiento.

Consecuencia. Si K es algebraicamente cerrado existe, para cualquier forma cuadrática Q, una base en la cual la matriz de Q es diag(0,...,0,1,...,1) con un número de "0" igual a dim(rad Q).

Demostración: Por la proposición anterior, hay una base ortogonal para Q, la matriz de Q en ella será diag(d_0,...,d_n); el número de $d_i \neq 0$ es el rango de una matriz cualquiera de Q y por tanto el número de ceros es la dimensión del radical. Reordenando la base, esta matriz se escribe diag(0,...,0,d_{r+1},...,d_n) con $d_i \neq 0\ \forall i$. Si $B = \{u_0,...,u_n\}$ es la base correspondiente, se toma $\underline{v}_i = \underline{u}_i$ $0 \leq i \leq r$, $\underline{v}_j = \frac{1}{\sqrt{d_j}} u_j$, $r < j \leq n$ y se tiene el resultado.

Se dice que dos formas cuadráticas son linealmente equivalentes si difieren en un automorfismo de V, es decir:

$$Q_1 \sim Q_2 \Leftrightarrow \exists\ \varphi \in \mathrm{Aut}(V)\, Q_1 \varphi = Q_2$$

Si referimos las formas y φ a una base de V, Q_1 y Q_2 tendrán matrices simétricas M_1 y M_2 y φ una matriz M, entonces si $\underline{u}$ es un vector de coordenadas ($\underline{x}$), $\varphi(\underline{u})$ tiene coordenadas $\underline{y}$ con $(\underline{y})^t = M(\underline{x})^t$, y por tanto

$$Q_1\ \varphi(\underline{u}) = \underline{y}\, M_1, \underline{y}^t = \underline{x}\, M^t\, M_1\, M\, \underline{x}^t = Q_2(\underline{u}) = \underline{x}\, M_2 \underline{x}^t \quad , \forall \underline{u} \Leftrightarrow \boldsymbol{M_2 = M^t\, M_1\, M}$$

que es la misma relación que vimos al principio, por tanto podemos escribir también

$$Q_1 \sim Q_2 \Leftrightarrow \exists \text{ Bases } B_1\ B_2 \text{ tales que:}$$
$$\text{Matriz de } Q_1 \text{ en } B_1 = \text{Matriz de } Q_2 \text{ en } B_2 .$$

En consecuencia y teniendo en cuenta la proposición que acabamos de demostrar:

Si k es algebraicamente cerrado $Q_1 \sim Q_2 \Leftrightarrow$ rango (Q_1) = rango (Q_2) (donde rango (Q) es el rango de una cualquiera de las matrices de Q).

h) Si k no es algebraicamente cerrado, la situación es mas difícil. En el caso real, la base $\{\underline{u}_0,...,\underline{u}_n\}$ que proporciona la matriz diag(0,...,0,d_{r+1},...,d_n) se puede conseguir dividiendo cada vector $\underline{u}_j$ ($j>r$) por $\sqrt{|d_j|}$), entonces reordenando los vectores de la base se puede alcanzar una matriz (0,...,0,1,...,1,-1,...,-1). El número

$$S_L(Q) = [\#(1) - \#(-1)]$$

se llama signatura lineal de la forma cuadrática y el Teorema de Inercia de Sylvester establece que es un invariante, es decir que no depende de la matriz diagonal elegida para Q.

Entonces, si k es el cuerpo real es claro que

$$Q_1 \sim Q_2 \Leftrightarrow \text{rango}\,(Q_1) = \text{rango}\,(Q_2) \;\; \text{y} \;\; S_L(Q_1) = S_L(Q_2)$$

Para cuerpos más generales se substituye el teorema de existencia de base ortonormal por un Teorema de Witt, que establece una descomposición del espacio en suma ortogonal de planos hiperbólicos y un resto, pero no nos interesa en nuestro caso porque nos limitaremos a cuerpos algebraicamente cerrados.

i) Entonces para clasificar cuádricas, teniendo en cuenta que aquí usamos la ecuación $Q(x) = 0$, la presencia de factores de proporcionalidad es irrelevante y se puede definir la equivalencia proyectiva de cuádrica por:

$$[Q_1] \sim [Q_2] \Leftrightarrow \exists h \in k^* \qquad Q_1 \sim hQ_2$$

Entonces sobre cuerpos algebraicamente cerrados, el producto por una constante no nula no altera el rango, luego

$$[Q_1] \sim [Q_2] \Leftrightarrow \text{rango}\,(Q_1) = \text{rango}\,(Q_2) \qquad (k \text{ algebraicamente cerrada}).$$

Por tanto, en este caso sólo hay $n+1$ tipos de cuádricas distintas en $\mathbb{P}(V)$ (dim $\mathbb{P}(V) = n$)

Si $k = \mathbb{R}$ y $h > 0$, el producto por h no altera la signatura lineal pero si $h < 0$, el producto por h cambia el signo a esta signatura. Llamamos signatura proyectiva a $S(Q) = |S_L(Q)|$ y es claro que

$$[Q_1] \sim [Q_2] \Leftrightarrow \text{rango}\,(Q_1) = \text{rango}\,(Q_2) \;\; \text{y} \;\; S(Q_1) = S(Q_2) k = \mathbb{R}$$

3.3 Polaridad respecto a una cuádrica

a) Se llama vértice de una cuádrica $[Q]$ al subespacio proyectivo asociado a su radical, $V(Q) = \mathbb{P}(\text{rad}.Q)$; una cuádrica no degenerada es la que tiene vértice vacío.

Se llama polar de un subespacio $S = \mathbf{P}(L)$ al subespacio $\mathbf{P}(L^{\perp})$. Entonces si $P \notin V[Q]$ es un punto, su polar es un hiperplano del espacio, y generalmente se llama polaridad a la correspondencia que asocia a cada punto no situado en el vértice de la cuádrica su hiperplano polar. Para interpretar geométricamente el significado de la polaridad, comencemos por calcular la polar de un punto de la cuádrica.

Proposición. *Si $P \in [Q] - V[Q]$, el hiperplano polar de P es el hiperplano tangente a $[Q]$ en P.*

Demostración: En una referencia $\mathbf{R}$ la ecuación de la cuádrica es

$$Q(\underline{x}) = \underline{x}\, A \underline{x}^{t} = 0 \qquad \text{con } A \text{ simétrica.}$$

Entonces, si $Q(\underline{\alpha}) = 0$, $(\underline{\alpha})$ vector de coordenadas de P, el hiperplano tangente a $[Q]$ en P es:

$$\sum \left(\frac{\partial Q}{\partial x_i} \right)_{\underline{\alpha}} . x_i = 0 \quad pero \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (\underline{x}\, A\, \underline{x}^{t}) = 2 \underline{e}_i A \underline{x}^{t} \ \text{ con } \ \underline{e}_i = (0, \ldots, 1^{i}, \ldots, 0)$$

por tanto, la ecuación anterior es:

$$\sum 2 \underline{e}_i A \underline{\alpha}^{t} . x_i = 2 \sum \underline{x}\, A \underline{x}^{t} = 2F(\underline{\alpha}, \underline{x}) = 0$$

Luego es exactamente el hiperplano polar de $(\underline{\alpha})$.

Por otra parte, es obvio que si $P_1 \in P_2^{\perp}$ ($P_2^{\perp}$ = Polar de P_2), por ser F simétrica, $P_2 \in P_1^{\perp}$ y que por las propiedades de la ortogonalidad, para construir la polar de un subespacio, bastará intersecar los polares de un conjunto maximal de puntos independientes. Entonces:

Ejemplo: Si $[Q]$ es una cónica (elipse) y P es exterior a $[Q]$, las tangentes t_1 y t_2 por P a $[Q]$ (Fig. 23(a)) la cortan en puntos P_1 y P_2, entonces $P \in P_1^{\perp}$ y $P \in P_2^{\perp}$. Luego

$$P_1 \in P^{\perp}, \ P_2 \in P^{\perp} \ \text{ y } \ P_1 + P_2 \in P^{\perp}.$$

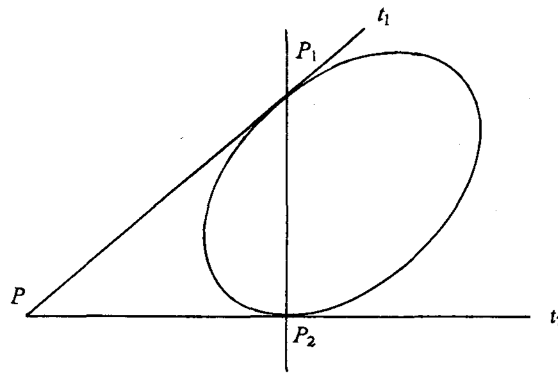

Fig. 23(a)

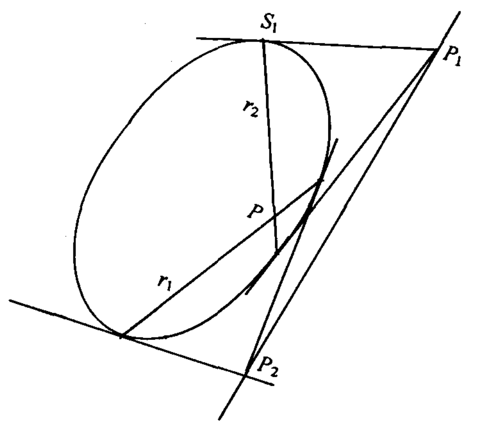

Fig. 23(b)

Si P es interior a $[Q]$ (Fig.23(b)), tomamos dos rectas r_1 y r_2 por P que cortan a $[Q]$ en puntos R_1 y R_2 y S_1 S_2, respectivamente. Las tangentes a $[Q]$ en R_1 y R_2 se cortan en P_1 y las tangentes a r_2 en S_1 y S_2 se cortan en P_2. Entonces

$$P \in r_2 \Rightarrow r_2^{\perp} \in P^{\perp} \text{ pero } r_2 = S_1 + S_2 \rightarrow r_2^{\perp} = S_1^{\perp} \cap S_2^{\perp} = P_2 \Rightarrow P_2 \in P^{\perp}$$

y del mismo modo $P_1 \in P^{\perp}$ y $P^{\perp} = P_1 + P_2$.

Proposición. *Si $P \in \mathrm{P}(V)$ y $[Q]$ es una cuádrica, el lugar geométrico de las rectas que pasan por P y son tangentes a* $[Q]$, $C_p[Q]$ *es:*

a) *El plano tangente por P a* $[Q]$ *si* $P \in [Q]$

b) *Un cono que corta a $[Q]$ en el mismo conjunto de puntos que el plano polar de P respecto a $[Q]$ (k algebraicamente cerrado).*

Demostración: Basta obtener la ecuación del cono tangente $C_p[Q]$. Si $P = [\underline{u}]$ y $X = [\underline{x}]$ es un punto genérico del espacio, $X \in C_p[Q] \Leftrightarrow [u] + [x]$ es tangente a $[Q]$.

Pero el punto genérico de la recta $[\underline{u}] + [\underline{x}]$ es $[a\ \underline{u} + b\ \underline{x}]$ y decir que esta recta es tangente a Q equivale a que la corta en un único punto, es decir que la ecuación

$Q(a\ \underline{u} + b\ \underline{x}) = 0$ tiene solución única en $[a,b]$.

Pero:

$$0 = Q(a\ \underline{u} + b\ \underline{x}) = a^2\ Q(\underline{u}) + 2ab\ F(\underline{u}\ \underline{x}) + b^2\ Q(\underline{x}) \qquad (1)$$

y se pueden dar dos casos:

i) $P \in [Q] \Leftrightarrow Q(\underline{u}) = 0$ y (1) tiene solución doble $\Leftrightarrow F(\underline{u}\ \underline{x}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} \in \underline{u}^{\perp}$, luego $C_p([Q]) = \underline{u}^{\perp}$ que es el plano tangente.

ii) $P \notin [Q] \Leftrightarrow Q(\underline{u}) \neq 0$ y (1) tiene solución doble si $F(\underline{u}\ \underline{x})^2 - Q(\underline{u})\ Q(\underline{x}) = 0$ que es la ecuación del cono tangente.

Entonces, $C_p[Q] \cap [Q]$ viene dado por las ecuaciones

$$\begin{cases} Q(\underline{x}) = 0 \\ F(\underline{u}\ \underline{x})^2 - Q(\underline{u})\ Q(\underline{x}) = 0 \end{cases}$$

equivalentes a:

$$\begin{cases} Q(x) = 0 \\ F(\underline{u}\ \underline{x}) = 0 \end{cases}$$

que son las ecuaciones de $\underline{u}^{\perp} \cap [Q]$. □

Proposición.

a) Si $P \in [Q]$, *el subespacio* $P + V[Q]$ *está contenido en* $[Q]$ *y en consecuencia,* $[Q]$ *es unión de subespacios que pasan por* $V[Q]$.

b) Si S es un subespacio complementario de $V[Q]$, $[Q]$ es unión del conjunto de subespacios que proyectan los puntos de $[Q] \cap S$ desde $V[Q]$.

c) Si P y R están en $[Q]$, y la recta $P+R$ está contenida en $[Q]$, $P+R$ corta al vértice de $[Q]$ si y sólo si (si no está contenida en el vértice) el plano tangente a Q a lo largo de los puntos de esta recta es constante.

Demostración:

a) Si $P = [\underline{u}]$ y $A = [\underline{a}] \in P + V[Q]$, $\exists[\underline{v}] \in V[Q]$ con $\underline{a} = \alpha\, \underline{u} + \beta\, \underline{v}$ entonces

$$Q(\underline{a}) = \alpha^2 Q(\underline{u}) + 2\alpha\beta\, F(\underline{u}\ \underline{v}) + \beta^2 Q(\underline{v}) \quad \text{y} \quad Q(\underline{a}) = Q(\underline{v}) = 0$$

porque $[\underline{u}]$ y $[\underline{v}]$ están en $[Q]$ y $F(\underline{u}\ \underline{v}) = 0$ porque $\underline{v} \in \mathrm{rad}(Q)$, luego $Q(\underline{a}) = 0$ y $[\underline{a}] \in [Q]$.

b) Si S es un complementario de $V[Q]$ (Fig.24), $\forall P \in S$, $P \notin V[Q]$, entonces $P+V[Q]$ tiene dimensión la de $V[Q]$ más uno y por (a) está contenido en la cuádrica. El recíproco es trivial.

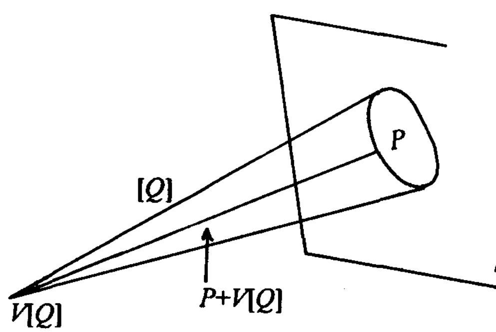

Fig. 24

c) Si $[\underline{u}] + [\underline{v}] \subset Q$ es $Q(\alpha\, u + \beta \underline{v}) = 0$, $\forall \underline{u}\ \underline{v} \Leftrightarrow F(\underline{u}, \underline{v}) = 0$.

Entonces $[\underline{u}] + [\underline{v}] \cap v[Q] \neq \Phi \Leftrightarrow$ se puede tomar $[\underline{v}] \in V[Q]$, entonces si $[\underline{u}] \notin V[Q]$ (porque en caso contrario el plano tangente no está definido en ninguno de los puntos de $[\underline{u}] + [\underline{v}]$), tomando $X = [\alpha\, \underline{u} + \beta \underline{v}]$ es:

$$T_X\,[Q] \text{ tiene ecuación } F[\alpha\,\underline{u} + \beta\underline{v},\, \underline{z}] = 0.$$

Pero $F(\alpha\,\underline{u} + \beta\underline{v}, \underline{z}) = \alpha\, F(\underline{u}, \underline{z}) + \beta\, F(\underline{v}, \underline{z}) = \alpha\, F(\underline{u}, \underline{z})$

porque $F(\underline{v}, \underline{z}) = 0$ ya que $[\underline{v}] \in \mathrm{rad}[Q]$. Entonces la ecuación de $T_X[Q]$ es la de $T_{[u]}(Q)$ y este plano es constante. El recíproco es inmediato. □

Proposición. *Si* $[Q]$ *es una cuádrica no degenerada, el conjunto de hiperplanos tangentes a* $[Q]$ *es una cuádrica en* $P(V)^*$ (*que se llama la cuádrica de hiperplanos de* $[Q]$).

Demostración: Si fijamos una referencia, $[Q]$ tiene una matriz A y el hiperplano H de ecuación $a_0x_0 + ... + a_nx_n = 0$, y coordenadas en la referencia dual $[a_0,...,a_n]$ es tangente en $[Q]$, si y ólo si existe un punto P de coordendadas $[b_0,...,b_n]$ perteneciente a la cuádrica y tal que $P^{\perp} = H$, es decir

$\underline{b}\, A\, \underline{b}^t = 0$ $(P \in [Q])$
$\underline{b}\, A\, \underline{x}^t = 0$ ecuación de $H \Leftrightarrow \exists\, t \in k^*$ $\quad \underline{b}\, A = t.\underline{a} \Leftrightarrow$
$\underline{b} = t\, \underline{a}\, A^{-1}$

Eliminando $\underline{b}$ se obtiene que H, de coordenadas $[a_0,...,a_n]$, es tangente a $[Q]$, si y sólo si

$$\underline{a}\, A^{-1}\, \underline{a}^t = 0 \Leftrightarrow \underline{a}\, .\, \mathrm{Ad}(A)\, \underline{a}^t = 0.$$

Como $\mathrm{Ad}(A)$ (matriz adjunta de A) es una matriz simétrica no degenerada, el conjunto de hiperplanos tangentes a $[Q]$ es una cuádrica en el espacio de Hiperplanos; esta cuádrica se llama cuádrica dual de la cuádrica de partida.

Ejemplo: La cuádrica dual permite extender la noción de dualidad a las cuádricas, así, la noción dual de puntos pertenecientes a una cuádrica es la de hiperplano tangente a la cuádrica y resultados como el teorema de Pascal

"El hexágono A,B,C,D,E,F está inscrito en una cónica, si y sólo si los puntos $(A+B)\cap(D+E)$, $(B+C)\cap(E+F)$, $(C+D)\cap(A+F)$, (puntos de corte de lados opuestos) están alineados".

Tienen su versión dual (Teorema de Brianchon)

"El hexágono de lados a,b,c,d,e,f está circunscrito a una cónica, si y sólo si las rectas $(a\cap b) + (d\cap b)$, $(b\cap c) + (e\cap f)$, $(c\cap d) + (a\cap f)$, (diagonales) son concurrentes".

Las cuádricas se pueden clasificar por la acción de proyectividades, sin más que clasificar las formas cuadráticas asociadas y tener en cuenta el producto por constantes, que no altera la cuádrica pero puede alterar las formas cuadráticas.

Así:

a) ***K* algebraicamente cerrado:** Las cuádricas $[Q_1]$ y $[Q_2]$ son proyectivamente equivalentes, es decir existe una proyectividad π (recta de automorfismos) con $\pi([Q_1]) = [Q_2]$, si y sólo si $r[Q_1] = r[Q_2]$.

b) ***K* cuerpo real:** Las cuádricas $[Q_1]$ y $[Q_2]$ son proyectivamente equivalentes, si y sólo si tienen el mismo rango y la misma signatura proyectiva, donde se llama signatura proyectiva al valor absoluto de la signatura lineal. El hecho de sustituir la signatura lineal por la proyectiva se debe a que el producto por un número negativo cambia el signo de la signatura lineal.

Geométricamente es fácil comprobar, con el teorema de descomposición de Witt o directamente, que la signatura proyectiva está relacionada con la dimensión de los subespacios lineales mencionados contenidos en la cuádrica. Así, si $[Q]$ es una cuádrica no degenerada en un espacio proyectivo real de dimensión n, $S_p[Q] = s \Leftrightarrow [Q]$ está compuesta por subespacios lineales de dimensión $\frac{n+1-s}{2} - 1$.

Por ejemplo, en el espacio proyectivo real de dimensión 3, las cuádricas no degeneradas pueden ser de signaturas

$\underline{s=4}$ $\quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad d = \frac{n+1-s}{2} - 1 = -1$ no hay puntos

$\underline{s=2}$ $\quad -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad d = 0$ cuádrica de puntos (elíptica)

$\underline{s=0}$ $\quad -x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad d = 1$ cuádrica de rectas (hiperbólica)

Los tipos de cuádricas afines aparecen en función del corte por el plano del infinito, si el plano del infinito no corta a la cuádrica, ésta se llama elipsoide, si el plano del infinito es tangente a la cuádrica ésta se llama paraboloide, y si es secante se llama Hiperboloide. Aparecen así los tipos usuales de cuádricas afínes.

3.4 Curvas racionales normales

Las cónicas no degeneradas se pueden obtener como imágenes de la recta proyectiva vía una aplicación φ: $\mathbf{P}_k^1 \to \mathbf{P}_k^2$, obtenida tomando dos polinomios independientes de segundo grado en las variables t_0,t_1, $P_0(t_0,t_1)$, $P_1(t_0,t_1)$, $P_2(t_0,t_1)$, y escribiendo $x_i = P_i(t_0,t_1)$ $0 \leq i \leq 2$.

En efecto, si $P_i(t_0,t_1) = a_{i0}t_0^2 + a_{i1},t_0t_1 + a_{i2}t_1^2$, los tres polinomios son independientes si $\det M \neq 0$ con $M = (a_{ij})$, entonces el sistema de ecuaciones anterior se escribe como

$$(\underline{x})^t = M.(\underline{y})^t \qquad \underline{u} = (t_0^2, t_0\, t_1, t_1^2)$$

Se puede despejar $\underline{u}$, y si $M^{-1} = (b_{ij})$, se obtiene

$$\begin{aligned} t_0^2 &= b_{00}\, x_0 + b_{01}\, x_1 + b_{02}\, x_2 \\ t_0\, t_1 &= b_{10}\, x_0 + b_{11}\, x_1 + b_{12}\, x_2 \\ t_1^2 &= b_{20}\, x_0 + b_{21}\, x_1 + b_{22}\, x_2 \end{aligned}$$

Y eliminando las t_0,t_1 se obtiene

$$(b_{20}\, x_0 + b_{11}x_1 + b_{12}\, x_2)^2 = t_0^2\, t_1^2 = (b_{00}x_0 + b_{01}x_1 + b_{02}\, x_2)\,(b_{20}x_0 + b_{21}\, x_1 + b_{22}\, x_2),$$

que es la ecuación de una cónica.

Recíprocamente la proyección estereográfica de la cónica $[Q]$ desde uno de sus puntos P sobre la tangente en otro de unos puntos P' proporciona unas ecuaciones paramétricas de este tipo.

Entonces, al igual que la noción de cuádrica generaliza la noción de cónica (hipersuperficie de 2° grado), podemos generalizar la noción de cónica observando que hay exactamente 3 polinomios de 2° grado independientes en dos variables y que en grado "d" hay d+1; entonces otra generalización natural de la noción de cónica es la de curva racional normal.

Definición. *Se llama curva racional normal a toda curva del espacio proyectivo de dimensión d, definida por unas ecuaciones paramétricas*

$$x_i = P_i(t_0,t_1) \qquad 0 \leq i \leq d$$

donde $\{P_i(t_0t_1)\}_{0\leq i\leq d}$ *son* d+1 *polinomios independientes de grado d.*

Proposición 1. *Módulo proyectividades, una curva racional normal en* $\mathbf{P}^d$ *es equivalente a la curva*

$$x_i = t_0^{d-i}\, t_1^{\,i} \qquad 0 \le i \le d$$

Demostración: Los polinomios $\{t_0^d,\ t_0^{d-1}\, t_1,\dots,t_1^{\,d}\}$ son d+1 polinomios independientes. Todo polinomio $P(t_0 t_1)$ de grado d es combinación lineal de estos polinomios, si $\{P_i(t_o,t_1)\}_{0\le \le d}$ son polinomios independientes de grado d, la matriz de sus coeficientes M es inversible y la proyectividad de matriz M transforma la curva en la curva dada. □

Proposición 2. *Las curvas racionales normales son intersección de cuádricas. Basta elegir el modelo normal de la proposición 1; claramente todos los puntos de la curva verifican que:*

$$x_i,\, x_j - x_{i+1}\, x_{j-1} = 0 \qquad 0 \le i < d \qquad 1 \le j \le d.$$

Por tanto, la curva está contenida en la intersección de las cuádricas definidas por estas ecuaciones. Recíprocamente, si $[a_0,\dots,a_d]$ verifica estas ecuaciones, se pueden dar dos casos:

a) $a_0 \ne 0$. Entonces, como $a_0\, a_2 = a_1^{\,2}$, $a_0\, a_3 = a_1\, a_2,\dots,a_0\, a_d = a_1\, a_{d-1}$, es

$$\frac{a_2}{a_0} = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2, \quad \frac{a_3}{a_0} = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)\left(\frac{a_2}{a_0}\right) = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3 \quad \cdots \quad \frac{a_d}{a_0} = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^d,$$

luego para $t_0 = 1,\ t_1 = \dfrac{a_1}{a_0}$,

$$[t_0^d,\ t_0^{d-1}\, t_1,\dots,t_1^{\,d}] = [1,\ \frac{a_1}{a_0},\dots,(\frac{a_1}{a_0})^d] = [1,\ \frac{a_1}{a_0},\ \frac{a_2}{a_0},\dots,\frac{a_d}{a_0}]$$
$$= [a_0\, a_1,\dots,a_d].$$

b) $a_0 = 0$ Entonces, como $a_0.a_1 = a_1^{\,2}$, $a_1 = 0$, $a_1.a_3 = a_2^{\,2}$, $a_2 = 0$, etc. $a_{d-2}.a_d = a_{d-1}^{\,2}$, $a_{d-1} = 0$ o se obtiene sólo el punto $[0,\dots,1]$ que está en la curva para $t_0 = 0,\ t_1 = 1$.

Luego, más precisamente la curva es intersección de las cuádricas $x_0\, x_i = x_1\, x_{i-1}$, $2 \le i \le d$, $x_{i-2}\, x_i = x_{i-1}^{\,2}$, $3 \le i \le d$, que son $2d$-3, pero éste número no es en general el más pequeño, aunque si $d = 2$, $d = 3$. □

Ejemplo $d = 3$ La curva es intersección de las 3 cuádricas $x_0 x_2 = x_1^2$, $x_0 x_i = x_1 x_2$, $x_1 x_3 = x_2^2$, y si quitamos una aparece además una recta como parte de la intersección. Esta curva es un ejemplo de curva en el espacio de dimensión 3 que no es intersección completa de dos superficies, es decir no puede escribirse con solo dos ecuaciones.

Problema: ¿Qué sucede en el caso $d = 4$? ¿Se puede suprimir alguna de las 5 ecuaciones?

Proposición 3. *$d+1$ puntos distintos de una curva racional normal generan todo el espacio P^d (son independientes).*

Demostración: Es una aplicación inmediata del determinante de Van der Monde.

Proposición 4. *Por $d+3$ puntos en posición general de P^d pasa una única curva racional normal (en posición general significa que $d+1$ cualesquiera de ellos son independientes).*

En efecto, vamos a buscar otra forma de escribir las ecuaciones paramétricas de una curva racional normal, para ello basta observar que si $[\alpha_0,\beta_0],\ldots,[\alpha_d,\beta_d]$ son puntos distintos de la recta proyectiva

$$G(t_0\, t_1) = \prod_{i=0}^{d} (\alpha_i t_0 - \beta_i t_1)$$

es un polinomio homogéneo de grado $d+1$ y si

$$H_i(t_0\, t_1) = \frac{G(t_0 t_1)}{\alpha_i t_0 - \beta_i t_1}$$

los polinomios $H_i(t_0\, t_1)$ son linealmente independientes, entonces

$$x_i = H_i(t_0\, t_1) \quad 0 \leq i \leq d$$

son también las ecuaciones de una curva racional normal (y todas se escriben así módulo cambio de coordenadas proyectivas). Entonces salvo para valores del parámetro $[\beta_i\ \alpha_i]$ $0 \leq i \leq d$ la curva (dividiendo por $G(t_0\, t_1)$) admite, como paramétricas

$$(*)\ x_i = \frac{1}{\alpha_i t_0 - \beta_i t_1} \qquad 0 \le i \le d$$

y para $[\beta_i\ \alpha_i]$ como valores de $[t_0\ t_1]$ se obtiene el punto coordenado $[0,...,1,...0]$ (1 en la posición i)

Entonces, si tenemos d+3 puntos en posición general, tomando d+1 de ellos como los d+1 primeros puntos de la referencia y el punto unidad arbitrariamente, los dos puntos restantes tendrán coordenadas $[a_0,...,a_n]$, $[b_0,...,b_n]$ y $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$, $\forall i$, luego si $\alpha_i = \frac{1}{a_i}$.. $\beta_i = -\frac{1}{b_i}$ la curva de paramétricas (*) pasa por esos d+3 puntos y es obvio que es la única con esta propiedad.

La generalización que lleva de las cónicas a las curvas racionales normales no es solamente algebraica, su aspecto geométrico se puede poner de manifiesto del modo siguiente:

Proposición 5.

a) *Si P y R son dos puntos distintos del plano proyectivo, π: $\mathbb{P}^2/_P \to \mathbb{P}^2/_R$ es una proyectividad del haz de rectas de vértice P en el haz de vértice R y π no es una perspectividad, entonces los puntos $\{r \cap \pi(r)\}_{r \in \mathbb{P}^2/P}$ forman una cónica que contiene a P y R.*

b) *Si $[Q]$ es una cónica de $\mathbb{P}^2$, P y R son dos puntos de $[Q]$ y definimos*

$$\pi: \mathbb{P}^2/_P \to \mathbb{P}^2/_R \text{ por } \pi(P\,T) = R\,T \qquad \forall T \in [Q],$$

π es una proyectividad.

Demostración:

a) Si elegimos una referencia (Fig. 25) con $P = [001]$, $R = [100]$ y como π no es perspectividad $\pi(P+R) \neq P+R$, luego $\pi(P+R) = s$ y $\exists r$ por R con $\pi(r) = P+R$, entonces se toma

$$[0,1,0] = r \cap s\ .$$

Además, se elige u por P, $u \neq r$, $u \neq P+R$ y se toma $[1,1,1] = u \cap \pi(u)$. En esta referencia $P+R$ es la recta $x_1 = 0$, r la $x_0 = 0$ y s la $x_2 = 0$.

Tomando como referencias en $P^2/_P$ y $P^2/_R$ las rectas $\{x_0 = 0,\ x_1 = 0;\ x_0-x_1 = 0\}$ y $\{x_1 = 0, x_2 = 0; x_1-x_2 = 0\}$, la proyectividad π tiene matriz identidad y así la recta $a_0\ x_0 + a_1\ x_1 = 0$ que tiene coordenadas $[a_0,-a_1]$ se transforma en la $a_0 x_1 + a_1 x_2 = 0$, la intersección de estas rectas es

$$\begin{cases} a_0x_0 + a_1x_1 = 0 \\ a_0x_1 + a_1x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \qquad x_0x_2 - x_1^2 = 0$$

O sea, cuando $[a_0\ a_1]$ varían, tenemos efectivamente una cónica que pasa por P y R.

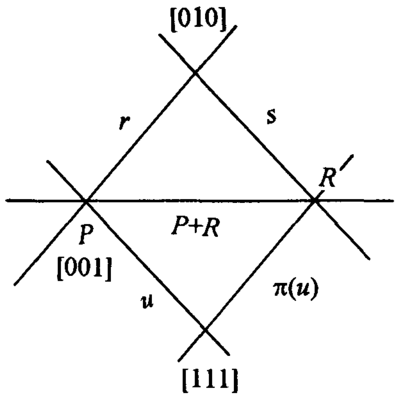

Fig. 25

b) Si $[Q]$ es una cónica y P y R son dos puntos de $[Q]$ (Fig. 26), elegimos una referencia en la cual P sea [001], R [100], y el punto [010] sea el polo de la recta PQ. Tomamos además el punto [111] sobre la cónica, y en esta referencia la ecuación de la cónica es: $\underline{x}\, A\underline{x}^t = 0$, $A= (a_{ij})$ y

b1)$[001] \in [Q] \Rightarrow a_{22} = 0$

b2)$[100] \in [Q] \Rightarrow a_{00} = 0$

b3)La polar de [010] es $(010)\ A\ \underline{x}^t = 0$, es decir $a_{01}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0$ y como es la recta PQ, $x_1 = 0$, debe ser $a_{01} = a_{12} = 0$, luego la matriz de la cónica es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{02} \\ 0 & a_{11} & 0 \\ a_{02} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

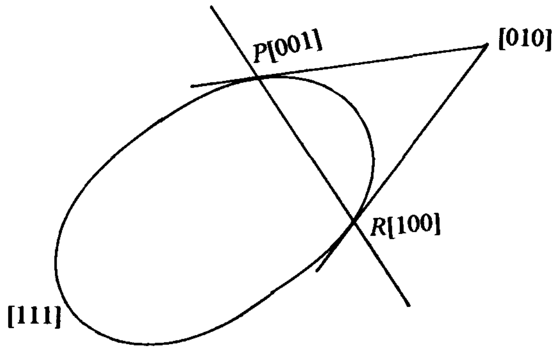

Fig. 26

b4)Como $[111] \in Q$ es $2a_{02} + a_{11} = 0$, luego la ecuación $[Q]$ es

$$2a_{02}\, x_0\, x_2 - 2a_{02} x_1^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_0\, x_2 - x_1^2 = 0.$$

Entonces es inmediato que, tomando como referencia de rectas las del apartado (a) la correspondencia $PT \to RT$, $T \in [Q]$ tiene matriz identidad y es por tanto una proyectividad. □

Proposición 6. *Si* $L_1,\ldots,L_d$ *son subespacios de dimensión d-2 en* $\mathbb{P}^d$ *situados en posición general y* π_{ij}: $\mathbb{P}^d/_{L_i} \to \mathbb{P}^d/_{L_j}$ *son proyectividades tales que*

a) $\pi_{ii} = 1, \forall i$
b) $\pi_{jk}\, \pi_{ij} = \pi_{ik}$

Entonces, si $H \in \mathrm{P}^d/_{L_i}$ *los hiperplanos* $\pi_{ij}(H)$ $j = 1 \ldots d$ *se cortan en un punto* P_H y *los puntos* P_H *cuando H varía en* $\mathrm{P}^d/_{L_i}$ *recorren la curva racional normal en* P^d.

Demostración: Hacerla como problema.

§ 4 VARIEDADES ALGEBRAICAS AFINES Y PROYECTIVAS

4.1 Correspondencia de Galois. Variedades afines.

Consideramos de una parte el espacio afín n-dimensional sobre un cuerpo k (algebraicamente cerrado), $\mathbb{A}_n = k^n$ y por otra el anillo de polinomios en n variables $k[\underline{x}] = k[x_1,...,x_n]$ y definimos las correspondencias

$$I : \mathcal{R}(k^n) \to \mathcal{R}(k[x_1,...,x_n]), \quad V: \mathcal{R}(k[x_1,...,x_n]) \to \mathcal{R}(k^n)$$

donde $\mathbb{R}(X)$ indica el retículo de puntos (subconjuntos) de X, por:

$$I(E) = \{P(x_1,...,x_n) \mid P(a_1,...,a_n) = 0 \quad \forall (a_1,...,a_n) \in E\} \ \forall\ E \subset k^n$$

$$V(F) = \{a_1,...,a_n) \in k^n \mid P(a_1,...,a_n) = 0 \quad \forall P(\underline{x}) \in k[\underline{x}]\}$$

Se verifican las propiedades siguientes:

i) $E_1 \subset E_2 \Rightarrow I(E_2) \subset I(E_1)$, $F_1 \subset F_2 \Rightarrow V(F_2) \subset V(F_1)$

ii) $E \subset V(I(E))$, $F \subset I(V(F))$ y en consecuencia $IVI(E) = I(E)$, $VIV(F) = V(F)$

iii) $I(E)$ es un ideal radical de $k[\underline{x}] \forall E$ (Ideal radical significa que $a^n \in \Rightarrow a \in I$)

iv) Los conjuntos $V(F)$ son los cerrados de una topología de k^n (Topología de Zariski).

Veamos esta última propiedad. Es inmediato que $V(\{\underline{0}\}) = k^n$ y $V(\{I\}) = \Phi$, además

a) $V(F_1F_2) = V(F_1) \cup V(F_2)$ donde $F_1.F_2 = \{f.g \mid f \in F_1, g \in F_2\}$, puesto que

$$P \in V(F_1) \Rightarrow g(P) = 0 \quad \forall f \in F_1 \Rightarrow h(P) = 0 \quad \forall h \in F_1.F_2$$

ya que

$$h = f.g,\ f \in F_1,\ g \in F_2,\ f(P) = g(P).g(P) = 0.g(P) = 0.$$

Lo mismo sucede con F_2, luego $V(F_1) \cup V(F_2) \subset V(F_1.F_2)$, y si

$P \notin V(F_1) \cup V(F_2) \Leftrightarrow P \notin V(F_1), P \notin V(F_2) \Leftrightarrow \exists f \in F_1, f(P) \neq 0 \quad \exists g \in F_2$ con $g(P) \neq 0$,

luego $h = f.g \in F_1F_2$ y $h(P) \neq 0$, por tanto $P \notin V(F_1 F_2)$.

Entonces la unión de los conjuntos del tipo $V(F)$ es de este tipo.

b) $V(\bigcup_{i \in I} F_i) = \bigcap_{i \in I} V(F_i)$ Es claro.

Luego, la intersección de una familia arbitraria de conjuntos $V(F)$ es de este tipo y se verifica que los $\{V(F)\}$ son los cerrados de una topología en k^n.

v) Los conjuntos $\{V(f)\}_{f \in K[x]}$ son base de cerrados para la topología de Zariski y los conjuntos $\{D(f)\}_{f \in K[x]}$ son base de abiertos

$$(D(f) = k^n - V(f) = \{(a_1,\dots,a_n) \in k^n \mid f(a_1,\dots,a_n) \neq 0\}).$$

vi) k^n con la topología de Zariski es T_1.

Los puntos son cerrados ya que $(a_1,\dots,a_n) \in k^n \Rightarrow$
$\{(a_1,\dots,a_n)\} = V\{x_1 - a_1,\dots,x_n - a_n\}$.

Un resultado básico que no demostraremos aquí (V. Zariski Samuel Vol. 2) es el siguiente:

Teorema de los ceros de Hilbert: $I(V(F))$ es el radical del ideal generado por F.

Recordemos que si F es una parte de un anillo A, el ideal generado por F es el mínimo ideal que contiene a F, es decir la intersección de todos los ideales que contienen a F y los elementos son exactamente las combinaciones lineales finitas de elementos de F con coeficientes en A:

$$I_F = \bigcap_{F \subset I} I = \{a_1 f_1 + \dots + a_n f_n \mid a_i \in A \ f_i \in F\}.$$

Además el radical de un ideal J, $\sqrt{J}$ es la intersección de todos los ideales primos que contienen a J ($B \subset A$ ideal primo $\Leftrightarrow \forall a,b \in A \quad a.b \in B \Rightarrow a \in B$ ó $b \in B$), y está caracterizado por

$$a \in \sqrt{J} \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathrm{N},\ a^n \in J$$

Entonces el teorema de los ceros de Hilbert afirma que $IV(F) \subset \sqrt{I_F}$, ya que $IV(F)$ es un ideal radical de $k[x_1,...,x_n]$ y $F \subset IV(F)$, luego $\sqrt{I_F} \subset IV(F)$ y realmente sólo es difícil la prueba de la inclusión contraria que en términos de funciones significa que:

Si $g \in k[x_1,...,x_n]$ y $g(a_1,...,a_n) = 0$, $\forall (a_1,...,a_n)$ tal que $f(a_1,...,a_n) = 0$

$\forall f \in F$, $\exists f_1..f_r \in F$ $\exists n \in \mathbb{N}$ $\quad g^n = a_1 f_1 + ... + a_r f_r \quad a_1...a_r \in k[x_1,...,x_n]$

es decir, si un polinomio se anula sobre las raíces comunes de una familia arbitraria de polinomios, una potencia del mismo es combinación lineal de un número finito de elementos de la familia.

Como consecuencia del Teorema de los ceros, todo ideal I radial es de la forma $I(E)$ pues $I = IV(I)$, luego si tomamos de una parte los cerrados de la topología de Zariski y de otra, los ideales radicales de $k[x_1,...,x_n]$, existe una correspondencia biunívoca entre ambos conjuntos:

$$\{\text{cerrados de la topología de Zariski}\} \underset{\overleftarrow{\quad V \quad}}{\xrightarrow{\quad I \quad}} \{\text{Ideales radicales de } k[x_1,...,x_n]\}.$$

Los cerrados de la topología de Zariski se llaman "conjuntos algebraicos" y ahora podemos encontrar, usando el teorema de los ceros, más propiedades de esta topología:

c) k^n con la topología de Zariski es cuasicompacto.

En efecto, si tenemos un recubrimiento abierto de k^n por abiertos de la base (basta limitarse a este caso) $k^n = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$; pasando al complementario

$\Phi = \bigcap_{i \in I} V(f_i) = V(F) \quad F = \{f_i\}_{i \in I}$, pero entonces

$$IV(F) = I(\Phi) = k[x_1,...,x_n] \Rightarrow 1 \in I\,V(F) \Rightarrow \exists f_1,...,f_r \quad 1 = a_1 f_1 + ... + a_r f_r$$

$$\Rightarrow V(f_1) \cap ... \cap V(f_r) \subset V(1) = \Phi \Rightarrow D(f_1) \cup ... \cup D(f_r) = k^n$$

d) k^n tiene base de abiertos cuasi compactos.

Es inmediato que los $D(g)$ son cuasi compactos, aplicando el mismo razonamiento de (a).

e) k^n es un espacio noetheriano. Es decir, toda cadena decreciente de cerrados de k^n es estacionaria.

Esta propiedad es consecuencia de otro de los teoremas importantes relativo a $k[x_1,...,x_r]$ y también debido a Hilbert.

Teorema de la base (Hilbert). *Todo ideal de $k[x_1,...,x_n]$ está finitamente generado.*

En consecuencia, si $I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_n \subset ...$ es una cadena creciente de ideales, es estacionaria, es decir $\exists n$ con $I_n = I_m$, $\forall_n \geq n$, ya que si tomamos $I = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$, I es un ideal, y está generado por $\{f_1,...,f_r\}$, entonces $\exists\ i_1,...,i_r$ con $f_j \in I_{i_j}$ y tomando $n = \max\ \{i_1,...,i_r\}$ se tiene el resultado. Entonces si $U_1 \supset ... \supset U_r \supset ...$ es una cadena decreciente de cerrados, $I(V_1) \subset I(V_2) \subset ... \subset I(V_r) \subset ....$ es una cadena creciente de ideales, luego es estacionaria y existe n con $I(V_m) = I(V_n)$, $\forall m \geq n \rightarrow V_m = V_n$, $\forall m \geq n$.

f) Por último observemos lo siguiente: Si V es un conjunto algebraico se dice que V es irreducible si y sólo si $V = V_1 \cup V_2$ con V_1 *y* V_2 conjuntos algebraicos $\Rightarrow V = V_1$ *ó* $V = V_2$. Entonces:

<u>f-1</u> Todo conjunto algebraico es unión de un número finito de conjuntos algebraicos irreducibles.

<u>d-2</u> V es irreducible $\Leftrightarrow I(V)$ es primo.

La primera propiedad es común a todos los espacios noetherianos, y basta proceder así: Si V es algebraico y V es irreducible, hemos terminado, y si V no es irreducible $V = V_1 \cup V_2$ con $V_1 \neq V$, $V_2 \neq V$; si ambos son irreducibles hemos terminado, si no, uno de ellos o ambos son unión de irreducibles $V_{11} \cup V_{12} \cup V_{21} \cup V_{22}$. Así elaboramos cadenas estrictamente decrecientes de cerrados $V \supset V_1 \supset V_{11} \supset ...$, como todas ellas son estacionarias, el proceso seguido aquí termina después de un número finito de pasos y V es unión de un número finito de irreducibles. Es inmediato comprobar que la descomposición, con una condición adicional, es única, salvo el orden, pues si

$$V = V_1 \cup ... \cup V_r = W_1 \cup ... \cup W_s$$

con V_i y W_j irreducibles, $\forall_{ij}$, es $W = W_1 \cap V = (W_1 \cap V_1) \cup ... \cup (W_1 \cap V_s)$

y como W_1 es irreducible, debe ser $W_1 \cap V_i = W_1$ para algún i. Entonces, si imponemos a la descomposición la condición $V_i \not\subset V_j$ $\forall i \neq j$ (y lo mismo a la W_i) tomando ahora V_i debe ser $V_i \cap W_j = V_i$ para algún j, luego $W_1 \subset V_i \subset W_j$ $\Rightarrow j = 1$ y $W_i = V_i$.

La segunda propiedad resulta también del teorema de los ceros, pues si $I(V)$ es primo y $V = V_1 \cup V_2$ con $V_1 \neq V$ $V_2 \neq V$, $\exists f \in I(V_1), f \notin I(V)$, $g \in I(V_2)$, $g \notin I(V)$; obviamente $f.g \in I(V_1 \cup V_2) = I(V)$ y se llega a contradicción. Recíprocamente, si V es irreducible y

$f.g \in I(V),\ g \notin I(V), f \notin I(V) \Rightarrow$

$$V = V \cap V(fg) = V \cap (V(f) \cup V(g)) = (V \cap V(g)) \cup (V \cap V(g))$$

y
$$V \neq V(f) \cap V,\ \ V \neq V(g) \cap V$$

luego se llega a contradicción.

Ambos resultados son consecuencia del hecho de que por ser $k[x_1,...,x_n]$ un anillo noetheriano, si I es un ideal radical $I = \beta_1 \cap ... \cap \beta_r$ con los β_i primos y la descomposición es única.

Entonces para estudiar los conjuntos algebraicos, debemos estudiar los conjuntos algebraicos irreducibles, también llamadas "variedades algebraicas afines".

4.2 Funciones regulares

Observemos, en primer lugar, que si $V = V(I)$ es un conjunto algebraico, con I ideal radical, podemos llamar funciones sobre V a la restricción a V de las funciones de $k[x_1...x_n]$, si $\mathcal{O}(V)$ es el anillo compuesto por estas funciones restricción, tenemos un homomorfismo

$$k[x_1...x_n], \xrightarrow{\text{Restricción}} \mathcal{O}(V)$$

y el núcleo de este homomorfismo es precisamente el ideal de polinomios que se anulan en V,I ; así $\mathcal{O}(V) = k[\underline{x}]_{/I}$ y $\mathcal{O}(V)$ es un álgebra reducida (sin nilpotentes) finitamente generada sobre k, que recibe el nombre de anillo de funciones sobre V; V es irreducible, sí y sólo si I es primo, es decir si y sólo si $\mathcal{O}(V)$ es un dominio de integridad. Entonces, hay una correspondencia también entre conjuntos algebraicos y álgebras finitamente generadas y reducidas, correspondencia que se puede invertir en cierto modo, ya que si A es una k álgebra de este tipo, $A = {k[x_1 \dots x_n]}/{I}$ con $I = \sqrt{I}$ y A corresponde al ideal $V(I)$, pero n e I no son únicos, por ejemplo, la circunferencia $x^2 + y^2 - 1 = 0$ en el plano, y en el espacio de dimensión 3, corresponde a las álgebras

$$k[x, y]/(x^2 + y^2 - 1) \quad \text{y} \quad k[x, y, z]/(x^2 + y^2 - 1, z)$$

que son isomorfas. Es decir, al tomar el anillo de funciones liberamos en cierto sentido a la variedad de su espacio ambiente.

Para definir las funciones localmente, basta definirlas sobre una base de abiertos y para hacer esta construcción recordemos primero lo siguiente:

Nota: Anillos de fracciones. Si A es un dominio de integridad y $S \subset A$ diremos que S es una parte multiplicativamente cerrada de A si $1 \in S$, y $\forall s_1, s_2 \in S$ es $s_1 . s_2 \in S$.

Entonces se define en $S \times A$ la relación

$$(s_1, a_1) \sim (s_2, a_2) \Leftrightarrow s_1 a_2 = a_1 s_2.$$

Esta relación es de igualdad y el cociente $S \times A/\sim$ se le llama anillo de fracciones de A respecto de S y se le representa por $S^{-1}A$, cada clase $(s,a)\sim$ se llama una fracción y se representa por $\frac{a}{s}$.

$S^{-1}A$ tiene estructura de anillo con las operaciones:

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'}, \qquad \frac{a}{s} . \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'}$$

y existe un homomorfismo inyectivo $A \to S^{-1} A$ que asocia a $a \in A$, $\frac{a}{1} \in S^{-1} A$ y permite identificar a A con su imágen en $S^{-1}A$.

Hay dos ejemplos especialmente interesantes:

a) $S = \{1, a, a^2, ..., a^n, ...\}$ es una parte multiplicativamente cerrada. $S^{-1}A = \{\frac{b}{a^n} \mid b \in A\}$ se representa por A_a; claramente $A_a = A[\frac{1}{a}] \simeq A[x]_{/(ax-1)}$ (La primera igualdad es obvia, y la segunda resulta de observar que $(a + (ax-1)).(x + (ax-1)) = 1 + (ax-1)$).

b) Si β es un ideal primo de A, $S = A- \beta$ es una parte multiplicativamente cerrada y $\beta^{-1}A$ se llama anillo localizado de A en β y se representa por A_β.

   A_β es lo que se llama un "anillo local", es decir un anillo tal que tiene un ideal máximo $\mathcal{M} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \beta,\ b \notin \beta\}$ o, lo que es lo mismo, tal que los elementos no inversibles de A_β forman un ideal.

Definición. *Una función f definida en un abierto U de una variedad algebraica V y con valores en k, se llama regular en $\underline{a} \in U$ si existen polinomios h,g tales que $g(\underline{a}) \neq 0$ y $f = \frac{h}{g}$ en un entorno de $(\underline{a})$; f se dice regular en U si lo es en todo punto de U.*

Proposición. *Si $D(g)$ es un abierto básico en una variedad algebraica V, las funciones regulares en $D(f)$ son los elementos del anillo $\mathcal{O}(V)_f$; en particular las funciones regulares en V son los elementos de $\mathcal{O}(V)$.*

Demostración: Si g es regular en $D(f)$, $\forall \underline{a} \in D(f)$, $(f(\underline{a}) \neq 0)$, existen funciones $h_{\underline{a}}$, $t_{\underline{a}}$ con $t_{\underline{a}}(\underline{a}) \neq 0$ y entornos U_a, tales que en U_a $g = \frac{h_{\underline{a}}}{t_{\underline{a}}}$; se pueden substituir los abiertos U_a por abiertos básicos $D(f_{\underline{a}})$, y puesto que los $t_{\underline{a}}$ no se pueden anular en $D(f_{\underline{a}})$ (en caso contrario, f no estaría definida) es

$$D(f_{\underline{a}}) \subset D(t_{\underline{a}})\ \forall \underline{a} \Rightarrow V(t_{\underline{a}}) \subset V(f_{\underline{a}})\ \forall \underline{a},$$

pero $D(f) = \bigcup_{\underline{a} \in D(f)} D(f_{\underline{a}}) \Rightarrow$

$$V(f) = \cap (V(f_{\underline{a}})) = V(\{f_{\underline{a}}\}_{\underline{a} \in D(f)} \supset \bigcap_{\underline{a} \in D(f)} V(t_{\underline{a}}) = V(\{t_{\underline{a}}\}_{\underline{a} \in D(f)}\} \Rightarrow$$

$$\exists n\ f^n = \sum_{\underline{a} \in J} b_{\underline{a}} t_{\underline{a}}$$

(J es el conjunto finito de $D(f)$).

Entonces, como funciones racionales,

$$f^n \cdot g = \sum_{\underline{a} \in J} b_{\underline{a}} t_{\underline{a}} g = \sum b_{\underline{a}} t_{\underline{a}} \frac{h_{\underline{a}}}{t_{\underline{a}}} = \sum b_{\underline{a}} h_{\underline{a}} \Rightarrow g = \frac{\sum b_{\underline{a}} h_{\underline{a}}}{f^n} \in A_f \text{ (con } A = \mathcal{O}(V))$$

Esta proposición "legaliza" en cierto sentido la definición de función regular, ya que los abiertos de la forma $D(f)$ se pueden considerar como conjuntos algebraicos en un espacio de dimensión mayor, puesto que si tomamos $f \in k[x_1 ... x_n]$ y en $K[x_1 ... x_n, z]$ tomamos el ideal generado por $(z.f-1)$, es

$$k[x_1,...,x_n,z] \big/ zf-1 \simeq k[x_1,...,x_n][z] \big/ [zf-1] \simeq k[x_1,...,x_n]_f$$

es decir, las funciones coordenadas sobre este conjunto algebraico son los elementos de $k[x_1,...,x_n]_f$ y $V[zf-1] = \{(a_1,...,a_n,b) \mid b = \frac{1}{f(a_1,...,a_n)}\}$ que es isomorfo por proyección con $D(f)$.

Veamos ahora cuales son los gérmenes de función en un punto. Para ello debemos construir para $P \in V$, V variedad algebraica, el conjunto

$$\mathbb{F}_P = \{(U,f) \mid P \in U \text{ abierto } f\colon U \to K \text{ regular en } P\}$$

y definimos la relación

$$(Uf) \sim (Vg) \Leftrightarrow P \in U \cap V \text{ y } \exists W \subset U \cap V, P \in W, \ W \text{ abierto y } f|_w = g|_w .$$

Con esta definición, si llamamos $\mathcal{O}_P$ al conjunto cociente de $\mathbb{F}_P$ por la relación $\sim$:

i) $\mathcal{O}_P$ es un anillo, con las operaciones $[U,f] + [V,g] = [U \cap V, f+g]$

$[u,f].\ [V,G] = [U \cap V, f.g]$, donde $[U,f]$ es la clase de (U,f) en la relación $\sim$.

ii) Cada clase $[U,f]$ admite un representante $[W,h]$ con $W = D(t)$,

$h = \frac{l}{t}$, $t(P) \neq 0$, h, $t \in k[\underline{x}]$.

En efecto, como f es regular en U por definición de función regular, $f = \frac{b}{t}$ con la condición requerida y esto en un entorno de P (que ha de estar contenido en $D(t)$), luego

$$(W,h) \sim (D(t), \frac{b}{t}).$$

iii) $\mathcal{O}_P$ es precisamente el anillo local $A_{\mathcal{M}}$ donde $A = {}^{k[\underline{x}]}/_{I(V)}$ y $\mathcal{M}$ es el ideal maximal de las funciones que se anulan en P.

En efecto, definimos una aplicación $A \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_P$ asociando a cada clase de funciones $f+I(V) \in A$, el germen $[V,f]$; φ es aplicación porque obviamente no depende del representante elegido, además si $g(P) \neq 0$ $[V,g]$ es inversible en $\mathcal{O}_P$, luego los elementos de A-$\mathcal{M}$ van a parar a unidades y φ define un homeomorfismo $\overline{\varphi}$: $A_{\mathcal{M}} \to \mathcal{O}_P$.

Por (ii) este homomorfismo es sobre y además es trivialmente inyectivo, luego $\mathcal{O}_P \simeq A_{\mathcal{M}}$.

En consecuencia el anillo A determina local y globalmente las funciones sobre la variedad afín.

4.3 Variedades proyectivas

Si consideramos ahora el espacio proyectivo n-dimensional sobre k con una referencia previamente dada y el anillo de polinomios $k[x_0,\dots,x_n]$, se pueden establecer correspon- dencias análogas a las V e I, pero esta vez tomando polinomios homogéneos, ya que según hemos observado antes, son estos polonomios los que tienen sentido en el espacio proyectivo.

Nota 1: Anillos graduados

Si llamamos $S_r = \{P(x_0,\dots,x_n) \mid P(\underline{x}) \in k[\underline{x}]$ y P es homogéneo de grado $r\}$, $S_0 = k$ y S_r es un espacio vectorial sobre $k = S_0$. Además $S_r.S_t \subset S_{r+t}$, ésta situación se puede generalizar en la definición siguiente:

Definición. *El anillo A se llama graduado, si existe una familia* $\{A_g\}_{g \in \mathbb{N}}$ *de subconjuntos de A, tales que* *i)* A_g *es un subgrupo aditivo de* A, $\forall g \in \mathbb{N}$.

ii) $A_g.A_{g'} \subset A_{g+g'}$ $\quad \forall g, g' \in \mathbb{N}$.

(En consecuencia A_0 *es también anillo y los* A_g *son* A_0*-módulos* $\forall g \in \mathbb{N}$*).*

iii) $A \simeq \bigoplus_{g \in \mathbb{N}} A_g$ *(Es decir, todo elemento de A se escribe en forma única como suma finita de elementos de los* A_g*).*

- El anillo $k[x_1,\dots,x_n]$ es un ejemplo de anillo graduado

- Otro ejemplo fundamental en Geometría es el siguiente: Si A es un anillo, se llama una filtración multiplicativa de A a una familia de subconjuntos de A $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ con

i) $F_0 = A \quad F_i \subset F_{i-1} \quad \forall i \geq 1$

ii) F_i es ideal de A para todo i

Se suele añadir a veces la condición $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_i = \{0\}$ pero no es imprescindible, por ejemplo si $A = k[[x_1 \dots x_n]]$ es el anillo de raíces de potencias formales en las variables, $F_i = \{s(\underline{x}) \in A \mid \text{orden de } s \geq i\}$ es una filtración, o más generalmente, si A es un anillo arbitrario, y si I es un ideal de A, $F_r = \{I^r\}_{r \in \mathbb{N}}$ es una filtración de A.
Entonces se puede construir asociada a cada filtración F del anillo A, $G_{r_{\mathbb{F}}}(A) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} F_i / F_{i+1}$, obviamente $G_{r_{\mathbb{F}}}(A)$ es un anillo graduado con $A_i = F_i / F_{i+1}$ como graduación. En el caso de ser $A = k[[x_1 \dots x_n]]$ y F la filtración antes indicada, $G_{r_{\mathbb{F}}}(A) \simeq k[x_1 \dots x_n]$.

Si A es un anillo graduado, un ideal I se dice que es un ideal homogéneo si verifica una de las propiedades equivalentes siguientes:

a) $I = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} I_i$ con $I_i = I \cap A_i$, $\forall i$

b) I está generado por polinomios homogéneos.

c) $f = \sum_{g \in \mathbb{N}} f_g \in I \Leftrightarrow f_g \in I$, $\forall g \in \mathrm{N}$, (con $f_g \in A_g$).

Proposición. *Si $\mathcal{M}$ es un ideal maximal de un anillo A, I es un ideal contenido en $\mathcal{M}$,* y F *es la filtración de potencias de $\mathcal{M}$ en A*, $\mathbb{F} = \{m^r\}_{r\in N}$

i) $\mathcal{M}$ induce una filtración en $A/_I$, $\overline{\mathbb{F}}$

ii) Existe un homomorfismo sobre de $G_{r_f}(A)$ en $G_{r_{\bar{f}}}(A/_I)$ cuyo núcleo es el ideal de $G_{r_f}(A)$ generado por las formas iniciales de todos los elementos de I (*Si* F *es una filtración de A y $f\in A$*, se llama orden de *f respecto de la filtración al máximo de los $i\in\mathbb{N}$ con $f\in f_i$ y forma inicial de f a $Inf = f + f_{i+1}$ siendo i el orden de f*)

Demostración:

i) Es trivial pues basta tomar el ideal $\overline{\mathcal{M}} = {}^{\mathcal{M}}/_I$ que es también un ideal maximal de ${}^A/_I$.

ii) El homomorfismo (sobre) natural $A \xrightarrow{\varphi} {}^A/_I$ induce un homomorfismo $\varphi_1: \mathcal{M} \to {}^{\mathcal{M}}/_I = \overline{\mathcal{M}}$ que a su vez induce homomorfos $\varphi_n: \mathcal{M}^n \to (\overline{\mathcal{M}})^n$ y por tanto homomor-fismos

$$\overline{\varphi}_n: \mathcal{M}^n/\mathcal{M}^{n+1} \to \overline{\mathcal{M}}^n/\overline{\mathcal{M}}^{n+1}$$

y un homomorfismo

$$\overline{\varphi}: G_r(A) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}^n/\mathcal{M}^{n+1} \to \bigoplus \overline{\mathcal{M}}^n/\overline{\mathcal{M}}^{n+1} = G_{r_{\bar{F}}}(A).$$

El núcleo de $\overline{\varphi}$ es $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}$ Ker $\overline{\varphi}_n$ y claramente Ker $\overline{\varphi}_n$ está generado por las clases $j+\mathcal{M}^{n+1}$ con $f\in I\cap\mathcal{M}^n$, $f\notin I\cap\mathcal{M}^{n+1}$. □

Una vez terminado este inciso, que usaremos más adelante, podemos considerar las aplicaciones:

$$\mathcal{P}(\mathrm{P}^n{}_k) \underset{V}{\overset{I}{\rightleftarrows}} \mathcal{P}_H(k[x_0,\ldots,x_n]),$$

donde $\mathcal{P}_H$ ($k[\underline{x}]$) es el conjunto de ideales homogéneo de $k[x_0,\ldots,x_n]$ y $\mathcal{P}(\mathbb{P}^n{}_k)$ es el conjunto de "conjuntos algebraicos proyectivos" o conjuntos de ceros de una familia de polinomios homogéneos. I y V cumplen las mismas propiedades que en el espacio afín y, con los conjuntos algebraicos como cerrados, se puede definir la topología de Zariski del espacio proyectivo.

Si U es una carta afín del proyectivo $U = \mathbb{P}^n_k - H_\infty$, el proceso de par paso afin proyectivo, ya estudiado permite establecer una correspondencia entre conjuntos algebraicos, no contenidos en el infinito en $\mathbb{P}^n_k$ y conjuntos algebraicos afines, y entre ideales de $k[y_1,\ldots,y_n]$ e ideales homogéneos de $k[x_0,\ldots,x_n]$, que nos posibilita estudiar las variedades proyectivas en términos de sus recubrimientos afines: Es un buen ejercicio caracterizar las funciones regulares sobre las variedades proyectivas.

Bibliografía.

[1] Davis, Grunbaum y Sherk (Eds.). *The Geometric Vein.* Springer Verlag. New York 1981.

[2] Harris J. *Algebraic Geometry.* Springer Verlag. New York 1992.

[3] Santaló L. *Geometría Proyectiva.* EUDEBA, Buenos Aires 1977.

[4] Semple J.G. Kneebone G. T. *Algebraic Projective Geometry.* Oxford Univ. Press 1952.

[5] Tisseron C. *Geometries affine, projective et euclidienne.* Hermann Paris 1988.

aroca@cpd.uva.es