

# ONDÍCULAS: UN MODELO DE ENSEÑANZA EN MATEMÁTICA

*(Reflexiones sobre la Enseñanza de la Matemática)*

*Alejandro Ortiz*

## ***Introducción***

*En este escrito pretendemos dar algunas ideas sobre como enseñar un tema de actualidad, el que se ubica dentro del análisis armónico y que tiene importantes aplicaciones en diversos sectores de la matemática, de la electrónica; en general, sus aplicaciones se están extendiendo significativamente en la actual tecnología con proyecciones expectantes. Se trata de la **teoría de Ondículas** (“**Wavelets**” u “**Ondalettes**”). Así, este intento podría justificarse con la idea de hacer llegar, en forma rápida y motivada, los fundamentos de las ondículas a jóvenes de nivel universitario y en general a personas (como físicos, ingenieros, médicos...) que posean prerequisites mínimos.*

Siempre hemos pensado que, al margen de otras consideraciones, el problema de la enseñanza de las matemáticas es un problema de comunicación entre quien enseña y quien aprende. Esta comunicación debe darse previo reconocimiento del ámbito a trabajar; en esta acción entran en juego la formación matemática del profesor, la pedagógica y la psicológica (aún cuando estos últimos requisitos puedan, en algunos casos, ser obtenidos en la “*experiencia de enseñar*”). Es sabido que no es suficiente tener una gran formación matemática en lo que explica; es necesario llegar al oyente, motivarlo, entusiasmarlo, que descubra su propia potencialidad matemática. En esta orientación los Diez Mandamientos de Polya son importantes conocerlos y reflexionarlos.

Enseñar matemática es una combinación de tales requisitos, a los que habría que agregar una buena dosis de buen gusto de quien enseña, de alegría en enseñar; de la entrega del profesor y la positiva respuesta del alumno. Para no caer en idealismos, somos concientes que todos estos aspectos son un tanto difíciles de ser alcanzados. En países, como es el caso del Perú, en donde existen diversos problemas esenciales en el aspecto salarial del profesor, en su reconocimiento profesional, en fin, de otros tantos problemas, el enseñar es una tarea difícil, al menos en colegios y universidades estatales. Esto es otro tema a ser discutido en otra oportunidad.

## **2. Algunas Reflexiones**

Con frecuencia uno escucha opiniones, casi generalizadas, de que la matemática es difícil de ser aprendida. Como toda cosa que se aprende, las dificultades están presentes. Pero, seguramente muchas de esas opiniones provienen de personas que tuvieron experiencias frustrantes en sus épocas de estudiantes. No se trata de que todos los alumnos de una clase tengan un rendimiento máximo pues la vocación es también una realidad. Se trata que al menos para aquellos que tengan poca afición o condiciones para la matemática, no tengan experiencias negativas y distorsionadas, las que a veces son transmitidas a los descendientes de tales personas. En esta acción se pone a prueba la capacidad del profesor como orientador y consejero ante las dificultades de un curso de matemática, las que no deberían afectar la visión de futuro de los jóvenes. Por otro lado, y esto es tan lamentable como lo otro, a veces jóvenes con buenas condiciones para la matemática se pierden por falta de una guía oportuna y estímulos necesarios.

El proceso de enseñanza - aprendizaje dispone actualmente de una serie de materiales que pueden servir muy bien para optimizar la enseñanza y el aprendizaje de los alumnos. En matemática aún sigo creyendo en la tiza - pizarra para ciertos aspectos de una lección. Existen temas, como es precisamente el tema objetivo de esta exposición, las ondículas, en donde ya no es suficiente tales instrumentos. Los gráficos de las ondículas, sobre la recta, son curvas y sus transformadas son superficies de naturalezas difíciles o imposibles de graficarse con recursos tradicionales. Necesitamos de la computadora. Un salón de clases debería disponer de forma permanente de una buena pizarra, de proyectores de slides, retroproyectores de láminas compatibles con la computadora. En forma alternada el profesor puede hacer uso de tales instrumentos en donde se podría agregar equipos para pasar videos. Retomo nuevamente la realidad educativa de nuestros países, cuyas estructuras educativas-profesionales son económicamente pobres. Sin embargo, lo descrito ya es una realidad en muchos países.

Vivimos una época de grandes cambios tecnológicos y científicos. Una etapa de acelerados avances que podrían dejar casi obsoleto algunas tecnologías de pocos años atrás. Entonces, ¿cómo enfocar una educación científica, y matemática, para jóvenes que se desarrollarán profesionalmente en estas circunstancias? Pertenece a una época en que las fronteras tradicionales de muchas disciplinas están desapareciendo, aún fronteras de áreas de la matemática. El asunto es complejo, pues mientras países como el nuestro se debaten en solucionar sus problemas económicos y de estabilidad social (perturbados por factores que atentan substancialmente la tranquilidad requerida para ejecutar programas integrales de reforma educativa), la tecnología avanza rápidamente soportada por una matemática que también avanza en forma acelerada, como es el caso de las ondículas. El proceso de cambio debe ser atacado, de ser posible por todos sus lados; entre otros, la formación sólida de grupos de profesionales matemáticos con los requisitos mencionados anteriormente. En esta tarea las universidades tienen retos que enfrentar, lo que es deseable hacer con el respaldo de un programa educativo por parte del gobierno.

Vía la evolución histórica y matemática de las ondículas trataremos de motivar un proceso que partiendo de ideas clásicas del análisis se ha llegado a niveles matemáticos que permiten aplicaciones variadas de gran expectativa en el futuro. Buscamos con ello dar un modelo de enfoque de un tema actual y su posibilidad de ser enseñado (en sus aspectos básicos) en el pregrado universitario. La investigación matemática original es una meta en

nuestras universidades peruanas; aún no hemos llegado a que ella sea una ocupación principal entre los docentes, o al menos en la gran mayoría de ellos. Alcanzarla será un proceso que habría que comenzar ya con seleccionados jóvenes del pre y posgrado a nivel de maestría pues el doctorado en matemática no existe en el Perú. Es cierto que un regular número de egresados de Lima y muy pocos de provincias, ha obtenido el doctorado. Algunos no han retornado al país y los que regresaron, en general no tienen el trato que les permitan continuar con sus estudios de investigación con la dedicación deseable. En esta orientación pretendemos formar un grupo de interesados en estudiar las ondículas en los mejores niveles posibles y que les permitan hacer trabajos multidisciplinarios.

### 3. Las Ondículas : Motivaciones Históricas

La enseñanza de la Matemática puede motivarse significativamente con una adecuada dosis de aspectos históricos que permita una mejor comprensión de las ideas fundamentales, las que a través de los años han ido gestando nuevas ideas. Tal es el caso de las ondículas. Según el Prof. Y. Meyer, existen al menos 16 caminos que han conducido a la idea de ondícula, las que en general son de distintas naturalezas. Comenzamos con el camino del análisis de Fourier el que tiene sus inicios a comienzos del siglo pasado (1807) cuando el físico-matemático francés Joseph Fourier afirma que toda función  $f$ ,  $2\pi$ -periódica, puede ser representada por una serie trigonométrica. Mas concretamente,

$$f(t) = a_0 + \sum_1^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sen kt) \quad (1)$$

donde los coeficientes (de Fourier)  $a_0$ ,  $a_k$  y  $b_k$  son los productos internos

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \quad , \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sen kt dt \quad (2)$$

y donde, en general, el producto interno es

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) dt.$$

La serie (1) es equivalente a la serie

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikt} \quad (3)$$

donde 
$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt \quad (4)$$

La representación (1) nos dice que  $f$  es descompuesta como una suma de infinitas **ondas** de la forma.

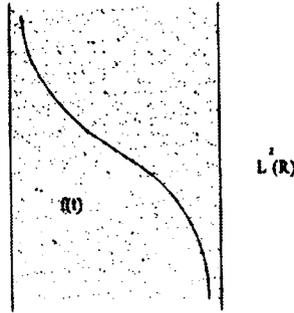


Observemos que estas ondas no decrecen en el infinito, esto es, no son “onditas” (u “ondículas”). Si perturbamos la onda en un punto cualquiera, esta perturbación afectará a  $f$ .

Ahora observemos al elemento “básico”  $e^{ikt}$  en (4), el que podemos escribir más sugestivamente así:  $(e^{it})^k$ .

¿Qué observamos?; que existe un elemento generador de la familia  $\{e^{ikt}\} k \in Z$ : la función  $e^{it}$ . Podríamos pensar que  $e^{ikt}$  es una “dilatación” de  $e^{it}$ . Dilatación es una acción a considerar cuando hablemos de las ondículas. remarcamos que  $e^{it}$  no es una ondícula pues no converge a cero en el infinito.

Hagamos ahora el siguiente argumento. Supongamos que  $f$  es una señal que recibimos y deseamos analizar. La teoría de Fourier considera la transformada de Fourier de  $f$ , que (caso discreto) es dada en nuestro caso por el producto interno (4). Por otro lado, es conveniente ubicar las señales (o funciones)  $f(t)$  en un cierto universo o espacio, el que teniendo ciertas propiedades permita trabajar con consistencia matemática. Por razones históricas (y matemáticas) consideramos el espacio  $L^2(\mathbb{R})$ .



Sin entrar en mayores detalles analíticos diremos que

$$L^2(R) = \left\{ f / \int |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

En matemática aplicada se dice que la señal  $f$  es de energía finita si  $f \in L^2(R)$ . Así mismo,  $f \in L^2$  es llamada de banda limitada si su transformada de Fourier

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itw} f(t) dt \quad (5)$$

tiene la propiedad :  $\hat{f}(w) = 0$  fuera de un intervalo  $[-N, N]$ , esto es, si  $|w| > N$  ( $\hat{f}$  tiene soporte compacto  $[-N, N]$ ). En particular tomemos  $N = \pi$ .

Tenemos:

$$\hat{f}(w) = \sum c_k e^{-ikw}, \text{ donde } c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikw} \hat{f}(w) dw$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikw} \hat{f}(w) dw = \text{(fórmula de la antitransformada de$$

Fourier)}

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(k). \text{ Por tanto,}$$

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itk} \hat{f}(w) dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{itk} \sum c_k e^{-ikw} dw \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum c_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-k)w} dw = \sum f(k) \frac{\text{Sen } \pi(t-k)}{\pi(t-k)}
 \end{aligned}$$

esto es 
$$f(t) = \sum f(k) \frac{\text{Sen } \pi(t-k)}{\pi(t-k)} \quad (6)$$

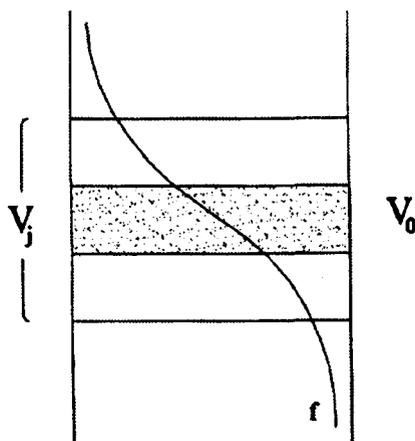
En estos informales argumentos matemáticos existen interesantes ideas por rescatar, las que están en relación con lo que veremos en la teoría de ondículas. (6) es llamada la **representación muestreo de Shannon**, la que nos permite recuperar la función de banda limitada  $f$  conociéndola sobre los números enteros.

Observemos que tal representación se realiza usándose la familia de elementos básicos  $\left\{ \frac{\text{Sen } \pi(t-k)}{\pi(t-k)} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ .

Esto sugiere que podríamos considerar el espacio generado por tal familia; así, sea el espacio (cerrado)

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \left\{ f(t) / f(t) = \sum f(k) \frac{\text{Sen } \pi(t-k)}{\pi(t-k)} \right\} \\
 &= \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) / \hat{f}(w) = 0, |w| > \pi \right\}.
 \end{aligned}$$

Teniéndose  $V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$ , ¿será posible construirse otros subespacios cerrados (de  $L^2(\mathbb{R})$ )  $V_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ ? ..... Esta ruta nos conduce al llamado **Análisis Multiresolución**, idea muy importante en la teoría de Ondículas y que fue introducida por Stéphane Mallat a mediados de los años 80's (muy joven entonces); tal idea fue desarrollada y aplicada por Mallat, Meyer y otros, Nótese que en (6) estamos usando translaciones; el paso hacia los espacios  $V_j$ s será agregando una operación más: una dilatación del tipo  $2^j$ . Así tendríamos el gráfico:



La figura nos sugiere algunas ideas. Por ejemplo, pensemos (¡asumimos la libertad de pensar cosas!) que el gráfico es un corte de una piscina llena de agua, cuyas paredes están marcadas en zonas correspondientes a números de la forma:

$$\dots, 2^{-j}, \dots, 2^{-2}, 2^{-1}, 1, 2, 2^2, \dots, 2^j, \dots$$

Si introdujéramos a un gigante  $f$  en la piscina podríamos “ver” que su cuerpo queda dividido en trozos  $f_j$ , correspondientes a los espacios  $V_j$ , unos contenidos en otros ( $V_j \subset V_{j+1}$ ). La idea intuitiva es que si  $j \rightarrow +\infty$ , la unión de tales trozos recupera al gigante. Si  $j \rightarrow -\infty$ , la idea intuitiva es más forzada; la sensación que sentimos es que llegamos a un  $V_j$  reducido a una “raya”; en realidad se llega al elemento cero (o neutro) del espacio  $L^2(\mathbb{R})$ . El trozo correspondiente a  $V_0$  lo denotamos con  $f_0$  y el correspondiente a  $V_j$  con  $f_j$ .

$f_j$  es la **proyección** de  $f$  sobre  $V_j$ .

Remarcamos que en cada  $V_j$  estamos considerando translaciones y dilataciones. Precisemos esto. Pongamos

$$\phi(t) = \frac{\text{Sen } \pi t}{\pi t}$$

Entonces  $V_0$  es generado por la familia  $\{\phi(t-k)\}$ ,  $k \in Z$  y  $V_j$  por la familia  $\{\phi_{jk}(t)\}$ ,  $j, k \in Z$ , donde

$$\phi_{jk}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k)$$

(No nos preocupemos por el coeficiente  $2^{j/2}$ , el que es colocado por conveniencia).

Hagamos el siguiente argumento; para todo  $k \in Z$ ,  $k \neq 0$ ,

$$\langle \phi(t), \phi(t-k) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi(t-k) dt = \text{(usando Parseval :}$$

$\int g(t) h(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int \hat{g}(w) \hat{h}(w) dw$  y la transformada de Fourier de una translaci3n)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(w) \overline{\hat{\phi}(w)} e^{iwk} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{\phi}(w) \right|^2 e^{iwk} dw = \text{(banda limitada, asumimos}$$

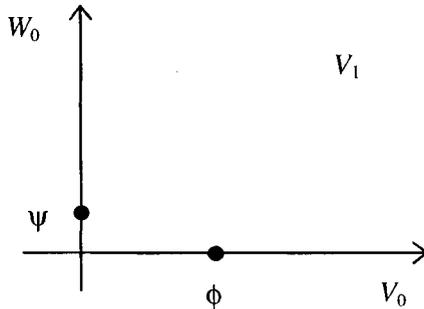
$$\hat{\phi}(w) = \begin{cases} 1 \dots & -\pi \leq w < \pi \\ 0 \dots & \text{Complemento} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwk} dw = \frac{\text{Sen } \pi k}{\pi k} = 0 \quad \text{(puesto que } k \neq 0\text{)}.$$

Al margen del argumento matemático dado rescataremos que  $\langle \phi(t), \phi(t-k) \rangle = 0$  si  $k \neq 0$ , es decir,  $\phi(t)$  es ortogonal a  $\phi(t-k)$  para todo  $k$  no nulo. Esto nos dice que  $\{\phi(t-k)\}$ ,  $k \in Z$ , es una base ortogonal para  $V_0$ .

Vía este ejemplo estamos cerca de conocer la construcción de la ondícula  $\psi$  en términos de la función “escala”  $\phi$ . La idea es simple por lo que la presentamos. Hemos dicho que  $V_0 \subset V_1$ ,  $V_0$  es un subespacio cerrado de  $V_1$ . Por tanto podemos considerar el complemento ortogonal  $W_0$  de  $V_0$  con respecto a  $V_1$ . Así,  $V_1 = V_0 \oplus W_0$ . La construcción es

$$\psi(t) = 2\phi(2t) - \phi(t)$$



Se verifica que  $\psi \in W_0$ , esto es:  $\psi \in V_1$  y es ortogonal a  $V_0$ , por tanto  $\psi$  es ortogonal a  $\phi$ .

Retornemos a las representaciones  $f(t) = \sum c_k e^{-ikt}$  y

$$f(t) = \sum f(k) \frac{\text{Sen } \pi(t-k)}{\pi(t-k)}$$

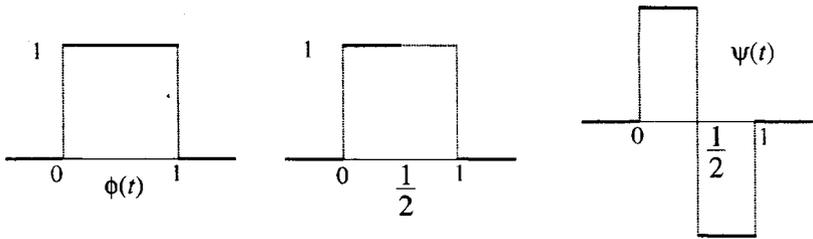
La idea común es el de usar una función básica para **construir una base** en término de la cual tenemos la representación de un elemento cualquiera del espacio ¿Es siempre posible obtener tales representaciones para  $f$  arbitraria? La respuesta involucra un proceso histórico interesante, lo que ha de conducir a las ondículas. La afirmación de Fourier de que toda función periódica puede ser representada por la serie (3) fue audaz y profunda para su época. Es bueno saber que a inicios del siglo pasado el análisis matemático estaba en embrión y muchas ideas (como la de la función, integral, ...) no eran suficientemente rigurosas. Era difícil justificar mucho de lo planteado en el famoso libro sobre la conducción del calor, el que escribió Fourier y donde usa las series trigonométricas. Es el inicio de una bella historia en la matemática la que llevó a nuevas ideas y teorías matemáticas.

A partir del trabajo de Fourier, el análisis se fortalece con aportes de matemáticos de primera magnitud, como son Cauchy, Riemann, entre otros. En 1873, Dubois-Reymond construye una función continua,  $2\pi$ -periódica, cuya asociada serie de Fourier es divergente en un punto dado, lo que contradice a Fourier. Situaciones de esta naturaleza llevan casi siempre a grandes descubrimientos. Así fue. Entre avances en otras direcciones, en 1909, Alfred Haar considera al espacio  $C([0,1])$  de las funciones continuas sobre el intervalo  $[0,1]$  y se propone construir una base ortonormal para tal

espacio (y también para  $L^2([0,1]) = \left\{ f / \int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$ ).

Haar considera la función (escala)  $\phi(t) = \begin{cases} 1 & \dots\dots 0 \leq t < 1 \\ 0 & \dots\dots \text{complemento} \end{cases}$

luego construye las funciones aproximantes a elementos de  $C([0,1])$ . Por ahora nos interesa resaltar que el método hecho para construir tales funciones es completamente similar a lo hecho 80 años después al construirse la teoría de Ondículas. Por ello la función  $\psi$  construida en términos de tal  $\phi$  es llamada la ondícula de Haar. Veamos los siguientes gráficos.



Así  $\psi(t) = \begin{cases} 1 & \dots\dots 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & \dots\dots 1/2 \leq t < 1 \\ 0 & \dots\dots \text{complemento.} \end{cases}$

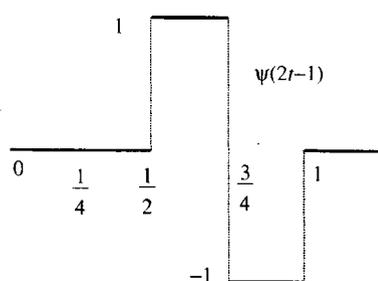
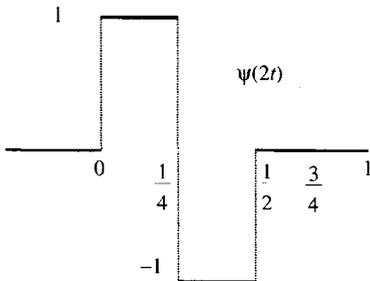
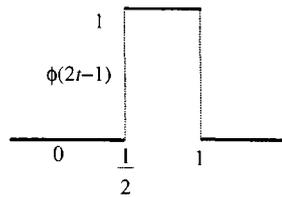
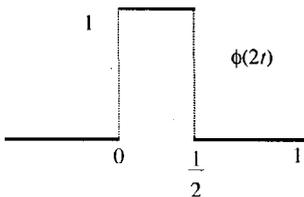
Conociendo los gráficos de  $\phi(t)$  y  $\psi(t)$ , ¿cómo son los gráficos de  $\phi(2t)$ ,  $\phi(2t-1)$ ,  $\psi(2t)$  y de  $\psi(2t-1)$ ? Tenemos los siguientes argumentos y sus respectivos gráficos.

$$\phi(2t) = \begin{cases} 1 & \dots\dots\dots 0 \leq 2t < 1 \\ 0 & \dots\dots\dots \text{complemento} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \dots\dots\dots 0 \leq t < 1/2 \\ 0 & \dots\dots\dots \text{complemento} \end{cases}$$

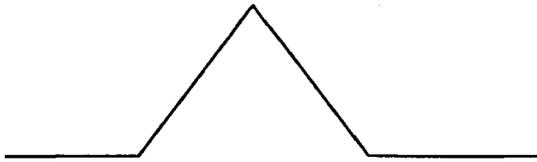
$$\phi(2t-1) = \begin{cases} 1 & \dots\dots\dots 0 \leq 2t-1 < 1 \\ 0 & \dots\dots\dots \text{complemento} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \dots\dots\dots 1/2 \leq t < 1 \\ 0 & \dots\dots\dots \text{complemento} \end{cases}$$

$$\psi(2t) = \begin{cases} 1 & \dots\dots\dots 0 \leq 2t < 1/2 \\ -1 & \dots\dots\dots 1/2 \leq 2t < 1 \\ 0 & \dots\dots\dots \text{complemento} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \dots\dots\dots 0 \leq t < 1/4 \\ -1 & \dots\dots\dots 1/4 \leq t < 1/2 \\ 0 & \dots\dots\dots \text{complemento} \end{cases}$$

$$\psi(2t-1) = \begin{cases} 1 & \dots\dots\dots 0 \leq 2t-1 < 1/2 \\ -1 & \dots\dots\dots 1/2 \leq 2t-1 < 1 \\ 0 & \dots\dots\dots \text{complemento} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \dots\dots\dots 1/2 \leq t < 3/4 \\ -1 & \dots\dots\dots 3/4 \leq t < 1 \\ 0 & \dots\dots\dots \text{complemento} \end{cases}$$



La tentación de seguir analizando estos gráficos es grande. Posterguemos ello para después. Continuemos con nuestra evolución histórica. Observemos los gráficos de  $\phi(t)$  y  $\psi(t)$ ; ellas no son funciones continuas, como tampoco lo son  $\phi(2t)$ ,  $\phi(2t-1)$ ,  $\psi(2t)$ ,  $\psi(2t-1)$ . En general tampoco lo serán  $\phi_{jk}(t)$  y  $\psi_{jk}(t)$ . Ellas son seccionalmente constantes. Sin embargo, las "ondículas"  $\psi_{jk}(t)$  son usadas para aproximar funciones continuas. Es deseable que los elementos "átomos"  $\psi_{jk}(t)$  también estuvieran en el espacio de las funciones continuas. Por otro lado, si  $f$  fuera continua con primeras derivadas continuas ( $f \in C^1(\mathbb{R})$ ) la aproximación más natural no sería con tales  $\psi_{jk}$ 's sino con poligonales inscritos. Así se consideran funciones de la forma



Esto fue hecho por Schauder en la década de los 1910's.

La evolución de las ideas en esta dirección continuaron; el avance de una etapa a otra era cada vez más significativo. Por los años 1930's se crea una interesante teoría debida a Littlewood-Paley, la que permite descomponer una función, que pertenece a un determinado espacio vía su serie de Fourier diádica:

$$f(t) = a_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{2^j \leq k < 2^{j+1}} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right).$$

La teoría de Littlewood - Paley afirma, entre otras cosas, que la norma

$$\left\| \left( |a_0|^2 + \sum |\Delta_j f(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2} \quad \text{es equivalente a la norma}$$

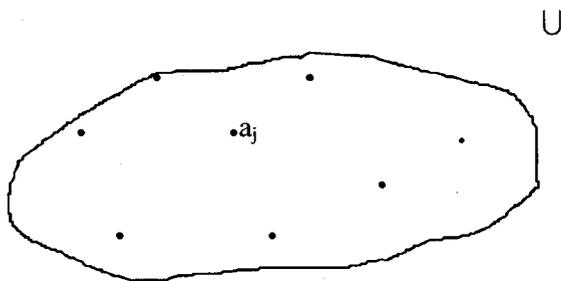
$$\|f\|_{L^2} = \left( \int |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ donde}$$

$$\Delta_j f(t) = \sum_{2^j \leq k < 2^{j+1}} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Observemos  $2^j \leq k < 2^{j+1}$  en la serie; en primer lugar se suma en bloques (a lo que podríamos asociar el ya familiar espacio  $V_j$ ), luego se suma en  $j$  (a lo que asociaríamos  $\bigcup_j V_j$ ).

Tal teoría está dentro del análisis armónico y se ubica en la matemática pura. Sin embargo, y esto es muy importante, en los años 1980's D. Marr usó la teoría de Littlewood-Paley para construir algoritmos para el procesamiento de imágenes usando ondículas. Por otro lado, la citada equivalencia de normas nos dice que la energía de  $f$  es equivalente a la energía de  $f$  cuando ésta está concentrada sobre intervalos.

En el periodo entre 1960 y 1980 se elaboran una serie de resultados respecto a la siguiente idea (que está vigente en las ondículas):



Dado un universo  $U$ , ¿será posible construir una familia de elementos  $a_j$  en  $U$  tal que todo elemento  $f$  de  $U$  se pueda representar (de algún modo) con tales  $a_j$ 's?. Esto es la teoría de átomos, que fue introducida por G. Weiss, R. Coifman y desarrollada por varios analistas armónicos. Si bien los átomos

no son ondículas, fue una motivación para ideas similares. Por otra vía, A. P. Calderón (1964) en un trabajo sobre interpolación compleja introduce ideas que coinciden con la metodología de construir ondículas y con el análisis-síntesis de señales.

El físico teórico Grossmann y el ingeniero sísmico Morlet introdujeron por primera vez una formulación matemática de las ondículas (1984), a las que llamaron "*ondelettes*". A partir de entonces la teoría entra en una etapa de gran expansión, con contribuciones de matemáticos, de ingenieros, de físicos, ... ; se está avanzando mucho tanto desde el punto de vista matemático-teórico como desde sus múltiples aplicaciones. Son muchos los científicos que están trabajando en las ondículas que habrá que esperar unos años para tentar describir lo hecho en los últimos 15 años.

#### 4. Las Ondículas : Aspectos Básicos

Una ondícula (u ondita) es una onda "*pequeña*".

Por ejemplo,

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 \dots\dots\dots 0 \leq t < 1/2 \\ -1 \dots\dots\dots 1/2 \leq t < 1 \\ 0 \dots \text{Complemento} \end{cases}$$

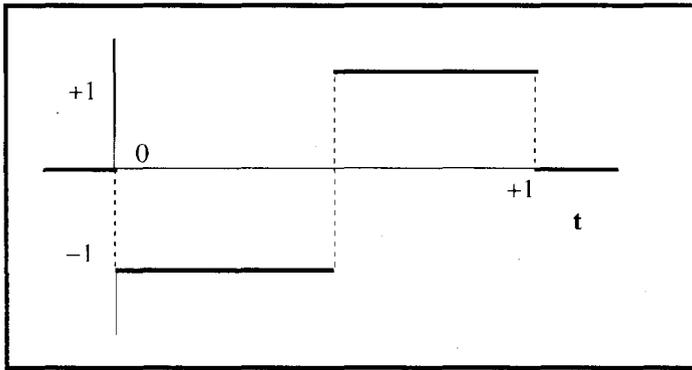
cuyo gráfico lo hemos visto antes, es una ondícula. Observemos que para  $t$  fuera del intervalo  $[0,1)$ ,  $\psi$  es nula. Cuando algo pesado cae al suelo produce un sonido, el que muy rápidamente desaparece; cuando presionamos una tecla en un piano escuchamos que el sonido va decayendo lentamente hasta desaparecer. Lo común en estos ejemplos es que las ondas tienden (o son) a cero en el infinito.

La idea es considerar esas onditas como elementos básicos, es decir someterlas a translaciones y dilataciones, y la familia resultante usarla como una base en un cierto espacio (que asumimos  $L^2(R)$ , pero podría ser otro espacio). Recalcamos que la idea de descomponer funciones (o señales) proviene de distintos caminos (de la matemática, física, ingeniería,...) Esa idea es significativa en el tratamiento de la señal, la que puede ser analizada, y luego sintetizada. Las ondículas tiene propiedades inherentes que las hacen

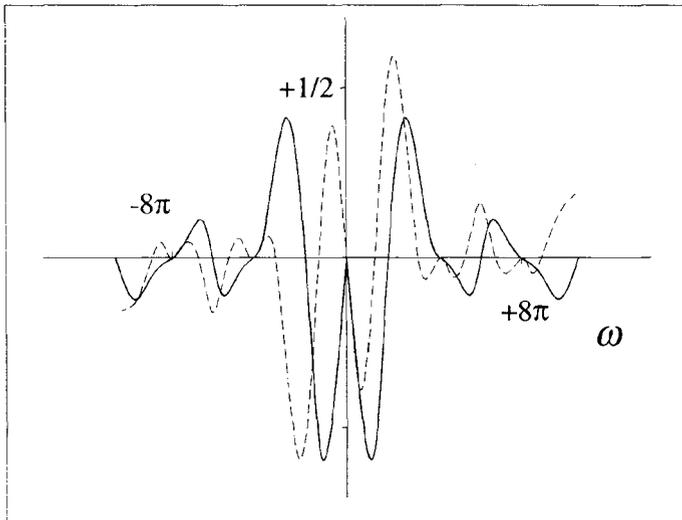
óptimas en muchas aplicaciones. Su utilidad se debe, entre otros aspectos, a su facultad de adaptarse a señales de distintas naturalezas. Mostraremos a continuación algunos gráficos de ondículas así como sus representaciones frecuenciales (vía transformada de Fourier).

Estos gráficos aparecen en el libro del Prof. Holschneider, ver [Hol].

# ONDÍCULA de A. Haar

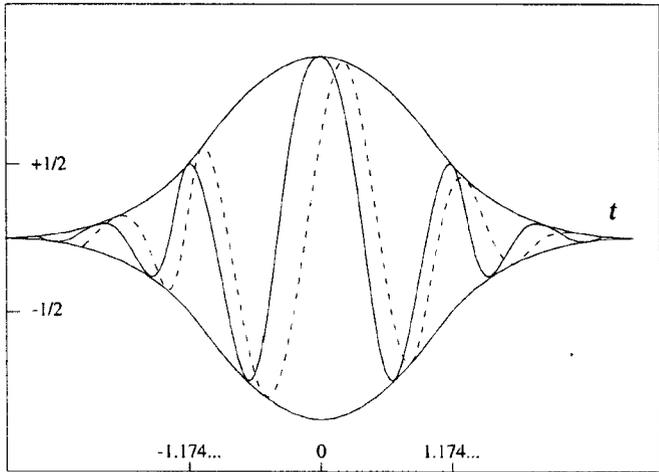


## Representación Espacial

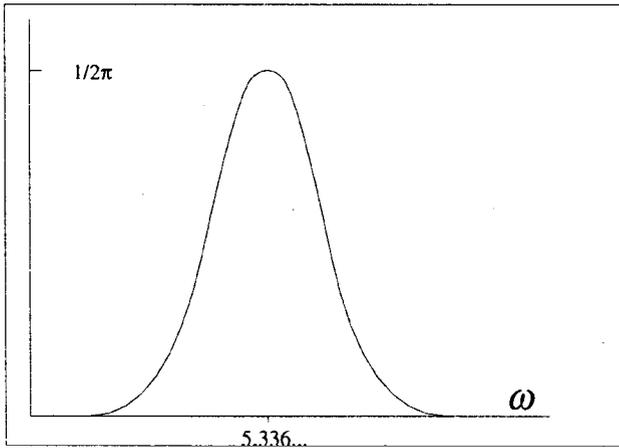


## Representación Frecuencial

## ONDÍCULA de Morlet

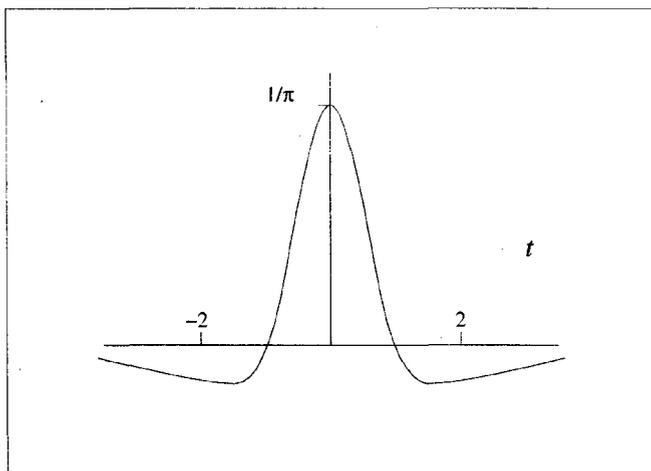


## Representación Espacial

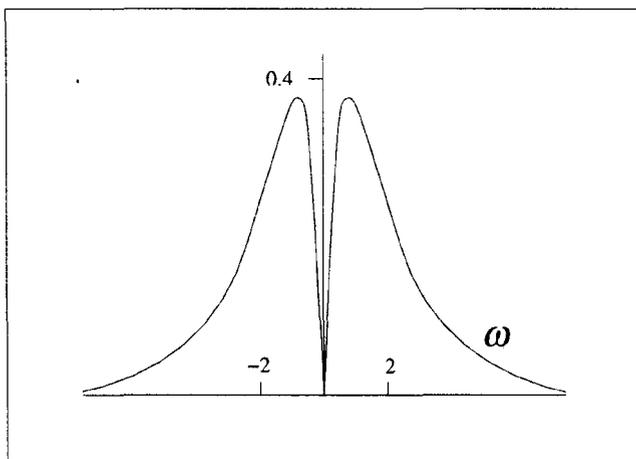


## Representación Frecuencial

## ONDÍCULA de Poisson

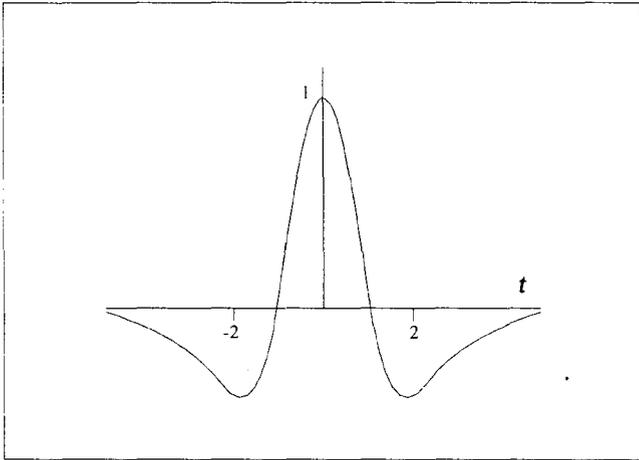


**Representación Espacial**

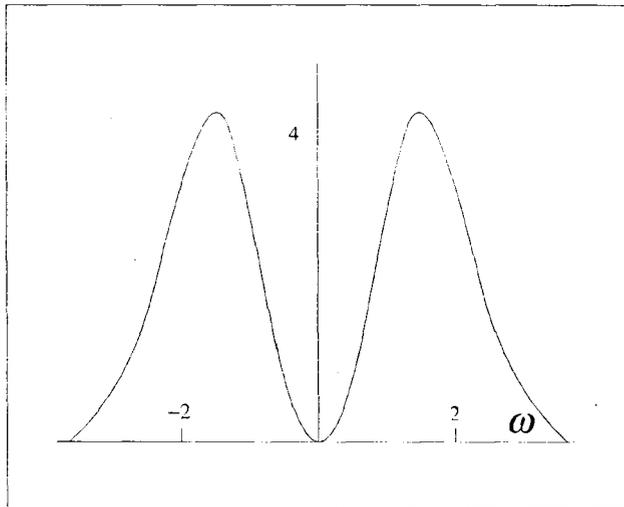


**Representación Frecuencial**

## ONDÍCULA de Marr

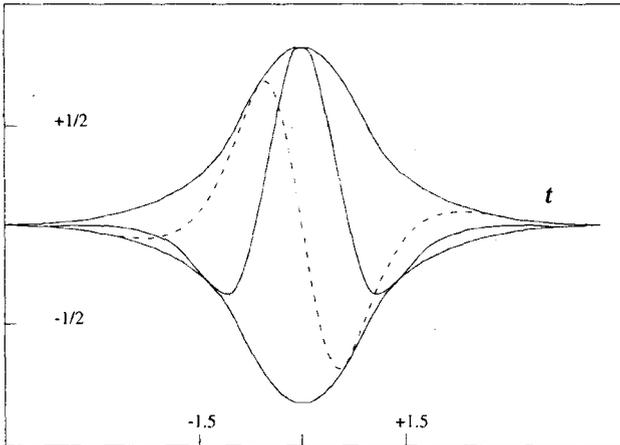


## Representación Espacial

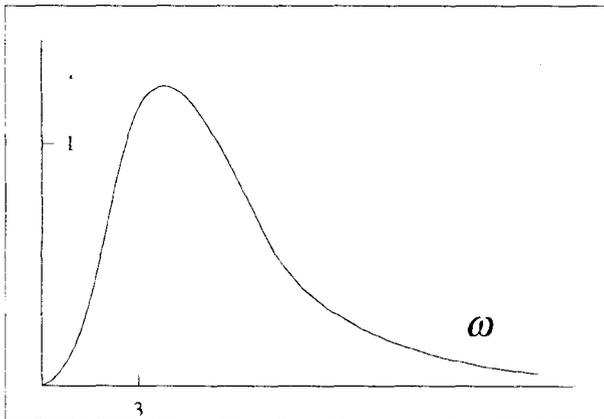


## Representación Frecuencial

## ONDÍCULA de Cauchy

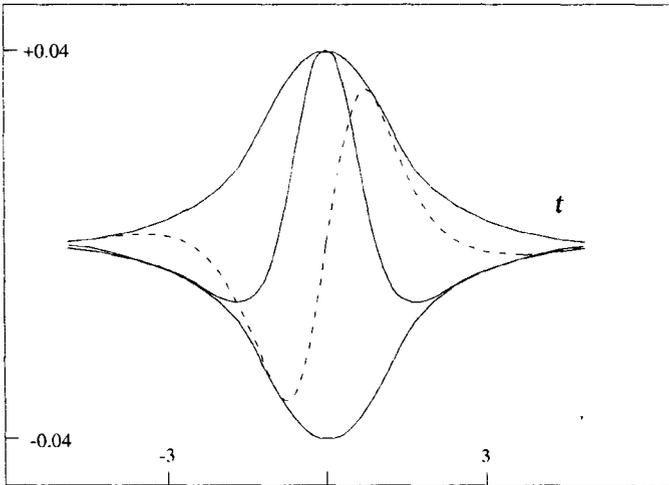


## Representación Espacial

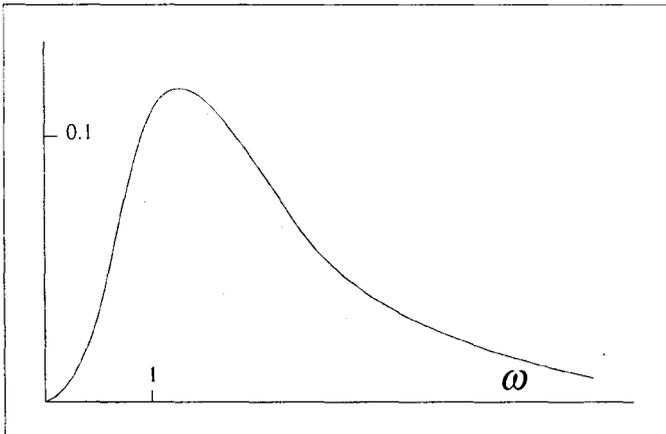


## Representación Frecuencial

## ONDÍCULA de Bessel



## Representación Espacial



## Representación Frecuencial

Volvamos a los gráficos de las páginas 113 y 114. Para precisar ideas, diremos que, en  $L^2(\mathbb{R})$ , dos funciones  $g$  y  $h$  (de valores reales) son ortogonales si:

$$\langle g, h \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) h(t) dt = 0.$$

Viendo las figuras podríamos comprobar que:

$$\begin{aligned} \langle \phi(2t), \phi(2t-1) \rangle &= 0 & ; & & \langle \phi(2t), \psi(2t) \rangle &= 0 \\ \langle \phi(2t), \psi(2t-1) \rangle &= 0 & ; & & \langle \phi(2t-1), \psi(2t-1) \rangle &= 0 \\ \langle \psi(t), \psi(2t) \rangle &= 0 & ; & & \langle \psi(t), \psi(2t-1) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Sin embargo,  $\langle \phi(t), \phi(2t) \rangle \neq 0$

Si usamos el convenio  $\delta(\ell) = \begin{cases} 1, \dots, \text{si } \ell = 0 \\ 0, \dots, \text{si } \ell \neq 0 \end{cases}$  ; tendremos el

siguiente resultado general:

- (i)  $\langle \phi(t-n), \phi(t-m) \rangle = \delta(m-n)$
- (ii)  $\langle \phi(t-m), \psi(t-n) \rangle = 0$
- (iii)  $\langle \psi_{jk}(t), \psi_{pq}(t) \rangle = \delta(j-p) \delta(k-q).$

**Nota :**

En (i) podemos considerar  $2^j t$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , en vez de  $t$  ( $j = 0$ ); lo importante es que ambas  $t$ 's tengan el mismo  $2^j$ , caso contrario no tendremos ortogonalidad, tal es el caso

$$\langle \phi(t), \phi(2t) \rangle \neq 0$$

Obsérvese así mismo que las  $\psi_{jk}$  's son mutuamente ortogonales; como  $\psi_{jk} \in W_j$  (el espacio dilatado de  $W_0$ ), tendremos que  $W_j$  es ortogonal a  $W_{j'}$ ,  $j \neq j'$ . Esto es precisamente lo que nos dice (iii). Un argumento nos afirma que

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus (W_0 \oplus W_1 \oplus \dots) \quad (\text{Suma directa}).$$

Bien, con el material que disponemos podemos ensayar una **noción** de ondícula. Una **Ondícula**  $\psi$ , sometida a ciertas condiciones, es una función en  $L^2(R)$  (podría ser otro espacio) tal que la familia  $\{\psi_{jk}\}$ ,  $j, k \in Z$  es una base ortonormal (los  $\psi_{jk}$  's son mutuamente ortogonales y  $\|\psi_{jk}\|_{L^2} = 1$ ) para  $L^2(R)$ , donde

$$\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$$

Las condiciones sobre  $\psi$  son :

- (a)  $\psi$  debe ser derivable hasta un cierto orden y las derivadas deben ser acotadas.

Mas precisamente,

$D^\alpha \psi \in L^\infty(R)$  (espacio de las funciones acotadas) para  $|\alpha| \leq m$ .

( $|\alpha|$  es el orden de la derivada,  $|\alpha| = 0, 1, \dots, m$ ). Así,  $\psi$  debe tener una condición de regularidad. (Nótese que la ondícula de Haar no es derivable en el sentido usual).

- (b) La derivada  $D^\alpha \psi(t)$ ,  $|\alpha| \leq m$ , debe tender a cero cuando  $|t| \rightarrow \infty$ , es decir,  $\psi$  debe ser una onda "pequeña". Esta es la propiedad de localización de  $\psi$ .

- (c)  $\psi$  debe ser oscilante (es decir,  $\psi$  debe ser onda) lo que significa

$$\int \psi(t) dt = 0$$

(la ondícula de Haar cumple este requisito).

El lector es invitado a mirar los gráficos de las ondículas mostradas en las páginas 119 a la 124 y meditar en sus significados respecto a las condiciones (a), (b) y (c).

Diremos que  $\psi$  es la **ondícula básica** y que las  $\psi_{jk}$ 's son **las ondículas**, las que tienen la libertad de trasladarse, encogerse o alargarse según la aplicación que se estudie. Las ondículas son funciones que están

concentradas en un cierto intervalo. El éxito de las ondículas en las aplicaciones (cada vez más variadas) se debe fundamentalmente a estas propiedades.

El problema es **construir la ondícula**  $\psi$ , tanto con intereses matemáticos como de aplicaciones concretas. Hemos mencionado que un camino es conocer (o construir) primero a la función escala  $\phi$ . El instrumento para tal fin, de modo natural, es el análisis multiresolución (AMR), el que trae dentro de su definición a la función  $\phi$ . Con el AMR, la construcción de la ondícula es relativamente manejable. Es oportuno remarcar que Strömberg en 1982 (cuando aún no existía la teoría de ondículas) construyó la primera base ortogonal de ondículas (para espacios de Hardy)

Por definición, un AMR de  $L^2(\mathbb{R})$  es una sucesión creciente  $(V_j)$ ,  $j \in \mathbb{Z}$   $(V_j \subset V_{j+1})$  de subespacios cerrados de  $L^2(\mathbb{R})$  tal que:

- (i)  $\overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbb{R})$  ;  $\bigcap V_j = \{0\}$
- (ii)  $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$  para todo  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\forall j \in \mathbb{Z}$   
Así,  
$$f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j}t) \in V_0.$$
- (iii)  $f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t-k) \in V_0$ ,  $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$   
Esto es,  $V_0$  es estable bajo traslaciones - enteras.
- (iv) Existe una función  $\phi(t) \in V_0$  tal que  $\{\phi(t-k)\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , es una base ortonormal de  $V_0$ .

Los espacios  $V_j$  pueden ser interpretados como espacios de aproximaciones, esto es, permiten aproximar cualquier función (señal)  $f \in L^2(\mathbb{R})$  con cualquier grado de exactitud. Además, la condición (ii) nos permite restringirnos al espacio  $V_0$ . Si  $P_j$  es la proyección de  $f \in L^2(\mathbb{R})$  sobre  $V_j$ , la condición (i) nos dice:

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} P_j f(t) = f(t) \quad \text{y} \quad \lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f(t) = 0.$$

Todo esto confirma las ideas intuitivas que se expuso anteriormente.

## 5. Ondícula y Banco de Filtros

Uno de los caminos que condujo a la idea ondícula proviene de la ingeniería electrónica. Antes que las ondículas aparecieran como tales, los electrónicos procesaban señales utilizando la teoría de filtros, más precisamente los bancos de filtros, los que fueron investigados entre los años 1970's y 80's. Lo interesante, y curioso de alguna manera, es que en los argumentos y métodos que se usaban está encerrada una forma de construir la función escala  $\phi$  y la ondícula  $\psi$ .

La idea es partir con los números  $h_0(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , los que definen a un filtro  $H_0$ . (Un filtro es como un "colador" que permite dejar pasar cierta información y retener otra). Vía una regla o convenio, los  $h_0(n)$  definen a otros números  $h_1(n)$ , los que a su vez definen al filtro  $H_1$ .

El argumento es : se desea procesar una señal  $x$  con componentes  $x(n)$ . Ella es filtrada por el filtro pasa bajo  $H_0$  produciendo la salida  $y_0$ , con componentes  $y_0(n)$ . Similarmente  $x$  es filtrada con el filtro pasa alto  $H_1$  produciendo  $y_1$  con componentes  $y_1(n)$ .

Por razones técnicas  $y_0$  y  $y_1$  son submuestreadas, lo que significa retirar las componentes ubicadas en lugares impares.

Mas precisamente, si  $(\downarrow 2)$  indica submuestreo y si:

$$y = \begin{bmatrix} \bullet \\ y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ y(4) \\ \bullet \end{bmatrix} \quad \text{entonces (en general)}$$

$$v = (\downarrow 2) y = \begin{bmatrix} \bullet \\ y(0) \\ y(2) \\ y(4) \\ \bullet \end{bmatrix}$$

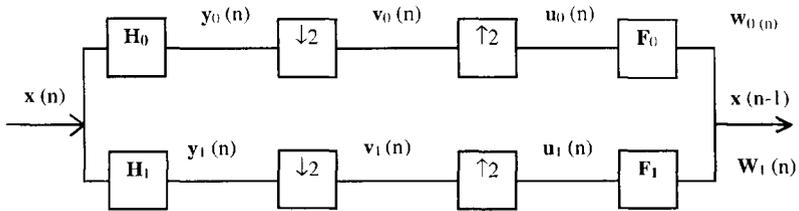
En particular, por el camino del filtro pasa bajo se obtiene la salida  $v_0$ , con componentes  $v_0(2n)$  y por otro lado del filtro pasa alto la salida  $v_1$ , con componentes  $v_1(2n)$ .

Hasta acá es la etapa del análisis. La siguiente es la etapa de la síntesis, la que invierte las operaciones hechas para recuperar al final la señal de entrada. Esta etapa se inicia con un supermuestreo, denotado con  $(\uparrow 2)$  y que realiza la labor de poner cero entre dos componentes sucesivas de  $v_0$  y  $v_1$ . Así en general,

$$(\uparrow 2)(\downarrow 2) y = \begin{bmatrix} \bullet \\ y(0) \\ 0 \\ y(2) \\ 0 \\ y(4) \\ \bullet \end{bmatrix} \equiv u$$

De esta manera se obtienen las salidas  $u_0$  y  $u_1$ , las que a su vez son filtradas por los filtros  $F_0$  y  $F_1$  (que en el caso ortogonal, son los inversos de  $H_0$  y  $H_1$  respectivamente). Así, nuevamente se obtienen las salidas  $w_0$  y  $w_1$ , las que juntamos para obtener la salida final (señal procesada). Si  $x$  tiene componentes  $x(n)$ ,  $\hat{x}$  tiene componentes  $x(n-1)$ .

Tenemos el diagrama:



Recordemos que  $h_0(n)$  define al filtro pasa bajo  $H_0$  y  $h_1(n)$  al filtro pasa alto  $H_1$ . Por razones técnicas y prácticas consideremos filtros causales ( $h(n) = 0$  si  $n < 0$ ) y filtros “FIR” (que tienen un número finitos de elementos).

La función escala  $\phi$  es la solución de la ecuación dilatación

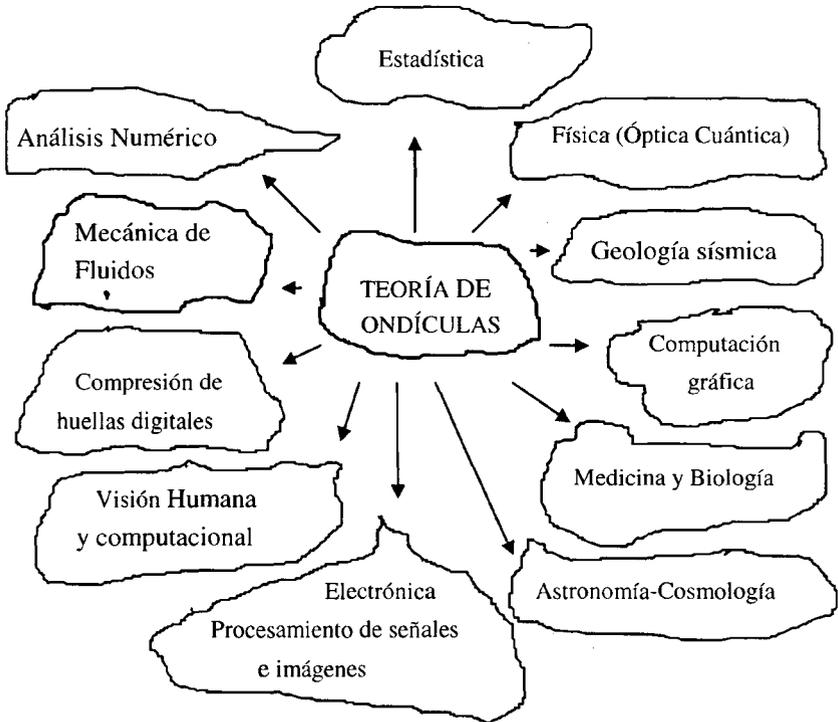
$$\phi(t) = 2 \sum_0^N h_0(k) \phi(2t - k).$$

La ondícula es construida vía

$$\psi(t) = 2 \sum_0^N h_1(k) \phi(2t - k).$$

## 6. Aplicaciones

El siguiente gráfico nos ilustra algunas de las aplicaciones de las Ondículas.



## 7. Conclusiones

1. Enseñar matemática requiere no solamente un dominio de lo que se enseña, si no además de una buena dosis de alegría por enseñar, de despertar vocaciones y de entusiasmar a los estudiantes.
2. La enseñanza de la matemática, a todo nivel, debe usar la tecnología disponible que permita una mejor motivación y comprensión de las ideas fundamentales que se enseña.
3. Consideramos que la teoría de Ondículas es adecuada para ser enseñada en el pregrado universitario pues se conjugan una serie de ideas matemáticas fundamentales que son manejables y sobre todo, que su enseñanza sirve para motivar la aplicación de la matemática a muchas diversas áreas como son la ingeniería, la física, la economía, la biología, la medicina, la geosísmica,... En países, como el Perú, estas aplicaciones son de gran importancia para concientizar el gran valor de la matemática en el desarrollo de la ciencia y de la tecnología, y por lo tanto en el progreso de nuestros países.
4. Es fundamental estimular la creación de grupos de estudios, que en el caso de las ondículas, permitan la difusión, el aprendizaje, el aporte de nuevas ideas y las aplicaciones a otros campos de la ciencia y de la tecnología. El trabajo multidisciplinario es una necesidad impostergable en nuestros días.

## 8. Bibliografía

- [1] Meyer, Y. *Wavelets, Algorithms and Applications*. SIAM, 1993.
- [2] Daubechies, I. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, 1992.
- [3] Chui, Ch. - otros [editores]. *Wavelets: Theory, algorithms and applications*. Ac. Press, 1994.
- [4]. Strang, G. - Nguyen, T. *Wavelets, Filter Banks and applications*. Wellesley C. Press, 1996.
- [5] Schumaker, I - Webb, G. *Recent Advances in Wavelets Analysis*. Ac. Press, 1994.

- [6] Holschneider, M. *Wavelets, an Analysis Tool*. Clarendon Press. Oxford, 1995.
- [7] Sweldens, W. - Schröder, P. *Building your own wavelets at home*. Siggraph, 1996.
- [8] Chan, Y. T. *Wavelet Basic*. Klumer Ac. Pub, 1995.
- [9] Hernández, E. - Weiss G. *A first Course on Wavelets*. CRC Press, 1996.

*Alejandro Ortiz*  
[jortiz@pucp.edu.pe](mailto:jortiz@pucp.edu.pe)