Pro Mathematica Vol. XIII, Nos. 25-26, 1999

GÉNESIS DE LA HIPÓTESIS DE RIEMANN

Julio ***Alcántara-Bode***

Hacemos una breve introducción al origen y a algunos resultados, métodos y problemas abiertos conectados a la Hipótesis de Riemann

Si $\pi(n)$ es el número de primos menores o iguales a n, a partir de evidencia numérica Gauss conjeturó que esta función podría aproximarse por $\frac{n}{\ln n}$ cuando $n \to \infty$. Usando métodos elementales Chebyshev probó que $\frac{\ln 2}{2} \leq \underline{lim} \frac{\pi(n) \ln n}{n} \leq 1 \leq \overline{lim} \frac{\pi(n) \ln n}{2} \leq 2 \ln 2$ estableciendo por lo tanto que si $lim \frac{\pi(n) \ln n}{n}$ existe, debe de ser igual a 1. Para probar la existencia de este límite Riemann sugirió el estudio de la función de variable compleja

Profesor de la Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \qquad s=\sigma+it,\ \sigma>1,\ \ t\in \mathbb{R}$$

ya considerada por Euler cuando $s > 1$. Propiedades de ζ (s) reflejan propiedades de los primos debido a la relación

$$\zeta(s)= \prod_{p\ primo} (1-p^{-s})^{-1} \quad \sigma>1$$

establecida por Riemann, pero ya conocida por Euler para $s > 1$ y utilizada por él para dar otra prueba de la existencia de infinitos primos (si existieran sólo un número finito de primos, obtendríamos que la serie armónica es convergente, tomando $s = 1$ en esta relación conocida como la identidad de Euler, Dirichlet utilizó esta idea de Euler para probar que existen infinitos primos de la forma $kq + a$, donde $k, q,\ a \in \mathbb{N}$), q y a fijos y primos entre si y k varía sobre todo $\mathbb{N}$, Riemann probó que la función ζ tiene continuación analítica a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, que posee un polo simple en $s = 1$ con residuo 1 y obedece la ecuación funcional

$$\pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\Pi^{-(1-s)/2}\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

donde $\Gamma(s)$ es la función gamma de Euler definida por

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=s\,e^{\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s/n} \qquad s\in\mathbb{C}$$

en la cual $\gamma=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\ln m\right)$ es la constante de Euler.

Euler verificó la validez de la ecuación funcional para ciertos valores de s, usando argumentos que se pueden hacer rigurosos usando la teoría de sumabilidad de series divergentes.

Una de las pruebas de Riemann de la ecuación funcional usa la fórmula sumatoria de Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{x}}=\sqrt{x}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}\ ,\quad x>0$$

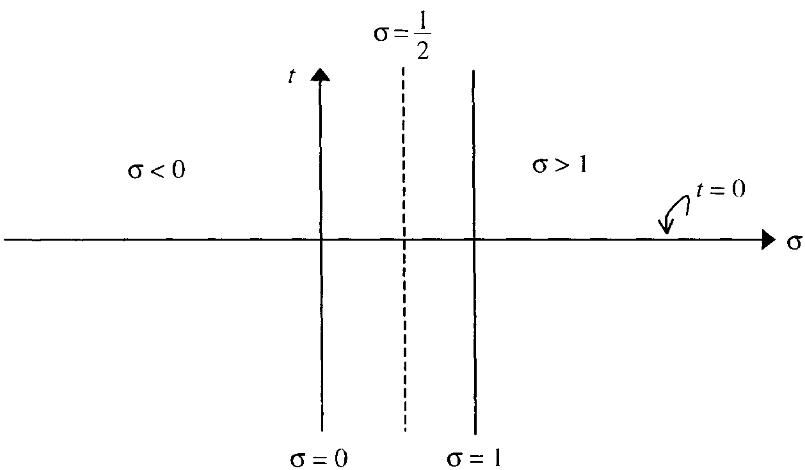
Stieltjes determinó la serie de Laurent de la función ζ :

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}a_k\,(s-1)^k, \qquad s\in\mathbb{C}\setminus\{1\},$$

donde $a_k = \lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\ln^k \nu}{\nu}-\frac{\ln^{k+1} n}{k+1}\right\}$, $k\geq 0$, son conocidas como las constantes generalizadas de Euler.

La identidad de Euler implica que $\zeta(s)\neq 0$ si $\sigma>1$; este resultado, la ecuación funcional y el hecho que la función gamma sólo tiene polos en los enteros negativos y en cero, implica que los únicos ceros de ζ en el semiplano $\sigma<0$ son $s_n=-2n$, $n\in\mathbb{N}$.

Riemann probó que existen infinitos ceros de ζ en la franja $0\leq\sigma\leq 1$, todos ellos no reales y simétricamente distribuidos respecto a las rectas $\sigma=\frac{1}{2}$ y $t=0$:



Si $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$, entonces ξ es una función entera cuyos únicos ceros ρ_n, $n \geq 1$, son los ceros de ζ en la franja crítica. De la teoría de funciones enteras se deduce que

$$\sum_{n\geq 1}|\rho_n|^{-1}=\infty, \qquad \sum_{n\geq 1}|\rho_n|^{-1-\varepsilon}<\infty, \qquad \forall\,\varepsilon>0 \quad \text{y}$$

$$\xi(s)=e^{A+Bs}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{\rho_n}\right)e^{s/\rho_n}$$

Riemann probó que los primeros ceros en la franja crítica $0 \leq \sigma \leq 1$ son todos simples y están sobre la recta $\sigma=\frac{1}{2}$ y esto dio lugar a la famosa:

Hipótesis de Riemann (H. R.): Todos los ceros de ζ sobre la franja $0 \leq \sigma \leq 1$ están en la recta $\sigma=\frac{1}{2}$.

Hardy probó que existen infinitos ceros sobre la recta $\sigma=\frac{1}{2}$.

Levinson probó que más de una tercera parte de los ceros en $0 \leq \sigma \leq 1$ están sobre la recta $\sigma=\frac{1}{2}$.

Hasta 1986 se sabía, mediante el uso de computadoras, que los primeros 15×10^8 ceros en la franja $0 \leq \sigma \leq 1$ son simples y están sobre la recta $\sigma=\frac{1}{2}$. Hadamard y Vallee- Poussin probaron, independientemente, que σ no tiene ceros en la recta $\sigma = 1$ y que esta propiedad es equivalente a la existencia de $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)\ln n}{n}$, estableciendo así el Teorema del Número Primo que dice que $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)\ln n}{n}=1$.

Si la H. R. se cumple el error al aproximar $\pi(n)$ por $\frac{n}{\ln n}$ tiene orden de magnitud $\sqrt{n}\ln n$.

Si la H. R. no se cumple el error es mayor. Si $N(T)$ es el número de ceros en la franja crítica con parte imaginaria $t \in \,]\,0, T]$ entonces para $T \geq 2$, Riemann conjeturó la fórmula asintótica

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + 0(\ln T).$$

Esta conjetura fue probada por Von Mangoldt.

Finalmente, si se definen los números de Bernoulli por la serie de Laurent

$$(e^s - 1)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} s^{m-1} \qquad |s| < 2\pi$$

entonces es fácil probar que $B_m \in \mathbb{Q}$, $\forall m \geq 0$, $B_{2r+1} = 0$, $\forall r \geq 1$

$$\left(B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = -\frac{1}{30},\ B_{10} = \frac{5}{66}\right)$$

Euler probó que

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1}\, 2^{2n-1} \frac{B_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

El también trató de evaluar $\zeta(2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, sin éxito. Lo único que se conoce acerca de esta sucesión es que $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$ (Apéry).

* **Nota**: *Charla presentada en el VI Congreso Boliviano de Matemática, Cochabamba 19 – 23 de abril 1999.*

Bibliografía

[1] Karatsuba, A. A. "*Fundamentos de la Teoría Analítica de los Números*". Editorial Mir, Moscú, 1979.

[2] Patterson, S. J. "*The Theory of the Riemann zeta-function*". Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

Julio Alcántara-Bode
Departamento de Ciencias
Sección Matemáticas
jalcant@pucp.edu.pe