*Pro Mathematica Vol. XII, Nos. 23-24, 1998*

# LOS SISTEMAS DINÁMICOS EN EL BRASIL: LOS AÑOS 60

*Jorge* ***Sotomayor***

***Resumen***

*Relato evocativo sobre el origen del interés por los Sistemas Dinámicos en Brasil, presenciado por el autor durante sus inicios en esta investigación entre 1962 y 1964*

## 1. Una tarde de octubre de 1962

Una tarde de octubre de 1962, en la Sala de Seminarios del Instituto de Matemática Pura y Aplicada (IMPA), se dio cita un grupo de matemáticos, profesores y becarios, aspirantes a ser matemáticos. El motivo del encuentro era el Seminario de Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (TCEDO), orientado por Mauricio Peixoto. Esta actividad había sido interrumpida durante el mes de setiembre y reanudaba su ritmo normal después del regreso de Peixoto, quien había asistido al Congreso Internacional de Matemáticos, realizado en Estocolmo.

✏ *Profesor del Instituto de Matematica e Estatistica, Universidade de São Paulo, Brasil.*

Además del reencuentro, la sesión de esa tarde tenía algo especial: la exposición sobre *"Los problemas Abiertos en la Teoría Cualitativa de las EDOs"* a cargo del propio Peixoto.

En el auditorio había entusiasmo y una tensa expectativa. La hora de la verdad había llegado para los participantes más maduros (entre los cuales no me hallaba).

## 2. El ambiente matemático

A mi llegada al IMPA, en marzo de 1962, además de Mauricio Peixoto, quien permaneció en el Instituto hasta 1964, conocí a varios becarios y profesores. Entre los profesores estaban Elon Lima, Djairo de Figueiredo y Leopoldo Nachbin. Lima estuvo durante el primer semestre; Figueiredo, durante uno o dos meses, y Nachbin permaneció pocos días del segundo semestre.

Entre los becarios y otros "*habitúes*" citaré a María Lucía Alvarenga, Augusto Vanderlei, Pedro Nowosad, Jacob Palis, Hilton Machado, Lindolpho Dias, Alciléa Augusto, Jorge Alberto Barroso, Aristides Barreto, Ivan Kupka y Roberto Baldino.

En esa época, el IMPA, como Instituto de Investigación, no tenía una oferta mínima de cursos o actividades anuales. Esto dependía de los visitantes e investigadores presentes.

Sin embargo, había una base permanente que le dio al Instituto una estabilidad académica en esos años. En 1963, por un convenio con la "*Universidad del Brasil*", precursora de la Universidad Federal de Río de Janeiro (UFRJ), se inició el programa de doctorado. Fue el primer esfuerzo sistemático de formación de investigadores en Brasil. Tuve el privilegio de ser integrante del primer grupo de ex-alumnos doctorados, junto con I. Kupka y A. Barreto, bajo la dirección de Mauricio Peixoto.

Este proyecto liderado por Peixoto, constituye un marco de referencia fundamental que determina el inicio de los Sistemas Dinámicos (SD) en el Brasil. A partir de los trabajos fundamentales realizados por el matemático americano Stephen Smale entre los años 60 y 70, el nombre SD pasa a abarcar parte de la TCEDO, no siendo bien delimitada la frontera común; SD también es el título de un libro famoso de George Birkhoff, publicado en 1927.

## 3. El Seminario de Peixoto

Retrospectivamente, considero que fue crucial, para mis inicios en la investigación, haber hecho un gran esfuerzo por participar en el Seminario de TCEDO, la más importante de todas las actividades matemáticas que desarrollé durante mi estadía en el IMPA.

Aunque no supusiese amplios prerrequisitos, el Seminario exigía un nivel de madurez y una actitud inquisitiva a las que yo todavía no estaba familiarizado.

La primera exposición, a comienzos de abril, fue del propio Peixoto y trató el "*Teorema de Kneser*", el cual establece lo siguiente: "Todo campo de vectores en la Botella de Klein sin puntos singulares (de equilibrio) tiene una órbita periódica". Luego, en dos presentaciones, Peixoto estableció las propiedades básicas del "*Número de Rotación*" siguiendo el libro de Coddington -Levinson [C-L]. Esta teoría se remonta a Poincaré y caracteriza los campos de vectores de clase $C^2$ sin puntos singulares que poseen órbitas densas en el Toro, lo que ocurre cuando el citado Número es irracional. En el caso racional el campo de vectores tiene necesariamente soluciones periódicas. La segunda exposición incluía también una construcción geométrica del llamado "*ejemplo de Denjoy*", que consiste en un campo de vectores de clase $C^1$ para el cual todas sus órbitas se acumulan en un conjunto (llamado minimal no trivial de Denjoy) el cual es cerrado e invariante, sin subconjuntos propios de estas propiedades.

La estructura transversal de este conjunto es la de un conjunto de Cantor. Este fue, en los años 20, el primer conjunto de este tipo, que es un precursor de los "*Fractales*". Los conjuntos minimales "*triviales*" son los puntos singulares, las órbitas periódicas y el Toro. El trabajo de Denjoy responde a una pregunta dejada por Poincaré en sus trabajos sobre el Número de Rotación, en el siglo pasado.

Peixoto no volvió a exponer en el Seminario hasta octubre de ese año y lo hizo para proponer los "*Problemas Abiertos en EDO*", ya citados antes.

La cuarta presentación fue sobre el Capítulo 13 del Coddington-Levinson, uno de los más difíciles del libro, que trata de la generalización para dimensión superior de los puntos singulares hiperbólicos (sillas, nodos, focos) y órbitas periódicas hiperbólicas (atractoras o repulsoras) en el plano.

El nombre "*hiperbólicos*" también fue acuñado por Smale para unificar la estructura local en torno a los puntos singulares, órbitas periódicas y otros conjuntos invariantes (como el "*horseshoe*") cruciales para la teoría de la Estabilidad Estructural y su desarrollo posterior, cuyo punto de partida es los trabajos de Andronov-Pontrjagin [A-L, A-P] y Peixoto [P1-P4]. Estos últimos fueron el tema de las exposiciones detalladas de la becaria Alciléa Augusto, las que comentaré más adelante.

El concepto de Estabilidad Estructural surgió de la colaboración iniciada en 1932, entre el distinguido físico-matemático A. A. Andronov y el talentoso matemático L. A. Pontrjagin.

Andronov, autor junto con Khaikin y Vitt, del clásico "*Theory of Oscillators*", era el lider y fundador de la llamada Escuela de Gorki (actualmente Nizhny Novgorod), depositaria de la herencia cultural adquirida de la TCEDO de Poincaré, aplicada al estudio matemático de los sistemas mecánicos y eléctricos.

Pontrjagin es famoso por sus contribuciones a la Topología Combinatoria y Diferencial Homotopía, Grupos Topológicos y, al final de su carrera, a la Teoría del Control Óptimo.

El nonagésimo aniversario del nacimiento de Pontrjagin fue celebrado con un gran coloquio en Moscú, en setiembre de 1998.

Para que un modelo dinámico, o sea una ecuación diferencial tal como $\dot{x} = f(x)$, represente con fidelidad un fenómeno del mundo físico, dicha ecuación debe tener un cierto grado de estabilidad. De modo que pequeñas perturbaciones ( $f + \Delta f$ ) no afecten sus características esenciales. Las propiedades físicas, a ser observadas, deben persistir a las pequeñas alteraciones inevitables en el registro de los datos y en la experimentación. Las propiedades esenciales del fenómeno se representan en el modelo por el retrato de fase (una síntesis de las soluciones de la ecuación diferencial), el cual debe preservarse topológicamente. Esto quiere decir que los retratos de fase de $f$ y ( $f + \Delta f$ ) deben ser transformables uno en otro por un homeomorfismo de la forma ( $I + \Delta I$ ), con $||\Delta I|| < \varepsilon$, siendo $I$ la identidad. Un homeomorfismo de esta forma que desplaza los puntos a una distancia menor que $\varepsilon$, se denomina $\varepsilon$–homeomorfismo.

Esta es la motivación que rodea la Estabilidad Estructural, para la cual Andronov y Pontrjagin formularon una caracterización dinámica, en términos de los puntos singulares, soluciones periódicas, etc. de $f$ [A-P], [A-L], [Pe1, Pe2, Pe3]. Este concepto unifica numerosos ejemplos concretos divulgados en "*Theory of Oscillators*". Estos, al mismo tiempo que lo motivan, justifican el concepto y los resultados obtenidos por Andronov y Pontrjagin.

El matemático americano S. Lefschetz rescató el concepto, el cual recibía el nombre de "*Robustez*", rebautizándolo con el nombre más descriptivo de Estabilidad Estructural. También divulgó el Teorema de Andronov-Pontrjagin traduciéndolo de la primera edición rusa de "*Theory of Oscillators*" y estimuló a su discípulo H. F. De Baggis a redactar una demostración del referido Teorema, la cual no era conocida en occidente. Peixoto , en Río de Janeiro, trabajando como Profesor de Mecánica Racional en la "*Escola de Engenharia*", leyó el trabajo de De Baggis y lo expuso en el Seminario que entonces organizaba en el Gabinete de Mecánica de dicha Escuela. Esto ocurría por 1955.

Poseedor de una cultura matemática más depurada y un sentido estético superior, Peixoto perfeccionó el concepto en varias direcciones y demostró la densidad de los sistemas estructuralmente estables en regiones compactas del plano y en superficies compactas orientables bidimensionales. Esto último supone una extensión sustancial del caso plano y prepara el terreno para los trabajos de Smale y Anosov en dimensión superior [Me-Pa].

Destaquemos a continuación los siguientes puntos esenciales del trabajo de Peixoto, pues estos establecen el ambiente donde se iniciará el desarrollo de mi investigación:

- La consideración explícita de un espacio de Banach $X^r$ para el universo de las ecuaciones diferenciales de clase $C^r$. Este espacio permite formular con comodidad y propiedad las cuestiones pertinentes a la apertura y densidad de los sistemas estructuralmente estables.

- La definición (axiomática) de la clase $\sum^r$, denominada más tarde de Morse-Smale (nombre acuñado por el propio Peixoto), especialmente cuando es adaptada para la dimensión superior a 2.

La clase $\sum^r$ se obtiene imponiendo a las condiciones de Andronov-Pontrjagin la "Condición de Peixoto", la que estipula la inexistencia de soluciones recurrentes no triviales (las triviales son los puntos singulares y las periódicas). Dicho de otra forma, esta condición impone un comportamiento global simple, similar al plano donde vale el Teorema de Poincaré-Bendixson.

Peixoto también probó la apertura, estabilidad estructural y densidad de $\sum^r$ en $X^r$, para todo $r \geq 1$. Asimismo, estableció que la restricción de $\varepsilon$–proximidad a la identidad para el homeomorfismo $I + \Delta I$, en la definición de Andronov-Pontrjagin, es innecesaria, bastando que exista el homeomorfismo que transforme los retratos de fases de $f$ y $f + \Delta f$.

La citada densidad incluye el delicado análisis de la eliminación por pequeñas perturbaciones de las recurrencias no triviales impuesta en la definición de $\sum^r$. Esta es la parte más sutil del trabajo de Peixoto, cuya problemática dio lugar al "*Closing Lemma*", área de investigación actual dentro de los Sistemas Dinámicos [Me-Pa].

Volvamos al Seminario de Peixoto. Alciléa Augusto presentó una serie de 4 ó 5 exposiciones detalladas y sumamente cuidadosas de los trabajos de Peixoto. Comenzó con el caso de EDOs en el plano, presentando el artículo publicado en "*Annals of Mathematics*", [Pe1], y continuó con el de los "*Anais da Academia Brasileira de Ciencias*", [Pe2]. A estos artículos nos referíamos con los apelativos "*el amarillo*" y "*el gris*" por los colores de las pastas de sus respectivas separatas. El primero contiene la demostración del Teorema de Densidad de $\sum^r$, dentro de los sistemas transversales a la frontera de la región plana en que están definidos. El segundo extiende la clase de sistemas al caso en que ellos pueden tener puntos de tangencia con la frontera del dominio y da una prueba constructiva, autosuficiente, de la existencia del homeomorfismo $I + \Delta I$ de la definición de Estabilidad Estructural.

Finalmente A. Augusto presentó "*el blanco*", publicado ese año en Topology [Pe4], el más difícil y sofisticado de los trabajos de Peixoto. En éste extiende la clase $\sum^r$ del plano a superficies orientables.

Desde mi llegada al IMPA en marzo de 1962 con el Seminario TCEDO y lecturas sustanciales de los libros de Elon Lima, [L1, L2], y Dieudonné, [Di], estimuladas por los seminarios de Variedades Diferenciables y Análisis Funcional, di un gran salto en la amplitud de mi inventiva matemática y también en la profundidad de mis conocimientos.

Hacia fines de setiembre de ese año había estudiado con gran interés el Teorema de Sard uno de los resultados más importantes del Análisis Diferencial, el cual estipula que el conjunto de los Valores Regulares (sobre los cuales valen las hipótesis del Teorema de la Función Implícita) tiene Medida de Lebesgue total. Este Teorema proporciona la base del Análisis para la Topología Diferencial, cuyo origen está en el formidable trabajo de Pontrjagin "*Smooth Manifolds and its Applications to Homotopy Theory*", el cual también estudié con gran provecho.

Retrospectivamente, considero que 1962 fue el año más importante de mi iniciación a la investigación, el año de mi transición de la Matemática de los Libros a la Matemática Viva, la de los seminarios y problemas actuales.

No consigo localizar el punto preciso donde esta transición ocurrió, pero puedo decir que ella fue catalizada o precipitada por los Problemas de EDO propuestos por Peixoto en aquella ya aludida tarde de octubre.

## 4. La Lista de Problemas

Luego de un breve discurso sobre la importancia (vital) de atacar problemas de investigación para la formación de los matemáticos, Peixoto pasó a formularlos y comentarlos en el orden siguiente:

### 1. El Problema del Arco

Probar que toda curva continua (arco) en el espacio $X^r$ de campos de vectores de clase $C^r$ en la esfera puede ser arbitrariamente aproximada por una con un número finito de puntos fuera de $\sum^r$, en los que ocurrieran las transiciones entre tipos topológicos distintos de retratos de fase (bifurcaciones).

Esta es una manifestación de la fe que Peixoto tenía de la preponderancia de la Estabilidad Estructural ($\sum^r$) sobre las Bifurcaciones ( $X_1^r = X^r \setminus \sum^r$). Desarrollos posteriores demostraron que lo opuesto es lo que prevalece. Este problema fue propuesto por Alciléa Augusto.

## 2. Los Conjuntos Minimales no-triviales

Decidir si pueden existir conjuntos invariantes perfectos (cerrados transversalmente y totalmente discontinuos) para EDOs de clase $C^2$ definidas en superficies compactas orientables.

Este problema propuesto por María Lucía Alvarenga, formando ya parte del folklore de los especialistas, fue resuelto por la negativa de A. J. Schwarz. Su solución fue expuesta por Peixoto en noviembre en el Seminario TCEDO, [So3].

## 3. La Clasificación

Clasificar, con base a sus invariantes combinatorios, las componentes conexas en $\sum^r$. Esto consiste en dar condiciones para decidir cuando dos sistemas de $\sum^r$ pueden ser relacionados por un homeomorfismo isotópico a la identidad que transforma retratos de fase de uno en el otro.

Peixoto estimuló a Lindolpho Dias a trabajar en este problema, el cual fue resuelto por Gutiérrez y de Melo [Gu-Me] y S. Zchauer [Zch]. En 1971 [Pe3], Peixoto clasificó las EDOs de $\sum^r$ sin órbitas periódicas.

## 4. La Estabilidad Estructural de Primer Orden

Tome en cuenta el complemento $X_1^r = X^r \setminus \sum^r$, provisto con la topología inducida de $X^r$. En una nota de cuatro páginas en Dokl. Acad. Nauk.21, 1938, [A-L], Andronov y Leontovich propusieron una caracterización para la clase $\sum_1^r$ de EDO de $X_1^r$ que son Estructuralmente Estables por perturbaciones pequeñas dentro de $X_1^r$.

ocurrieran las transiciones entre tipos topológicos distintos de retratos de fase (bifurcaciones).

Esta es una manifestación de la fe que Peixoto tenía de la preponderancia de la Estabilidad Estructural ($\sum^r$) sobre las Bifurcaciones ( $X_1^r = X^r \setminus \sum^r$). Desarrollos posteriores demostraron que lo opuesto es lo que prevalece. Este problema fue propuesto por Alciléa Augusto.

**2. Los Conjuntos Minimales no-triviales**

Decidir si pueden existir conjuntos invariantes perfectos (cerrados transversalmente y totalmente discontinuos) para EDOs de clase $C^2$ definidas en superficies compactas orientables.

Este problema propuesto por María Lucía Alvarenga, formando ya parte del folklore de los especialistas, fue resuelto por la negativa de A. J. Schwarz. Su solución fue expuesta por Peixoto en noviembre en el Seminario TCEDO, [So3].

**3. La Clasificación**

Clasificar, con base a sus invariantes combinatorios, las componentes conexas en $\sum^r$. Esto consiste en dar condiciones para decidir cuando dos sistemas de $\sum^r$ pueden ser relacionados por un homeomorfismo isotópico a la identidad que transforma retratos de fase de uno en el otro.

Peixoto estimuló a Lindolpho Dias a trabajar en este problema, el cual fue resuelto por Gutiérrez y de Melo [Gu-Me] y S. Zchauer [Zch]. En 1971 [Pe3], Peixoto clasificó las EDOs de $\sum^r$ sin órbitas periódicas.

**4. La Estabilidad Estructural de Primer Orden**

Tome en cuenta el complemento $X_1^r = X^r \setminus \sum^r$, provisto con la topología inducida de $X^r$. En una nota de cuatro páginas en Dokl. Acad. Nauk. 21, 1938, [A-L], Andronov y Leontovich propusieron una caracterización para la clase $\sum_1^r$ de EDO de $X_1^r$ que son Estructuralmente Estables por perturbaciones pequeñas dentro de $X_1^r$.

Este trabajo es el primer intento conceptual de estudiar globalmente las bifurcaciones que, como ya lo mencionamos, son las alteraciones cualitativas que ocurren en el retrato de una familia de EDOs que depende de parámetros. La propuesta de Andronov-Leontovich era que de las más nítidas y estables de dichas bifurcaciones ocurrían en $\sum_1^r$ (Sistemas estables de primer orden).

El problema que Peixoto formuló consistía en extender los resultados de Andronov-Leontovich del plano a variedades diferenciables; y, claro está, demostrar los teoremas que en la nota citada estaban solamente enunciados.

## 5. Estabilidad Estructural de las Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Extender a ecuaciones $\ddot{x}=f(x,\dot{x})$ (o sea las de la forma $\dot{x}=y,\ \dot{y}=f(x,y)$) los resultados de caracterización y genericidad ya establecidos para las ecuaciones cualesquiera (o sea $\dot{x} = g(x, y)$, $\dot{y} = f(x, y)$).

Aunque los problemas no eran precisamente propuestos para mí, pues era el benjamín del grupo, me sentí atraído por ellos y quedé indirectamente comprometido con los problemas 4 y 5. De hecho, sólo éstos no tenían destinatarios "*naturales*" designados, quedando no definido cuál sería para mí y cuál para Aristides Barreto.

Hacia fines de octubre, en el Seminario TCEDO, Ivan Kupka hizo una serie vertiginosa de presentaciones sobre las Variedades Invariantes en general. Trató de variedades n-dimensionales y de conjuntos invariantes más generales para el caso de puntos singulares y órbitas periódicas contenidos en [C-L]. Sus fuentes bibliográficas venían directamente de los trabajos del matemático alemán O. Perrón, de los cuales [C-L] es también una exposición. Este asunto era de una actualidad crucial en la época, debido a los trabajos de Smale y Anosov [Me-Pa].

Con el propósito de discutir los seminarios de Kupka, Peixoto organizó reuniones tutoriales con los participantes interesados. El ambiente informal de éstas contribuyó a disminuir la distancia protocolar, estableciendo para mí un canal de comunicación más directo con Peixoto.

Así, no fue difícil comunicarle mis inquietudes matemáticas relacionando su Teorema de Genericidad para $\sum^r$ dentro de $X^r$ y el Teorema de Sard que es un resultado de genericidad para valores regulares. No hizo ningún comentario, pero creo que fue en ese momento que quedó definido que sería yo quien abordaría el problema 4, el de la Estabilidad de Primer Orden, mientras que el 5 quedaría para Aristides Barreto. De hecho, a mediados de noviembre me entregó la ya citada nota de Andronov-Leontovich, recomendándome "no pierdas esto que es importante, es un buen problema".

A pesar de las limitaciones técnicas que en la época tenía para atacarlo, la ilusoria posesión de un problema de investigación me produjo una gran excitación y un sentimiento de abrumadora responsabilidad. Fue como el despertar hacia una forma más madura de vislumbrar el estudio de las matemáticas. Sin premeditarlo me había precipitado a los acontecimientos. La hora de la verdad había llegado también para mí.

## 5. El Coloquio Brasileño de Matemáticas de 1963

En mayo de 1963 hice mi primera intervención en el Seminario TCEDO para exponer lo que, a costa de un considerable trabajo, había entendido y reconstruido de la nota de Andronov-Leontovich, la cual contiene sólo definiciones y enunciados de teoremas. Todo llevaba a creer que era posible extender las técnicas de Peixoto, válidas para $\sum^r$, al caso de lo que sería $\sum_1^r$ en superficies orientables compactas. Había, evidentemente, que imponer la "*Condición de Peixoto*", sobre la ausencia de recurrencias, a las ya estipuladas por Andronov-Leontovich. Por medio de muchos cálculos era posible establecer los resultados de caracterización para los Sistemas Estructuralmente Estables de Primer Orden, gracias a la base establecida en los trabajos de Peixoto.

En julio de 1963 tuvo lugar el Coloquio Brasileño de Matemáticas; por determinación de Peixoto todos los becarios que tenían algo que decir participaron de las sesiones de comunicaciones con intervenciones de 20 minutos. La mía se llamó "*Estabilidad Estructural de Orden Superior*". Los textos de estas comunicaciones no constan en las Actas del referido Coloquio. Este Coloquio fue crucial para mi concepción del problema que investigaba; las ideas más interesantes referentes a la estructura de subvariedad de Banach de $\sum_1^r$ se me ocurrieron en ese Coloquio, gracias a la conferencia plenaria de Kupka "*Una Teoría de Morse para Variedades de Dimensión Infinita*" y la comunicación de A. Augusto sobre el Problema 1 (el del "*Arco*").

En el primer semestre de 1963, Kupka había visitado la Universidad de Columbia, donde Smale trabajaba. Trajo a su regreso los trabajos, ahora clásicos, de Palais y Smale, sobre Variedades de Dimensión Infinita y Teoría de Morse. Estimulado por Peixoto, Kupka expuso estos trabajos en su conferencia, lo que hizo con gran maestría. Concluyó diciendo: "Cuando uno introduce una nueva Teoría debe justificarla. Ésta que presenté hoy, tiene aplicaciones al Cálculo de Variaciones, Teoría del Control y Geometría Diferencial, entre otras".

A. Augusto habló de la finitud genérica del encuentro del arco con bifurcaciones relativas a los puntos singulares, usando el Teorema de Transversalidad de Thom aplicado de la intersección de la familia de EDOs con la sección nula del fibrado tangente de la variedad donde están definidas [L2]. En coordenadas locales, esto equivale a aplicar el Teorema de Sard a la función vectorial $(f(x, y, \lambda) + u, g(x, y, \lambda) + v)$ y valor regular (0,0), de donde la familia de EDOs con parámetro $\lambda$ es $\dot{x} = f(x, y, \lambda)$, $\dot{y} = g(x, y, \lambda)$.

De cierto modo esto equivalía a identificar una parte de $X_1^r$, la pertinente a los puntos de equilibrio, que tenía algo de la estructura de hipersuperficie regular de $X^r$. Quedarían entonces los otros fenómenos dinámicos por excelencia: órbitas periódicas y conexiones de separatrices de sillas, responsables de las otras bifurcaciones. Era necesario, por tanto, identificar la parte de $X_1^r$ que tuviera la estructura de subvariedad de dimensión infinita de $X^r$, la cual pudiera ser usada para expresar la intersección del arco con $X_1^r$ identificando los sistemas que producen bifurcaciones. El candidato más natural para ser la citada parte era $\sum_1^r$. Como explicaré más adelante, esta parte tuvo que ser expandida después [S1].

Así, me dediqué a trabajar para mostrar que $\sum_1^r$, sobre el cual ya había adquirido bastante confianza, era de hecho una hipersuperficie regular de $X^r$.

Sólo a fines de 1963 estaba claro lo que ahora parece que debía haber sido obvio desde el comienzo: que los Problemas 1 y 4 estaban íntimamente relacionados. El vínculo que los conectaba era la intuición sobre la estructura diferenciable de $\sum_1^r$, la cual se revelaba como correcta. Había, sin embargo, mucho trabajo por desarrollar para hacerla explícita.

Con esta concepción no fue difícil producir un contra ejemplo para la finitud genérica de las bifurcaciones. Esto lo conseguí reinterpretando en términos geométricos de transversalidad los resultados de los pioneros rusos [So4]. Posteriormente, Peixoto reformuló el problema del arco, pasando a exigir la existencia (sin la genericidad) de los arcos con finitas bifurcaciones [Pe-Nh].

## 6. Los Trabajos de 1964

A continuación hago un esbozo de los tres trabajos de investigación concluidos y sustentados como tesis de doctorado a mediados de 1964. Se trata de los primeros trabajos en Sistemas Dinámicos ejecutados integralmente en América Latina por jóvenes investigadores.

Los elementos ya delineados anteriormente que intervinieron en mi trabajo fueron todos los que providencialmente había aprendido en Seminarios en el IMPA y lecturas realizadas en 1962 y 1963:

- El Cálculo en Espacio y Variedades de Banach
- Las Variedades Invariantes y su dependencia regular con parámetros.
- Los trabajos de Peixoto
- La comprensión del trabajo de Andronov-Leontovich.

Para guardar la analogía con el enfoque de Peixoto y de Andronov-Pontrjagin, la nota de Andronov-Leontovich puede ser reformulada y resumida de la siguiente forma:

- La definición, a partir de condiciones dinámicas, de la clase $\sum_1^r$ de EDOs de $X_1^r$ de modo que se incluyan sólo las que violan de manera minimal las condiciones de Andronov-Pontrjagin y Peixoto.

- La identificación (caracterización) a través de $\Sigma_1^r$ de la clase $S_1^r$ de los sistemas de $X_1^r$ que son estables de primer orden, o sea, de aquellos que por perturbaciones pequeñas dentro de este mismo conjunto, el retrato de fase no se les altera topológicamente.

La nota de Andronov-Leontovich propone para sistemas en el plano que $\Sigma_1^r = S_1^r$. Las demostraciones llegaron a ser accesibles en Occidente con la publicación, en 1971, del libro [A-L], el cual también contiene la demostración del Teorema de Andronov-Pontrjagin, [A-P], y otros asuntos de gran relevancia para el estudio de las bifurcaciones.

La analogía programática entre estos dos trabajos de los pioneros rusos es clara; nada sería más natural que extenderla para un contexto que incorpora a [A-L] las innovaciones introducidas por Peixoto al trabajo de [A-P]. Sin embargo, mi tesis lleva más lejos esta analogía. Su contribución analítico-geométrica, sin paralelo en los trabajos anteriores, es la estructura de subvariedad diferencial de $\Sigma_1^r$, densa dentro de $X_1^r$, con la identificación explícita de sus espacios tangentes.

Esta estructura hace posible la formulación geométrica para las bifurcaciones simples (aisladas): ellas se presentan cuando una curva (o arco) de sistemas corta $X_1^r$ dentro de $\Sigma_1^r$ y lo hace transversalmente.

Sin embargo, como ya dijimos [So4], hay otras bifurcaciones no aisladas que aparecen también transversal y persistentemente. El estudio de éstas requiere una evolución adicional que comentaré después de mi esbozo del trabajo de Kupka.

Este trabajo [Kp], para EDOs, es simultáneo al de Smale, para difeomorfismos, y establece la genericidad de una clase de sistemas en variedades compactas de cualquier dimensión.

Tal clase, denominada actualmente de Kupka-Smale, conserva todas las propiedades locales de estabilidad (hiperbolicidad) de los puntos singulares, órbitas periódicas y también intersección transversal de sus respectivas variedades invariantes. Ver [Kp] y [Sm].

El trabajo de Kupka resultó muy conocido después que Peixoto publicó una versión unificada de los dos casos, EDOs y difeomorfismos, acuñando el nombre, de Kupka-Smale, para estos sistemas genéricos en [Pe5]. Este trabajo me dio la base y el lenguaje que faltaban en 1964 para la extensión del conjunto $\sum_1^r$ a una subvariedad estrictamente más amplia, inmersa de modo que la transversalidad de los arcos a esta sí represente las bifurcarciones genéricas. Ver [So1].

El trabajo de Aristides Barreto consistió en dar una caracterización de la Estabilidad Estructural para EDOs de segundo orden. Estas corresponden a las de primer orden de la forma $\dot{x} = y,\ \ \dot{y} = f(x, y)$, con $f$ periódica en $x$, lo que da un espacio de fase cilíndrico, no compacto. Este es el primer resultado sobre dominios no compactos. En [So6] me interesé en dar una demostración directa de la genericidad de la Estabilidad Estructural de EDOs de segundo orden en dominios compactos. Para esto modifiqué el método de las "*rotaciones y traslaciones*" con el que probé, en [So2, So8], usando la medida de Lebesgue y el Teorema de Sard, la genericidad de las EDOs en regiones planas compactas. Para el caso de las EDOs de segundo orden $\ddot{x} = f(x, \dot{x}) + v\dot{x} + \mu$, se prueba que, para un conjunto de medida total de "*fricciones y fuerzas*"( $v, \mu$), la EDO resultante es Estructuralmente Estable en una región compacta del plano.

Puedo decir que buena parte de mis trabajos matemáticos posteriores, individuales y en colaboración, tienen conexiones en su origen y motivación primera con mi tesis de 1964 y los trabajos de Peixoto. Ver [GS], [ST], [DRS] y las referencias que hacen ellos. En el Memorial [So5] traté de hacer explícita estas conexiones.

## 7. Indagaciones y Reflexiones

Aunque con raíces en el Método de Continuación de Poincaré, considero que el concepto matemático de Estabilidad Estructural difícilmente podría haber surgido aisladamente en los laboratorios de los Físicos o Ingenieros, o en los escritorios de los Matemáticos "*puros*" o "*aplicados*".

Algo más profundo y creativo ocurrió en la colaboración Andronov-Pontrjagin.

Andronov era físico, aunque de formación matemática excepcionalmente sólida, estudió los modelos matemáticos de mecanismos concretos y fue impedido de trabajar y estimular a otros a investigar cuestiones matemáticas pertinentes [Go]. En 1932, el destino lo colocó en contacto con Pontrjagin, un talentoso topólogo, por tanto de formación "*pura*", pero ansioso por abordar problemas aplicados [Po].

¿Cómo ocurre la transición madura de los ejemplos concretos hacia los conceptos matemáticos fecundos y sus teoremas consecuentes?. Ésta es la cuestión central de la sicología del proceso creativo, cuyas bases y análisis todavía están por ser dilucidados. Creo, por la importancia matemática de la Estabilidad Estructural en nuestro siglo, que los casos concretos de Andronov y Pontrjagin merecen ser estudiados bajo este prisma.

Mientras tanto, una vez formulados y colocados en el dominio de la matemática, los conceptos y teoremas son susceptibles de generalizaciones, extensiones y refinamientos estéticos y de fondo. En otras palabras permiten el tratamiento por el Matemático, con sus fantasías y el vuelo creativo de la imaginación.

Hay varias etapas dentro de la evolución de las ideas matemáticas en torno de la Estabilidad Estructural, sus extensiones y generalizaciones. Además de las ya citadas por Peixoto, otros pasos cruciales fueron dados por Smale, Anosov, Arnold, Thom y Mather, entre otros, desbordando así el dominio de las EDOs y también el de los Sistemas Dinámicos.

Son incontables las implicaciones matemáticas y filosóficas de la Estabilidad Estructural y del estudio de su quiebre: las Teorías de Bifurcaciones, del Caos y las Catástrofes.

Sin embargo, no es posible esperar que la mayoría de los complejos y multidimensionales fenómenos físicos, electromagnéticos, atmosféricos y de la dinámica del cerebro humano, se ajusten a un paradigma inspirado en su base, en los años 30, por modelos bidimensionales simplificados de máquinas simples, mecánicas y eléctricas, de interés tecnológico. Nuevas y desafiantes situaciones aparecen en forma estable en los Sistemas Dinámicos; tal es el caso de los Fractales y de los Atractores Extraños.

No debiera producir gran sorpresa la aparición de nuevos entes dinámicos (más o menos extraños). La Matemática (o sea, el cerebro humano) y el Cosmos son complejos. Cabe al Científico la difícil tarea de descubrir las rendijas por donde observar y explicar los sectores inteligibles de esa complejidad.

*Nota: El presente trabajo contó con el apoyo del CNPq y el Pronex/Finep/MCT, Convenio 76.97.1080.00, Teoría Cualitativa de EDO, Brasil.*

## 8. Bibliografía


[A-L] Andronov, A. A.; Leontovich, E. et al. *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems in the Plane.* Israel Program of Scientific Translations, Jerusalem, 1973.

[A-P] Andronov, A.; Pontrjagin, L. *Dokl. Akad. Nauk.* **14**, 1937.

[C-L] Coddington, E.; Levinson, N. *Theory of Ordinary Differential Equations.* McGraw Hill, New York, 1955.

[Di] Dieudonné, J. *Foundations of Modern Analysis.* Academic Press, New York, 1962.

[DRS] Dumortier, F.; Roussarie, R. e Sotomayor, J. *Bifurcations of Cuspidal Loops.* Nonlinearity. **10**, 1997.

[Go] Gorelik, G.S. *To the Memory of A. A. Andronov (en Ruso).* Uspeki Fisika Nauk. **49**, 1953.

[Gu-Me] Gutierrez, C.; De Melo, W. *The connected components of Morse-Smale vector fields on two-manifolds.* Springer Lect. Notes in Math. 597, 1977.

[GS] Gutierrez, C. e Sotomayor, J. *Lines of Curvature Umbilic Points and Caratheodory Conjecture.* Resenhas do IME-USP. **3.2**, 1998.

[Kp] Kupka, I. *Contribution a la theorie des champs generiques.* Contr. to Diff. Equat. **3**, 1963.

[L1] Lima, E. *Introdução as Variedades Diferenciáveis.* Ed. Meridional, Porto Alegre, 1960.

[L2] Lima, E. *Introdução à Topologia Diferencial.* Notas de Matemática. IMPA, 1961.

[Me-Pa] Melo, W. de; Palis, J. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos.* Projeto Euclides, 1978.

[Pe1] Peixoto, M. *On Structural Stability.* Ann of Math. **69**, 1959.

[Pe2] Peixoto, M. M.; Peixoto, M. C. *Structural Stability in the Plane with enlarged boundary conditions.* Ann. Acad. Bras. Cien. **31**, 1959.

[Pe3] Peixoto, M. *On the classification of flows on 2-manifolds* (1973). Proc. Intern. Symp. on Dyn. Syst. Salvador, Academic Press, 1971.

[Pe4] Peixoto, M. *Structural Stability on two-dimensional manifolds.* Topology, **1**, 1962.

[Pe5] Peixoto, M. *On an aproximation theorem of Kupka and Smale.* Jour. Diff. Equations, **3**, 1967.

[Pe-Ne] Peixoto, M.; Newhouse, S. *There is a simple arc joining 2 Morse-Smale flows.* Asterisque, **31**, 1976.

[Po] Pontrjagin, L. *A short autobiography.* Russ Math. Surveys. **33.6**, 1978.

[Sch] Schwarz, A. J. *A generalization of Poincaré-Bendixson Theorem to closed two-dimensional manifolds.* Amer. Jour. Math, **85**, 1963.

[Sm] Smale, S. *Differentiable Dynamical Systems.* Bull. Amer. Math. Soc. **73**, 1977.

[So1] Sotomayor, J. *Generic one parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds.* Publications Math. de IIHES, **43**, 1974.

[So2] Sotomayor, J. *Sur la mesure de l'ensemble de bifurcations des champs vetorieles dans le plan.* Comp. Rend. Acad. Scien. Paris, t 2-93, 1981.

[So3] Sotomayor, J. *Lições de Equações Diferenciais.* Projeto Euclides, CNPq, Rio Janeiro, 1979.

[So4] Sotomayor, J. *On certain one-parameter family of vector fields.* Notas de Matemática del IMUNI. Univ. Nac. Ing., Lima, **3**, 1964.

[So5] Sotomayor, J. *Memorial de Concurso* Prof. Titular, IME/USP, 1992.

[So6] Sotomayor, J. *Structurally stable second order differential equations*. Springer Lect. Notes in Mahtematics, **957**, 1982.

[So7] Sotomayor, J. *Smooth dependence of solutions of differential equations on initial data*. Bol. Soc. Bras. Mat., **4.1**, 1973.

[So8] Sotomayor, J. *Curvas definidas por equações diferenciais no plano*. Coloq. Bras. Mat., IMPA, Rio de Janeiro, 1981.

[ST] Sotomayor, J.; Teixeira, M. A. *Regularization of discontinuos vector fields*. Proceedings of Equadiff-**95**, World Scientific, Singapur, London, 1998.

[Zch] Zschauer, S.*The fundamental group of connected components of Morse-Smale Systems on orientable manifold*. Tesis (en Alemán), Univ. Dortmund, Resumo (Inglés) publicado en Teubner-Texte Math., Liepzig, 1984.

*Jorge Sotomayor*
sotp@ime.usp.br