Pro Mathematica Vol. XII, Nos. 23-24, 1998

SOBRE CURVAS MAXIMALES

Fernando ***Torres***

Introducción

En las últimas décadas, se ha renovado el interés por el estudio de curvas, sobre un campo finito F, con un número "grande" de puntos F–racionales debido, principalmente, a sus importantes aplicaciones a la Teoría de Códigos [12], [29], a la Teoría de Números [20], [24] o a la Teoría de Geometrías Finitas [16], [23]. Diversos problemas en estas áreas pueden formularse de manera equivalente.

Sea $\mathcal{X}$ una curva algebraica, proyectiva, geométricamente irreducible y definida sobre $\overline{F}$, la clausura algebraica de un campo finito $F = F_\ell$ con ℓ elementos. Suponga, además, que sobre $\mathcal{X}$ está definido el morfismo de Frobenius relativo a F_ℓ o, equivalentemente, que $\mathcal{X}$ está definida sobre F_ℓ. Diversas propiedades aritméticas y geométricas de $\mathcal{X}$ están codificadas o "escondidas" en su función Zeta. En particular, el número $\#\mathcal{X}(F_\ell)$ de puntos

Profesor de IMECC - UNICAMP, Brasil

F_ℓ–racionales de $\mathcal{X}$ puede ser calculado a través de tal función. Si $\mathcal{X}$ es no singular, tenemos el famoso Teorema de Hasse-Weil sobre la hipótesis de Riemann para curvas sobre campos finitos [30] que implica la no menos famosa cota de Hasse-Weil para # $\mathcal{X}$ (F_ℓ), a saber

$$|\ \#\ \mathcal{X}(F_\ell)\ -\ (\ell+1)\ |\ \leq 2g\sqrt{\ell}\,,$$

donde g es el género de $\mathcal{X}$. Si, de lo contrario, $\mathcal{X}$ es singular, la cota anterior aún es válida si se substituye g por el género aritmético de $\mathcal{X}$, ver [27, Section 4], [2, Corollary 2.4], [19], y [3].

A partir de ahora, por una curva entiéndase una algebraica, proyectiva, geométricamente irreducible y no singular, definida sobre un campo finito.

Una curva sobre F_ℓ se llama F_ℓ–maximal si tiene tantos puntos F_ℓ–racionales como la cota superior de Hasse-Weil.

El objetivo de estas notas es informar resultados aritméticos y geométricos de curvas F_ℓ–maximales obtenidos por el autor y co-autores: M. Abdón, A. Cossidente, A. García, J.W.P. Hirschfeld y G. Korchmáros, en los siguientes artículos: [8], [7], [9], [10], [4], [5], [6], y [1]. El método, para el estudio de estas curvas, consiste en aprovecharse de la forma especial de la F_ℓ– serie lineal asociada a la curva F_ℓ–maximal (definida en [7, p.33]), usando para esto un artículo fundamental de Stöhr y Voloch [28], y usando, también, la clásica fórmula de Castelnuovo para curvas en espacios proyectivos. Entre los problemas considerados en estas investigaciones están los siguientes:

(P1) El espectro de los géneros de curvas F_ℓ–maximales, y
(P2) Para una curva F_ℓ–maximal $\mathcal{X}$, el cálculo del conjunto

$$[\mathcal{X}\,] := \{\, \mathcal{Y} : \mathcal{Y}\, F_\ell\text{–isomorfo a } \mathcal{X}\,\},$$

así como el cálculo de un modelo plano sobre F_ℓ para cada $\mathcal{Y} \in [\mathcal{X}]$.

Sea $\mathcal{X}$ una curva F_ℓ–maximal de género g. Luego, necesariamente, ℓ es una potencia cuadrada, digamos que $\ell = q^2$. Luego Ihara [17] observó que g no puede ser mayor que $q(q-1)/2$. Resulta que esta cota es la mejor posible ya que la curva Hermitiana $(\mathcal{H})$

$$Y^q Z + YZ^q = X^{q+1}$$

es F_{q^2} −maximal y tiene género $q(q-1)/2$. Más aún, $\#|\mathcal{H}| = 1$ resultado probado por Rüch y Stichtenoth [21]. Así, tenemos una respuesta parcial al Problema 1 y la solución del Problema 2 para la curva Hermitiana. Ahora, usando un resultado de Lachaud, [18, Proposition 6], todas las curvas F_{q^2} −cubiertas por la Hermitiana son también F_{q^2} −maximales. De hecho, todos los ejemplos conocidos de curvas F_{q^2} −maximales son de este tipo. Así, el resultado de Lachaud sugiere los siguientes problemas, que aún están sin solución,

(P3) Clasificación de curvas F_{q^2} −maximales cubiertas por la Hermitiana, y

(P4) El problema de la existencia de curvas F_{q^2} −maximales no cubiertas por la Hermitiana.

Para estudiar (parcialmente) el Problema 3, se consideran curvas concientes $\mathcal{H}/G$ con G un subgrupo del grupo Aut$(\mathcal{H})$ de F_{q^2} −automorfismos de $\mathcal{H}$. Esto se estudia en los artículos [5] y [6]. Estos trabajos sirven, también, de incentivo para el estudio de Aut$(\mathcal{H})$ que, como es bien sabido, es isomorfo al grupo proyectivo unitario $PGU(3, F_{q^2})$. En particular, el Problema 3 fue resuelto en [6] para curvas F_{q^2} −cubiertas por la curva Hermitiana por una extensión de Galois de grado primo.

Sea ahora g, el género de la curva F_{q^2} −maximal $\mathcal{X}$, menor que $q(q-1)/2$. Fue conjeturado por Stichtenoth y Xing [26] que $g \leq (q-1)^2/4$. Esta conjetura fue probada por Fuhrmann y el autor [8] y es el punto de partida para la aplicación del trabajo de Stöhr y Voloch [28] en el estudio de las curvas F_{q^2} −maximales.

El prototipo de los resultados de estas investigaciones está explicado en los siguientes tres ejemplos. Estos ejemplos también ilustran las técnicas usadas en estas investigaciones. En el primer ejemplo, pruebo la conjetura de Stichtenoth y Xing. En los otros ejemplos, se consideran dos propiedades relevantes de curvas maximales, a saber, que $\#[\mathcal{H}] = 1$ y que ellas son no clásicas (para la serie lineal canónica). El Ejemplo 3 ilustra relaciones entre la geometría de la F_{q^2}−serie lineal y la geometría de la serie lineal canónica; ver [7, Proposition 1.7] y [10].

Ejemplo 1. Sea $\mathcal{X}$ una curva F_{q^2}−maximal de género $g < q(q-1)/2$. Entonces, $g \leq (q-1)^2/4$.

Demostración. Sea $\mathcal{D}$ la F_{q^2}−serie lineal de $\mathcal{X}$. Luego $\mathcal{D}$ tiene grado $q+1$ y está definido por un punto $P_0 \in \mathcal{X}(F_{q^2})$, i.e. $\mathcal{D} = |(q+1)P_0|$. Más aún,

$$(*) \qquad (q+1)P_0 \sim (q+1)P \qquad \text{para cada } P \in \mathcal{X}(F_{q^2}),$$

y 1 es un $(\mathcal{D}, P_0)$−orden. Luego, $(q+1)$ es un $(\mathcal{D}, P)$−orden para cada $P \in \mathcal{X}(F_{q^2})$ y $\mathcal{D}$ es simple. Sea $r := \dim(\mathcal{D})$ y suponga, por contradicción, que $g > (q-1)^2/4$.

Luego la cota de Castelnuovo sobre g implica $r = 2$. Sean $\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ los $\mathcal{D}$−órdenes. Luego tenemos, $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 \leq q+1$. De hecho, $\varepsilon_2 \leq q$, caso contrario tendríamos $\varepsilon_2 = q+1$ y luego, por el criterio p−adico, q también sería un $\mathcal{D}$−orden y luego $r > 2$, lo que es absurdo. Concluimos así que

$$\mathcal{X}(F_{q^2}) \subseteq \text{conjunto de } \mathcal{D}\text{−puntos de Weierstrass de } \mathcal{X},$$

i.e. que $v_P(\mathrm{R}) \geq 1$, $P \in \mathcal{X}(F_{q^2})$, donde R denota el divisor de ramificación asociado a $\mathcal{D}$. Entonces,

$$\deg(\mathrm{R}) = (1+\varepsilon_2)(2g-2) + 3(q+1) \geq \#\mathcal{X}(F_{q^2}) = q(2g-2) + (q+1)^2.$$

De esta desigualdad tenemos que $\varepsilon_2 = q$. En efecto, si $\varepsilon_2 \leq q-1$ se tendría que

$$0 \geq (q-1-\varepsilon_2)(2g-2) + (q+1)(q-2),$$

lo cual es absurdo pues hemos asumido que $g > (q-1)^2/4$. Así tenemos que $2g-2 \geq (q+1)(q-2)$, o que $g \geq q(q-1)/2$, lo que contradice la hipótesis sobre el género.

Ejemplo 2. Sea $\mathcal{X}$ una curva F_{q^2}-maximal de género $g = q(q-1)/2$. Entonces, $\mathcal{X}$ es F_{q^2}-isomorfa a la curva Hermitiana.

Demostración. Sea $\mathcal{D} = |(q+1)P_0|$ la F_{q^2}-serie lineal asociada a $\mathcal{X}$. Usaremos resultados del ejemplo anterior. Primero, tenemos que $\dim(\mathcal{D}) = 2$. Luego, sean $\nu_0 < \nu_1$ los órdenes de Frobenius asociados a $\mathcal{D}$. Tenemos, $\nu_0 = 0$ y $\nu_1 \leq \varepsilon_2 = q$. Sea S el divisor de Frobenius asociado a $\mathcal{D}$. Entonces $v_P(S) \geq 2$ para cada $P \in \mathcal{X}(F_{q^2})$ y luego

$$\deg(S) = \nu_1(2g-2) + (q^2+2)(q+1) \geq 2q(2g-2) + 2(q+1)^2$$

Por lo tanto, como $2g-2 = (q-2)(q+1)$, tenemos que $\nu_1(q-2) \geq q(q-2)$. Si $q > 2$, entonces $\nu_1 \geq q$ y luego $\nu_1 = q$. Para $q = 2$, también, obtenemos $\nu_1 = 2$ como sigue de la Equivalencia Lineal Fundamental [7, Corollary 1.2] (ver el siguiente párrafo).

Así, hemos calculado los órdenes y los órdenes de Frobenius para $\mathcal{D}$: $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 1, q)$ y $(\nu_0, \nu_1) = (0, q)$. (Esto significa que para un punto P que no es $\mathcal{D}$–Weierstrass tenemos que $(q+1)P_0 \sim qP + Fr_{\mathcal{X}}(P)$; de hecho, esto es un resultado general, y es esta relación a la que he llamado de *Equivalencia Lineal Fundamental*). Ahora usaremos estas informaciones para obtener una ecuación F_{q^2}-plana para $\mathcal{X}$.

Sean $m_1 < m_2$ las dos primeras no lagunas de Weierstrass positivas asociadas al punto P_0. Claramente $m_2 = q+1$ y afirmamos que $m_1 = q$. Para ver esto, usamos el hecho que 1 es un $(\mathcal{D}, P_0)$–orden, i.e. tenemos que $P_0 + D \sim (q+1)P_0$ con $P_0 \notin Supp(D)$ y sigue la afirmación.

Ahora, sean $x, y \in F_{q^2}(\mathcal{X})$, las funciones en $F_{q^2}(\mathcal{X})$, el campo de funciones racionales sobre F_{q^2} de $\mathcal{X}$ tales que $div_\infty(x) = qP_0$ y $div_\infty(y) = (q+1)P_0$. Sea $\pi = (1 : x : y)$ el morfismo sobre F_{q^2} asociado a $\mathcal{D}$. Luego, ya que $v_1 = q$, debemos tener

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x^{q^2} & y^{q^2} \\ 1 & x & y \\ 0 & 1 & Dy \end{pmatrix} = 0,$$

donde he considerado a x como la variable separante de $F_{q^2}(\mathcal{X}) \mid F_{q^2}$ y donde $D^i = D^i_x$ denota a la i-ésima derivada de Hasse respecto de x. Consecuentemente, tenemos una ecuación del tipo

$$(*) \qquad y^{q^2} - y = Dy\,(x^{q^2} - x),$$

la cual es muy similar a la ecuación que define la curva Hermitiana. Para ver esto, primero mostraremos que $f := Dy$ es una q–potencia en $F_{q^2}(\mathcal{X})$. Para esta finalidad, recurro a un viejo resultado de Hasse y Schmidt, [15, Satz 10], donde se prueba que f es una q–potencia en $F_{q^2}(\mathcal{X})$ si y sólo si $D^i f = 0$ para $i = 1, \ldots, q-1$. Mostraremos esta última propiedad por inducción sobre i. *Para* $i = 1$, calculamos $D^1 f$ de la Ecuación (*): tenemos $-f = (Df)(x^{q^2} - x) - f$ y luego $Df = 0$. Suponga que el resultado es verdadero para $1 \le i < q-1$. Aplicando D^{i+1} en la Ecuación (*) tenemos: $-D^{i+1}y = (D^{i+1}f)(x^{q^2} - x) - D^i f$ y luego por la inducción tenemos que $-D^{i+1}y = (D^{i+1}f)(x^{q^2} - x)$. Por otro lado, ya que $\varepsilon_2 = q$, se debe cumplir que

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & Dy \\ 0 & 0 & D^j y \end{pmatrix} = 0, \qquad \text{para } j = 2, \ldots, q-1,$$

y así $D^j y = 0$, $2 \leq j < q$. Entonces, $D^{i+1} f = 0$ y hemos probado que f es una q–potencia en $F_{q^2}(\mathcal{X})$, digamos que $f = x_1^q$. Luego, $div_\infty(x_1) = qP_0$ como sigue de (*) y así $x_1 = a + bx$, con $a, b \in F_{q^2}$, $b \neq 0$. Ahora la Ecuación (*) puede escribirse de la siguiente forma,

$$(by)^{q^2} - by = x_1^{q^2} - x_1,$$

o equivalente como

$$(y_1^q + y_1 - x_1^q)^q = y_1^q + y_1 - x_1^q,$$

con $y_1 := by$, y se concluye la prueba del Ejemplo 2.

Consecuentemente, el género g de una curva F_{q^2}–maximal satisface

$$g \leq g_2 := \left\lfloor (q-1)^2/4 \right\rfloor \text{ó} \quad g = g_1 := q(q-1)/2.$$

Así, es natural preguntarse por el caso $g = g_2$. Observe que a partir de este momento debemos considerar propiedades aritméticas sobre q. Si q es impar, entonces existe y es única (salvo F_{q^2}–isomorfismo) una curva F_{q^2}–maximal de género g_2, a saber el modelo no singular de la curva plana [7, Section 3]

$$y^q + y = x^{(q+1)/2}.$$

Si q es par, el modelo no singular de la curva

$$\sum_{i=1}^{t} y^{q/2^i} = x^{(q+1)}, \qquad q = 2^t,$$

es F_{q^2}–maximal con género g_2. El problema ahora es saber si esta curva es única. Este es el caso si la curva satisface una hipótesis sobre no lagunas de

Weierstrass en algún punto (F_{q^2}–racional) de la curva, ver [1]. Debo observar que es posible que semigrupos de Weierstrass en puntos racionales determinen curvas maximales no isomorfas a pesar de tener el mismo género. Por ejemplo, para $q \equiv 3$ (mod 4), tenemos por lo menos dos curvas de género $(q-1)(q-3)/8$ que no son isomorfas (y luego, no F_{q^2}–isomorfas), ver [4, Remark 4.1 (ii)]. Aquí falta determinar si existe o no una curva F_{q^2}–maximal no isomorfa a las anteriores con género $(q-1)(q-3)/8$.

En [9, Proposition 2.5], para q impar se observó, además, que

$$g \leq (q-1)(q-2)/4 \quad \text{si} \quad g < g_2 .$$

Luego, el tercer mayor género g_3 que una curva F_{q^2}–maximal puede tener (q impar) satisface $g_3 \leq (q-1)(q-2)/4$. Esta cota es la mejor posible para pequeños valores de q, ver [25, Section 4]. En general se conjetura que $g_3 = \lfloor (q^2 - q + 4)/6 \rfloor$, ver [6, Section 5].

Ejemplo 3. La curva Hermitiana $\mathcal{H}$ es no clásica (para la serie lineal canónica) y el conjunto de puntos de Weierstrass $\mathcal{W}_{\mathcal{H}}$ es igual al conjunto $\mathcal{H}(F_{q^2})$.

Observamos que curvas hermitianas de bajo género están entre los primeros ejemplos de curvas no clásicas, cf. el artículo de F.K. Schmidt [22]. El Ejemplo 3 fue observado por García y Viana [11, Theorem 2], y estos autores, también, calcularon $\mathcal{W}_{\mathcal{H}}$. Ellos realizaron estos cálculos usando diferenciales de primer orden. En este ejemplo mostraré que estos cálculos pueden ser también realizados a partir de la F_{q^2}–serie lineal $\mathcal{D} = |(q+10)P_0|$ asociado a la curva $\mathcal{H}$.

Demostración. Sea R el divisor de ramificación asociado a $\mathcal{D}$. Por el Ejemplo 1,

$$\deg(R) = \# \mathcal{H}(F_{q^2}),$$

y por lo tanto los $(\mathcal{D}, P)$– órdenes son:

1. $0, 1, q+1$ para $P \in \mathcal{H}(F_{q^2})$,
2. $0, 1, q$ para $P \notin \mathcal{H}(F_{q^2})$.

Además, ya que el género de $\mathcal{H}$ es $g = q(q-1)/2$, y q y $q+1$ son no lagunas de Weierstrass para P_0, el semigrupo de Weierstrass en P_0 será $<q, q+1>$. Por lo tanto $\mathcal{K} = |(2g-2)\, P_0|$ es la serie lineal canónica de $\mathcal{H}$. Como $(2g-2) = (q+1)(q-2)$, entonces $\mathcal{K} = (q-2)\, \mathcal{D}$ y el siguiente conjunto

$$\{a + b(q+1) : a,b \geq 0, a+b \leq q-2\} \qquad P \in \mathcal{H}(F_{q^2})$$

(respectivamente

$$\{a + bq : a,b \geq 0, a+b \leq q-2\} \qquad P \notin \mathcal{H}(F_{q^2})),$$

está contenido en el conjunto de $(\mathcal{K}, P)$–órdenes para $P \in \mathcal{H}(F_{q^2})$ (respectivamente $P \notin \mathcal{H}(F_{q^2})$). Como tenemos $q(q-1)/2$ elementos en cada uno de los conjuntos considerados, concluimos la igualdad entre los conjuntos anteriores. Así, $\mathcal{W}_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}(F_{q^2})$. Para deducir la no clasicidad de $\mathcal{H}$ es suficiente observar que q, que es menor que g, es un orden canónico. (De hecho, q es siempre un orden canónico para toda curva F_{q^2}–maximal de género suficientemente grande [7, Proposition 1.7]. Así, tales curvas serán no clásicas).

Desde un punto de vista informal y teniendo presente el lema de Castelnuovo para el género de curvas en espacios proyectivos, deducimos de estos ejemplos que una curva maximal de género grande está determinada por la propiedad (*) escrita en la demostración del Ejemplo 1. Para poder continuar con estas ideas es preciso utilizar la antes mencionada Equivalencia Lineal Fundamental.

Vale la pena mencionar que estas técnicas pueden ser aplicadas en un contexto mucho más amplio siempre que la función Zeta de la curva en cuestión satisfaga ciertas identidades, cf. [9, Section 1.3]. Por ejemplo, se puede probar la unicidad de la curva de Deligne-Lusztig S asociada al grupo de Suzuki $Sz\,(\ell\,)$, $\ell = 2\ell_0$, $\ell_0 = 2^a$, teniendo como hipótesis el género de S y $\#\, S\,(F_\ell)$; ver [9, Section 3]. Este resultado era conocido (ver Hansen y Pedersen [13, Pág. 100]) con hipótesis sobre el género de S, $\#\, S\,(F_\ell)$ y el grupo de F_ℓ–automorfismos de S. Esta curva S es interesante porque es $(F_\ell, \tilde{g}\,)$*–optimal,* i.e. S tiene el máximo número de puntos F_ℓ–racionales que una curva de género $\tilde{g}$ puede tener cf., el artículo de Hansen y Stichtenoth [14].

Bibliografía

[1] Abdón, M. and Torres, F. *On maximal curves in characteristic two.* Math., AG/9811091.

[2] Aubry, Y. and Perret, M. *A Weil theorem for singular curves, Arithmetic. Geometry and Coding - 4.* (Luminy 1993) (Eds. R. Pellikaan, M. Perret and S.G. Vlăduţ), Walter de Gryter - Berlin - New York, 1-7, 1996.

[3] Bach, E. *Weil bounds for singular curves.* AAECC **7**, 289-298, 1996.

[4] Cossidente, A., Hirschfeld, J.W.P., Korchmáros, G. and Torres, F. *On plane maximal curves.* Compositio Math., por ser publicado.

[5] Cossidente, A., Korchmáros, G. and Torres, F., *On curves covered by the Hermitian curve.* J. Algebra, por ser publicado.

[6] Cossidente, A., Korchmáros, G. and Torres, F. *On curves covered by the Hermitian curve, II.* Math. AG/9807166, sometido a publicación.

[7] Fuhrmann, R., García, A. and Torres, F. *On maximal curves.* J. Number Theory **67**(1), 29-51, 1997.

[8] Fuhrmann, R. and Torres, F. *The genus of curves over finite fields with many rational points.* Manuscripta Math. **89**, 103-106, 1996.

[9] Fuhrmann, R. and Torres, F. *On Weierstrass points and optimal curves.* Rend. Circ. Mat. Palermo Suppl. **51**, 25-46, 1998.

[10] García, A. and Torres, F. *On maximal curves having classical Weierstrass gaps.* Math. AG/9801106, sometido a publicación.

[11] García, A. and Viana, P. *Weierstrass points on certain non classical curves.* Arch. Math. **46**, 315-322, 1986.

[12] Goppa, V.D. *Algebraic-geometric codes.* Math. USRR-Izv. **21**(1), 75-91, 1983.

[13] Hansen, J.P. and Pedersen, J.P. *Automorphism group of Ree type, Deligne-Lusztig curves and function fields.* J reine angew. Math, **440**, 99-109, 1993.

[14] Hansen, J.P. and Stichtenoth, H. *Group codes on certain algebraic curves with many rational points.* AAECC **1**, 67-77, 1990.

[15] Hasse, H. and Schmidt, F. K. *Noch eine Begründung der Theorie der höheren Differentialquotienten in einem algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten.* J. reine angew Math. **177**, 215-237, 1937.

[16] Hirschfeld, J.W.P. *Projective Geometries Over Finite Fields.* Second edition, Oxford University Press, Oxford, 1998.

[17] Ihara, Y. *Some remarks on the number of rational points of algebraic curves over finite fields.* J. Fac. Sci. Tokio **28**, 721-724, 1981.

[18] Lachaud, G. *Sommes d'Eisenstein et nombre de points de certaines courbes algébriques sur les corps finis.* C.R. Acad. Sci. Paris, **305**, Série I, 729-732, 1987.

[19] Leep, D.B. and Yeomans, C.C. *The number of points on a singular curve over a finite field.* Arch Math. **63**, 420-426, 1994.

[20] Moreno, C.J. *Algebraic Curves over Finite Fields.* Cambridge University Press, Vol. 97, 1991.

[21] Rück, H.G. and Stichtenoth, H. *A characterization of Hermitian function fields over finite fields.* J. Reine Angew. Math. **457**, 185-188, 1994.

[22] Schmidt, F.K. *Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen II. Allgemeine Theorie der Weierstrasspunkte.* Math. Z. **45**, 75-96, 1939.

[23] Segre, B. *Introduction to Galois geometries.* (Edited by J.W.P. Hirschfeld, Atti Accad. Naz. Lincei Mem. **8**, 133-236, 1967.

[24] Stepanov, S.A. *Arithmetic of Algebraic Curves.* Consultants Bureau, New York and London, 1994.

[25] Serre, J.P. *Résumé des cours de 1983-1984.* Annu. College France **79-83** (1984); reprinted in Euvres **III**, 701-705.

[26] Stichtenoth, H. and Xing, C.P. *The genus of maximal function fields.* Manuscripta Math. **86**, 217-224, 1995.

[27] Stöhr, K.O. *On the poles of regular differentials of singular curves.* Bol. Soc. Bras. Mat. **24** (1), 105-136, 1993.

[28] Stöhr, K.O. and Voloch, J.F. *Weierstrass points and curves over finite fields.* Proc. London Math. Soc **52**, 1-19, 1986.

[29] Tsfasman, M.A. and Vlăduţ, S.G. *Algebraic-Geometric Codes.* Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1991.

[30] Weil, A. *Courbes algébriques et variétés abeliennes.* Hermann, Paris, 1971.

Fernando Torres
IMECC-UNICAMP, Cx. P. 6065,
CAMPINAS-13083-970-SP, BRAZIL
ftorres@ime.unicamp.br