

SUPERFICIES DE TRASLACIÓN CON CURVATURA GAUSSIANA CONSTANTE EN H^3

Javier Ordoñez Barrientos

Resumen

En este artículo describimos exhaustivamente las superficies de traslación con curvatura gaussiana intrínseca K constante en el espacio hiperbólico H^3 . Al igual que las superficies de traslación en el espacio euclidiano, que son los cilindros generalizados, estas superficies son generadas por curvas planas, pasando por cada punto de la curva generatriz una curva equidistante de la geodésica invariante que es ortogonal al plano totalmente geodésico que contiene la curva.

En el espacio euclidiano todas las superficies de este tipo poseen $K = 0$. En el espacio hiperbólico existe amplia variedad de superficies con $K \neq 0$ y, en general, para casi todos los valores de K no se obtienen superficies completas. Una excepción notable aparece cuando $-1 \leq K < 0$.

Indagamos también el comportamiento de estas superficies en el borde $\partial_\infty H^3$ y ofrecemos gráficos elaborados en computador para la mayoría de los ejemplos hallados.

1. Introducción

El espacio hiperbólico H^3 puede ser identificado con cualquiera de sus tres modelos habituales, en este trabajo, sobre todo por razones de visualización, utilizaremos el modelo del *semi-espacio*

$$H^3 = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3; z > 0 \}$$

en el que se considera la métrica $d\sigma^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$, y el modelo de

la bola $B^3 = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1 \}$ con la métrica

$$d\sigma^2 = 4 \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left[1 - (x^2 + y^2 + z^2) \right]^2}$$

(el otro modelo usual es el *hiperboloide*,

vea [S]).

El borde topológico del espacio hiperbólico en estos modelos, denotado, $\partial_\infty H^3$, se denomina *la frontera del infinito o borde asintótico*. En el caso específico del semi-espacio es el *plano del infinito* y en caso de la bola es *la esfera del infinito*. Estos modelos están relacionados por una isometría que transforma el punto $(0,0,1) \in H^3$ en el centro de la bola B^3 y el punto $\infty \in H^3$ en el punto $(1, 0, 0)$ de la bola.

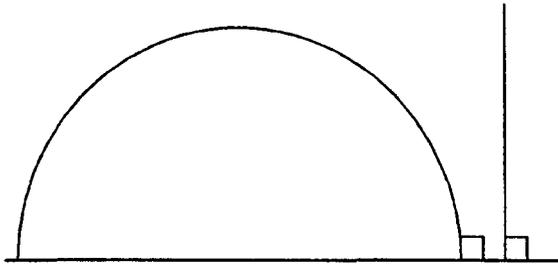


Figura 1: Geodésicas en el Modelo del Semi-espacio

Es conveniente recordar que en la geometría del espacio hiperbólico H^3 el papel de rectas o geodésicas, es decir las curvas que realizan la menor distancia entre dos puntos, es jugado por las semi-rectas (euclidianas) y semi-circunferencias contenidas en H^3 que interceptan ortogonalmente el borde del infinito. Además, los planos, o planos totalmente geodésicos, son realizados por los semi-planos (euclidianos) y semi-esferas contenidas en H^3 que inciden ortogonalmente en la frontera del infinito $\partial_\infty H^3$.

Por otro lado, las isometrías, o movimientos rígidos de H^3 son las transformaciones conformes de \mathbf{R}^3 y éstas a su vez se reducen a compuesta de homotecias, rotaciones, translaciones e inversiones (Teorema de Liuville [dC]).

Las homotecias del espacio euclidiano \mathbf{R}^3 que dejan invariante el semiespacio H^3 se pueden interpretar como movimientos de traslación en el espacio hiperbólico.

Para el estudio de las superficies de traslación en el espacio hiperbólico, consideraremos el grupo de isometrías a un parámetro que consiste en todas las translaciones que dejan invariante una determinada geodésica, grupo al que denominaremos un movimiento de traslación. Por ejemplo, en el modelo del semi-espacio, el grupo de translaciones que deja invariante la geodésica $x = y = 0, z > 0$ (la parte positiva del eje z) es descrito por la familia $T_t(P) = e^{\lambda t} P$. Para cada punto P , la curva $t \rightarrow T_t(P)$ es la órbita del punto P y, en este caso, resulta ser la *curva equidistante* (un hiper ciclo) de la geodésica que deja invariante el movimiento de traslación (figura 2).

Una *superficie de traslación* es una superficie S inmersa en H^3 que permanece invariante por un movimiento de traslación, es decir si $P \in S$ entonces $T_t(P) \in S$ para todo $t \in \mathbf{R}$, es decir todo el hiperciclo invariante pertenece a la superficie. Si \mathcal{P} es un plano (totalmente geodésico) ortogonal a la geodésica invariante, entonces la órbita de todo punto intercepta ortogonalmente este plano. Por esta razón la intersección de una superficie de traslación S con este plano es una curva, denominada *curva generatriz* de S , en una situación completamente similar a lo que sucede en el espacio

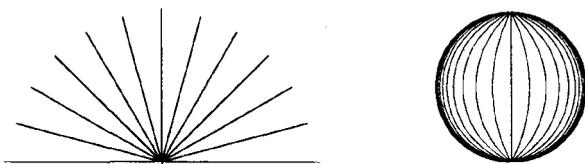


Figura 2: Órbitas del Movimiento de Traslación

euclidiano \mathbf{R}^3 . Por esta razón es muy fácil ofrecer ejemplos de superficies de traslación, basta fijar una geodésica γ y tomar cualquier curva sobre un plano totalmente geodésico ortogonal a γ y, en seguida, por cada punto de la curva, pasar una curva equidistante de γ . En el modelo del semi-espacio, cuando la geodésica invariante es un rayo vertical, las superficies de traslación son geoméricamente conos euclidianos con vértice en el *pie* de la geodésica. .

Para fijar las ideas asumiremos aquí que la geodésica invariante es la porción del eje z contenida en los modelos usados y que el plano totalmente geodésico es la semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0$ en el caso del semi-espacio, y el disco unitario $x^2 + y^2 < 1, z = 0$ en el caso del modelo de la bola. En el primer caso las curvas equidistantes, órbitas del movimiento de traslación, son los rayos (euclidianos) que emanan del punto $(0,0,0)$ y, en el segundo caso, los arcos de circunferencia contenidos en la bola y que pasan por los polos $(0,0,1)$ y $(0,0,-1)$.

2. Coordenadas Cilíndricas en H^3

Por razones de simetría y cálculo introduciremos en el espacio hiperbólico un sistema de coordenadas cilíndricas. Las coordenadas cilíndricas en H^3 consisten en una adaptación natural de las coordenadas cilíndricas de R^3 , y ofrecen ventajas notables para el estudio de las superficies de traslación (así como para las de rotación y helicoidales [O]) en relación a los sistemas cartesianos heredados del espacio euclidiano en el que se encuentran inmersos los modelos considerados.

Para definir el sistema de coordenadas cilíndricas en H^3 procedemos de la misma manera que en el espacio euclidiano. Fijamos en primer lugar una geodésica γ , en seguida consideremos como las superficies coordenadas de este sistema los cilindros circulares rectos que tienen como eje a γ (es decir, las *superficies equidistantes* de γ), los planos (totalmente geodésicos) que contienen la geodésica γ y todos los planos (totalmente geodésicos) que interceptan ortogonalmente a γ . Como *origen* O de este sistema de coordenadas puede tomarse cualquier punto de γ ; como por este punto pasa un plano \mathcal{P} ortogonal a γ , a este plano lo denominaremos *plano de órbitas* si γ coincide con la geodésica invariante del movimiento de traslación T_t .

De esta manera cada punto de H^3 queda caracterizado por una terna ordenada (ρ, θ, z) de números los cuales se determinan de la siguiente manera: ρ es la distancia de P a γ , θ es el ángulo que forma la proyección ortogonal (a lo largo de la curva equidistante de γ que pasa por P) P' de P sobre el plano \mathcal{P} con una dirección fija en este plano. Finalmente, z es exactamente la 'altura' de P con relación a \mathcal{P} , es decir, la distancia de P'' , proyección de P sobre γ , al plano \mathcal{P} .

La restricción de este sistema de coordenadas a los planos ortogonales a γ , en particular a \mathcal{P} , inducen en estos planos un sistema de *coordenadas polares hiperbólicas* (ρ, θ) .

Si hacemos coincidir el sistema "natural" de coordenadas cartesianas de los modelos considerados con un sistema de coordenadas cilíndricas en la que la geodésica γ coincide con la porción del eje z contenida en estos modelos y

el plano \mathcal{P} coincide, respectivamente, con la semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 < 1, z > 0$ en el caso del semi-espacio y con el disco unitario $x^2 + y^2 < 1, z = 0$ en el modelo de la bola, obtenemos las siguientes fórmulas que relacionan ambos sistemas de coordenadas.

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = e^z (\tanh \rho \cos \theta, \tanh \rho \sin \theta, \operatorname{sech} \rho) \text{ (semi-espacio)} \quad (1)$$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{\cosh z + \operatorname{sech} \rho} (\tanh \rho \cos \theta, \tanh \rho \sin \theta, \operatorname{senh} z) \text{ (bola)}. \quad (2)$$

Utilizando cualquiera de estas relaciones obtenemos que la métrica del espacio hiperbólico en las coordenadas cilíndricas se escribe:

$$d\sigma^2 = d\rho^2 + \operatorname{senh}^2 \rho d\theta^2 + \cosh^2 \rho dz^2. \quad (3)$$

En coordenadas cilíndricas, el movimiento de traslación a lo largo de la geodésica que es el eje de los cilindros coordenados admite la siguiente sencilla descripción explícita.

$$T_t(P) = (\rho, \theta, z + ht), \quad t \in \mathbf{R},$$

donde h es una constante, el *paso* de la traslación que, en lo que sigue, tomaremos $h = 1$.

3. Superficies de Traslación con Curvatura Gaussiana Constante

Fijemos una superficie de traslación S . Como toda órbita del movimiento de traslación intercepta ortogonalmente el plano $z = 0$, la intersección de S con este plano es la curva α , generatriz de esta superficie, y si esta curva admite la parametrización.

$$\alpha(s) = (\rho(s), \theta(s), 0),$$

entonces

$$X(s, t) = (\rho(s), \theta(s), t)$$

es una parametrización de la superficie de traslación S .

La restricción de la métrica (3) a S , $d\rho = \rho'(s)ds$, $d\theta = \theta'(s)ds$ y $dz = dt$ nos proporciona la primera forma fundamental de S que es dada, consecuentemente, por

$$d\sigma^2 = (\rho'^2 + \sinh^2 \rho \theta'^2) ds^2 + \cosh^2 \rho dt^2. \quad (4)$$

Podemos suponer que la curva generatriz está parametrizada por la longitud de arco, lo que significa asumir que

$$\rho'^2 + \sinh^2 \rho \theta'^2 = 1, \text{ de donde } \theta'^2 = \frac{1 - \rho'^2}{\sinh^2 \rho}. \quad (5)$$

Llamemos $U(s) = \cosh \rho(s)$. Con esta notación podemos escribir la primera forma fundamental de S (4) en la forma

$$d\sigma^2 = ds^2 + U^2(s) dt^2.$$

Ahora, derivando $U(s) = \cosh \rho(s)$ y elevando el resultado al cuadrado ($U = U(s)$, $\rho = \rho(s)$)

$$U'^2 = \sinh^2 \rho \rho'^2 = (U^2 - 1) \rho'^2 \text{ de donde } \rho' = \frac{U'^2}{U^2 - 1}.$$

Reemplazando $\rho'(s)$ obtenido así en la expresión para θ' de (5) obtenemos que

$$\theta'^2 = \frac{1 - \rho'^2}{\sinh^2 \rho} = \frac{1 - \frac{U'^2}{U^2 - 1}}{U^2 - 1} = \frac{U^2 - U'^2 - 1}{(U^2 - 1)^2}.$$

De este análisis podemos concluir el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Sea $U = U(s)$ una función positiva, entonces las igualdades*

$$\sinh \rho(s) = \sqrt{U^2 - 1} \quad (6)$$

$$\theta(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{U^2 - U'^2 - 1}}{U^2 - 1} ds \quad (7)$$

definen la parametrización, en coordenadas polares hiperbólicas, de una superficie de traslación en el espacio hiperbólico H^3 cuya primera forma fundamental es $d\sigma^2 = ds^2 + U^2(s) dt^2$.

Ahora es fácil establecer el siguiente resultado

Teorema 3.2 *La curvatura gaussiana intrínseca de la superficie de traslación definida por las igualdades (6) y (7) es dada por*

$$K = -\frac{U''}{U} \quad (8)$$

Demostración: La fórmula de la curvatura gaussiana intrínseca, en términos de los coeficientes E , F , y G de la primera forma fundamental de la superficie, cuando $F = 0$ se escribe :

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_t}{\sqrt{EG}} \right)_t + \left(\frac{G_s}{\sqrt{EG}} \right)_s \right\}.$$

Reemplazando $E = 1$, $G = U^2$ en esta expresión obtenemos (8).

La expresión (8) de la curvatura gaussiana de S puede escribirse en la forma de una ecuación diferencial ordinaria.

$$U'' + KU = 0 \quad (9)$$

donde U es la función incógnita. Esta ecuación puede resolverse completamente en el caso en que K sea tomado constante, permitiendo de esta manera determinar todas las superficies de traslación en el espacio hiperbólico H^3 con curvatura gaussiana constante.

Para resolver la ecuación (9) en el caso en que K sea constante debemos considerar separadamente los casos $K < 0$, $K = 0$ y $K > 0$. Veremos después que debemos considerar todavía subcasos cuando $K < 0$.

A diferencia del espacio euclidiano en donde todas las superficies de traslación poseen $K = 0$, en el espacio hiperbólico encontramos superficies de traslación para todos los valores de K . En general, estas superficies no son completas, sin embargo, obtendremos interesantes ejemplos de superficies completas cuando el valor de la curvatura varía en el intervalo $-1 \leq K < 0$.

Cuando $K = 0$, una base de soluciones para (9) es conformada por la función constante 1 y la función identidad s , siendo que la solución general es dada por $U(s) = as + b$ donde a y b son constantes.

En el caso en que $K > 0$, una base de soluciones para (9) es dada por las funciones $\cos\sqrt{K}s$ y $\sin\sqrt{K}s$.

Si $K < 0$, una base de soluciones para la ecuación (9) es dada por las funciones $\cosh\sqrt{-K}s$ y $\sinh\sqrt{-K}s$.

Por razones geométricas U debe ser una función positiva que eventualmente puede anularse en algún conjunto discreto de puntos. Esta última situación determinará, junto con las restricciones impuestas por la presencia de los radicales en las expresiones (6) y (7) que definen la parametrización de estas superficies, la naturaleza geométrica de las mismas, es decir aspectos relativos a su regularidad así como su completitud.

Para analizar el comportamiento de las superficies de traslación en el infinito, es útil la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *Sea $(\rho(s), \theta(s))$ la curva generatriz de una superficie de traslación definida por las expresiones (6) y (7). Entonces, el ángulo ϑ que forma esta curva con las geodésicas radiales, es dado por*

$$\cos^2 \vartheta = \frac{U'^2}{U^2 - 1}. \quad (10)$$

Demostración: En este caso el vector tangente a la curva es $r' \frac{\partial}{\partial \rho} + \theta' \frac{\partial}{\partial \theta}$ y el vector tangente a las geodésicas radiales $\frac{\partial}{\partial \rho}$. Como ambas curvas están parametrizadas por la longitud de arco, utilizando la métrica (3), se

tiene que $\cos\vartheta = \rho'$. Utilizando ahora la expresión para ρ' , en términos de U hallada anteriormente, concluimos la demostración.

En seguida pasaremos a examinar detenidamente las parametrizaciones (6) y (7) cuando $U(s)$ es una de las soluciones de la ecuación (9). Luego, realizaremos una descripción exhaustiva de cada una de las superficies de traslación con curvatura gaussiana constante halladas de esta manera. Los gráficos de curvas y superficies son mostrados en el modelo de la bola, por razones de simetría. En el caso de las curvas generatrices mostramos también el contorno del disco hiperbólico que contiene estas curvas. Para trazar estas gráficas hemos utilizado la relación (2).

3.1 Superficies de Traslación con $K = 0$

Analizaremos separadamente los casos $K = 0$, $K > 0$ y $K < 0$. Comenzamos con el caso $K = 0$.

3.1.1

Tomemos en primer lugar la solución $U(s) = a$ con a constante. Como

$$U^2 - U'^2 - 1 = a^2 - 1,$$

en este caso las fórmulas (6) y (7) quedan

$$\begin{aligned} \sinh \rho(s) &= \sqrt{a^2 - 1}, \\ \theta(s) &= \int_0^s \frac{\sqrt{a^2 - 1} ds}{a^2 - 1} = \frac{s}{\sqrt{a^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Es evidente que el valor del parámetro a debe ser $a > 1$. También observamos que el radio es $\rho(s) = \text{constante}$, por lo tanto la curva generatriz es una circunferencia centrada en el origen y consecuentemente concluimos que la superficie de traslación generada por esta curva es un cilindro. Esta superficie es claramente completa (figura 3).

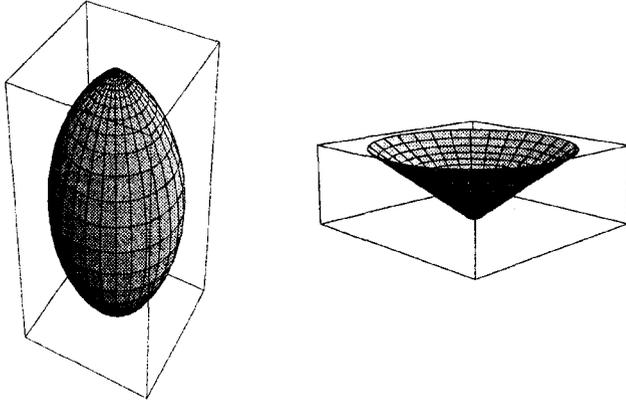


Figura 3: Cilindro con $a = 2$ en ambos modelos de H^3

3.1.2

Consideremos ahora el caso en que $U(s) = as$ con a una constante. Calculemos

$$U^2 - U'^2 - 1 = a^2 s^2 - a^2 - 1 \geq 0,$$

esto implica que (6) y (7) toman la forma

$$\sinh \rho(s) = \sqrt{a^2 s^2 - 1},$$

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s \frac{\sqrt{a^2 s^2 - a^2 - 1}}{a^2 s^2 - 1} ds.$$

Las siguientes observaciones describen la geometría de estas curvas generatrices (figura 4).

1. El parámetro a puede ser cualquier $a > 0$.

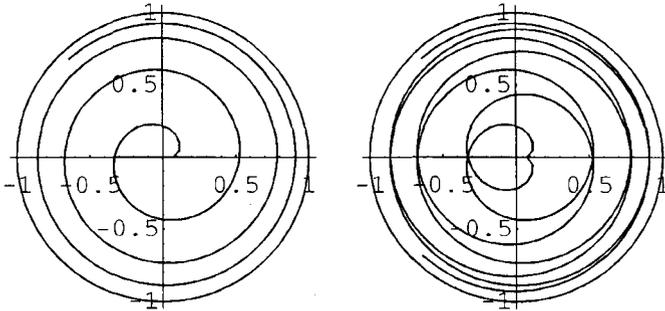


Figura 4: Curvas generatrices donde $K = 0$, $a = 1$

2. Del radicando bajo el signo de integral deducimos la siguiente restricción para s : $s^2 \geq \frac{1+a^2}{a^2} = s_0$. Luego las superficies obtenidas no son completas y constan de dos componentes conexas.
3. Se verifica fácilmente que $\lim_{s \rightarrow \infty} \rho(s) = \infty$, $\lim_{s \rightarrow \infty} \theta = \infty$ y que $\theta'(s) > 0$. Esto implica que las curvas son ilimitadas y se aproximan asintóticamente al borde del infinito. Esta última afirmación será confirmada en la proposición (3.2). Como $\rho(s)$ y $\theta(s)$ son monótonas, cada componente conexas de la curva no posee auto-intersecciones.
4. Las curvas son simétricas con relación a la geodésica radial $\theta = 0$ debido a que la función $\rho(s)$ es par y la función $\theta(s)$ es impar.

3.2 Superficies de Traslación con $K > 0$

En este caso tenemos que una base de soluciones es dada por $\cos\sqrt{K}s$ y $\sin\sqrt{K}s$. Como $\sin\sqrt{K}s = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{K}s\right)$, basta analizar el caso en que $U(s) = a \cos\sqrt{K}s$. Tenemos así que

$U^2 - U'^2 - 1 = a^2 \cos^2 \sqrt{K}s - a^2 K \sin^2 \sqrt{K}s - 1 = a^2 (1+K) \cos^2 \sqrt{K}s - a^2 K - 1$,
de donde la parametrización explícita para las curvas generatrices de estas superficies, de acuerdo con (6) y (7) es

$$\sinh \rho(s) = \sqrt{a^2 \cos^2 \sqrt{K}s - 1},$$

$$\theta(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{a^2 (1+K) \cos^2 \sqrt{K}s - a^2 K - 1}}{a^2 \cos^2 \sqrt{K}s - 1} ds.$$

Las siguientes observaciones describen la geometría de estas curvas (figura 5).

1. De la expresión del radio $\rho(s)$ vemos que debe ser $a > 1$, como el valor mínimo de la función \cos^2 es cero, vemos que ninguna de estas superficies es completa. Además, como se trata de una función periódica la superficie consta de una infinidad de componentes conexas.

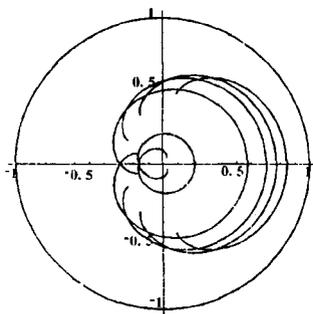


Figura 5: Curvas generatrices para $K = 0.2$, $a = 1, 2, 3, 6$

2. Para una componente conexa el valor de s está restringido al intervalo $[-r, r]$ donde $r = \frac{1}{\sqrt{K}} \arccos \sqrt{\frac{a^2 K + 1}{a^2 (K + 1)}}$.
3. Las componentes conexas son simétricas con relación a una geodésica radial.

4. Debido a la periodicidad del radio, la superficie es *cilíndricamente limitada*, es decir contenida en un anillo sólido cuyo eje es la geodésica γ .

3.3 Superficies de Traslación con $K < 0$

Consideremos ahora el caso en que la curvatura es $K < 0$. Como ya observamos, una base de soluciones de la ecuación (9) está constituida en este caso por las funciones $\sinh\sqrt{-K}s$ y $\cosh\sqrt{-K}s$.

3.3.1

En primer lugar tomemos la solución $U(s) = a \sinh \sqrt{-K}s$. Entonces $a^2 \sinh^2 \sqrt{-K}s + a^2 K \cosh^2 \sqrt{-K}s - 1 = a^2 (1 + K) \sinh^2 \sqrt{-K}s + a^2 K - 1$.

La parametrización explícita de las curvas generatrices de estas superficies es, por tanto, la siguiente:

$$\begin{aligned} \sinh \rho(s) &= \sqrt{a^2 \sinh^2 \sqrt{-K}s - 1}, \\ \theta(s) &= \int_{\pm r}^s \frac{\sqrt{a^2(1+K) \sinh^2 \sqrt{-K}s + a^2 K - 1}}{a^2 \sinh^2 \sqrt{-K}s - 1} ds. \end{aligned}$$

En las observaciones que siguen describimos la geometría de estas curvas (figura 6).

1. Observe que, cuando $K \leq -1$, el radicando bajo el signo de la integral es negativo, luego, para estos valores de la curvatura, esta parametrización no define ninguna superficie de translación con K constante ($K \leq -1$).

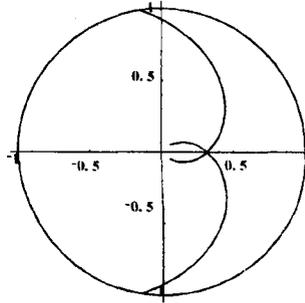


Figura 6: Curvas generatrices para $K = -0.2$, $a = 1$

2. Para $-1 < K < 0$ sí obtenemos superficies y debe ser $a > 0$ y s

bajo la restricción $s^2 \geq r$, donde $r = \frac{1}{\sqrt{-K}} \sqrt{\operatorname{arcsenh} \frac{1-a^2 K}{a^2 (1+K)}}$,

por esta razón tampoco estas superficies son completas y constan de dos componentes conexas.

3. Las funciones $\rho(s)$ y $\theta(s)$ son monótonas crecientes, la primera ilimitada. Por esta razón cada componente conexas no posee auto-intersecciones y veremos en la proposición (3.2) que inciden en el borde del infinito bajo un ángulo ϑ_∞ que satisface

$$\cos \vartheta_\infty = \sqrt{-K}.$$

De aquí se deduce que el borde asintótico de estas curvas consta de dos puntos.

4. Las curvas son simétricas con relación a una geodésica radial.

3.3.2

Tomemos ahora la solución $U(s) = a \cosh \sqrt{-K} s$. Entonces

$$a^2 \cosh^2 \sqrt{-K} s + a^2 K \sinh^2 \sqrt{-K} s - 1 = a^2 (1+K) \cosh^2 \sqrt{-K} s - a^2 K - 1.$$

La parametrización explícita de las curvas generatrices es la siguiente:

$$\sinh \rho(s) = \sqrt{a^2 \cosh^2 \sqrt{-K}s - 1},$$

$$\theta(s) = \int_r^s \frac{\sqrt{a^2 (1+K) \cosh^2 \sqrt{-K}s - a^2 K - 1}}{a^2 \cosh^2 \sqrt{-K}s - 1} ds.$$

Registremos las siguientes observaciones respecto de estas curvas (figuras 7 y 8).

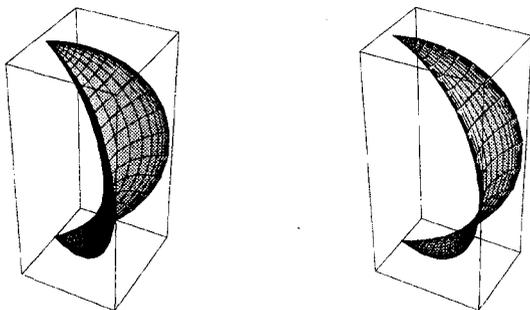


Figura 7: Superficies completas con $K = -1$ y $K = -0.5$.

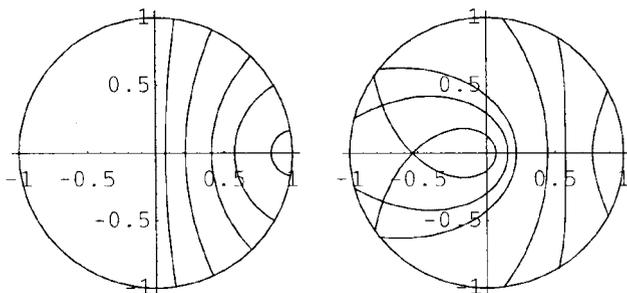


Figura 8: Generatrices de superficies completas con $K = -1$ y $K = -0.5$.

1. Note que el radicando bajo el signo integral es una expresión de la forma $\alpha + \beta \cosh^2 \delta s$, que será no negativa para todo $s \in \mathbf{R}$ si $\beta \geq 0$ y $\alpha + \beta \geq 0$, ya que éste es el valor mínimo de esta función. Observemos que este caso se presenta efectivamente cuando $a \geq 1$ y $-1 \leq K < 0$, pues, en este caso, esta función tiene su mínimo igual a $a^2(1+K) - a^2K - 1 = a^2 - 1 \geq 0$. Consecuentemente en este caso obtenemos curvas definidas para todo valor real s y, por tanto, las superficies generadas serán completas. Observe también que, cuando $a = 1$ y $K = -1$, obtenemos un ejemplar del plano hiperbólico H^2 .
2. En el caso en que $K < -1$ obtenemos superficies que no son completas definidas en el intervalo $[-r, r]$, donde

$$r = \frac{1}{\sqrt{-K}} \sqrt{\operatorname{arccosh} \frac{1+a^2K}{a^2(1+K)}}.$$

3. Las curvas son simétricas con relación a una geodésica radial.
4. En el caso completo, $-1 \leq K < 0$ las curvas inciden bajo el ángulo ϑ_∞ , $\cos \vartheta_\infty = \sqrt{-K}$ en el borde del infinito. Por ejemplo cuando $K = -1$ esta incidencia es ortogonal.
5. Seleccionando adecuadamente el parámetro a se obtienen curvas, y por lo tanto, superficies sin auto-intersecciones.

3.3.3

Finalmente consideremos, por razones geométricas, el caso en que la solución de (9) sea $U(s) = ae^{\sqrt{-K}s}$.

Entonces

$$a^2 e^{2\sqrt{-K}s} + a^2 K e^{2\sqrt{-K}s} - 1 = a^2(1+K)e^{2\sqrt{-K}s} - 1.$$

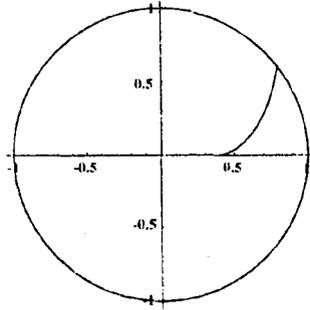


Figura 9

La parametrización de las curvas generatrices es la siguiente:

$$\sinh \rho(s) = \sqrt{a^2 e^{2\sqrt{-K}s} - 1},$$

$$\theta(s) = \int_r^s \frac{\sqrt{a^2(1+K)e^{2\sqrt{-K}s} - 1}}{a^2 e^{2\sqrt{-K}s} - 1} ds.$$

Observemos nuevamente que, cuando $K \leq -1$, no existen superficies definidas por esta parametrización con estos valores de la curvatura. Si $-1 < K < 0$, obtenemos superficies no completas ya que s está definido en el

intervalo $\left[\frac{1}{2\sqrt{-K}} \log \frac{1}{a^2(1+K)}, \infty \right)$ (figura 9).

Terminamos con la siguiente proposición

Proposición 3.2. *Las superficies de traslación con curvatura gaussiana constante, definidas por las parametrizaciones anteriores, poseen el siguiente comportamiento asintótico.*

1. En el caso (3.1.2) la superficie posee $K = 0$ y es asintótica al plano del infinito

2. En el caso de las superficies con $-1 \leq K < 0$, estudiadas en (3.3.1), (3.3.2) y (3.3.3), estas superficies interceptan el borde del infinito $\partial_\infty H^3$ bajo un ángulo constante ϑ_∞ dado por

$$\cos \vartheta_\infty = \sqrt{-K}.$$

Demostración: Basta utilizar la fórmula hallada en la proposición (3.1) y substituir en ella el valor de la función $U(s)$ correspondiente y, en seguida, hacer $s \rightarrow \infty$. Por ejemplo, en el caso de la superficie de (3.3.2), donde $U(s) = \cosh \sqrt{-K}$, se tiene que

$$\cos^2 \vartheta_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{-K}^2 \sinh^2 \sqrt{-K} s}{\cosh^2 \sqrt{-K} s - 1} = -K.$$

4. Bibliografía

- [dC] Carmo, M.P. do. *Geometría Riemanniana*, IMPA, Projeto Euclides, Río de Janeiro, 1979.
- [O] Ordoñez B., J. *Superfícies Helicoidais com Curvatura Constante no Espaço de Formas Tridimensional*, Tese de Doutorado, PUC-Río de Janeiro, 1995.
- [S] Spivak, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Boston, Mass. Publish or Perish, 1970 - 1975, vol.4.

Javier Ordoñez Barrientos
Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa
Departamento de Matemática y Estadística