Pro Mathematica Vol. XIII, Nos. 25-26, 1999

ÁRBOLES BINARIOS, ÁLGEBRA TENSORIAL NO ASOCIATIVA Y UNA C–ÁLGEBRA UNIVERSAL

Christian ***Valqui***

Resumen

Damos una descripción del álgebra tensorial no asociativa para espacios vectoriales topológicos y obtenemos así una topología cociente en el álgebra tensorial asociativa usual que hace conjuntamente continua la multiplicación y hace que esta álgebra topológica tenga la propiedad universal.

Introducción

El contenido del presente artículo tiene como base la charla "*Árboles binarios y álgebra tensorial no asociativa*" dada durante el semestre 1999 II

✎ *Profesor de la Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

en la Pontificia Universidad Católica del Perú. El resultado principal es la construcción de una familia de seminormas en el álgebra tensorial TV sobre un espacio vectorial localmente convexo V que define una topología que hace de TV un álgebra topológica. Además el funtor $V \mapsto TV$ es el adjunto por la izquierda del funtor olvidadizo que asigna a cada álgebra topológica el espacio vectorial subyacente. En [V1] esto es usado para construir una extensión universal de c-álgebras que permite extender el resultado de excisión probado en [Cu] para m-álgebras a la clase de c-álgebras completas. Aquí m-álgebras son c-álgebras completas con una familia de seminormas submultiplicativas que definen la topología.

La estructura del artículo es la siguiente: La primera parte introduce las nociones básicas. Para esto describimos el caso puramente algebraico en que el funtor $V \mapsto TV$ es el funtor adjunto por la izquierda del funtor olvidadizo. Luego damos algunas definiciones básicas sobre espacios vectoriales localmente convexos y álgebras topológicas, que nos permiten enunciar el teorema principal.

La segunda parte describe una codificación de árboles binarios a través de n-tuplas totalmente reducibles que se extiende a una descripción del álgebra tensorial no asociativa. Este álgebra ya era conocido antes (ver [B]), pero la forma de codificar es nueva y una de las ideas claves para poder probar el teorema principal, que es en esencia una versión topológica del siguiente hecho (ver 1.1 más adelante): El funtor $V \mapsto TV$ es adjunto por la izquierda al funtor olvidadizo.

1. Nociones Básicas

1.1 Álgebra Tensorial

Dado un espacio vectorial V sobre k ($k = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$), el álgebra tensorial TV es la suma directa $V \oplus (V \otimes V) \oplus V^{\otimes 3} \oplus \dots$. La multiplicación esta dada por la concatenación de tensores, es decir,

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \cdot (w_1 \otimes \dots \otimes w_m) = v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_m,$$

donde $v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$, $w_1 \otimes \dots \otimes w_m \in V^{\otimes m}$ y el producto está en $V^{\otimes n+m}$.

Si A es un álgebra sobre k y $f: V \to A$ es un mapeo lineal, entonces la función $\phi_f: TV \to A \quad v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto f(v_1) \cdot f(v_2) \cdot \ldots \cdot f(v_n)$ es el único morfismo de álgebras que cumple

$$\phi_f \circ \rho = f, \tag{1}$$

donde $\rho : V \to TV$ es la inclusión canónica en el primer sumando. Que (1) se cumpla es obvio de la definición de ϕ_f.

Sea g: $TV \to A$ otro morfismo de álgebras con $g \circ \rho = f$ y sea $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \in V$. Entonces

$$\begin{aligned} g(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) &= g(\rho v_1 \cdot \rho v_2 \cdot \ldots \cdot \rho v_n) \\ &= g(\rho v_1) \cdot g(\rho v_2) \cdot \ldots \cdot g(\rho v_n) \\ &= f(v_1) \cdot f(v_2) \cdot \ldots \cdot f(v_n) \\ &= \phi_f (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n), \end{aligned}$$

lo cual prueba la unicidad de ϕ_f. Por lo tanto la composición con ρ induce una biyección entre los mapeos lineales de V a A y los morfismos de álgebra de TV a A. Sea $\mathcal{E}$ la categoría de los espacios vectoriales sobre k con los mapeos k-lineales y $\mathcal{A}$ la categoría de las álgebras sobre k con los morfismos de álgebras. $Hom_{\mathcal{E}}(\cdot,\cdot)$ y $Hom_{\mathcal{A}}(\cdot,\cdot)$ indiquen el conjunto de morfismos en cada categoría. Entonces T es un funtor $T : \mathcal{E} \to \mathcal{A}$, $V \mapsto TV$ con $Tf(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = f(v_1) \otimes \ldots \otimes f(v_n)$. Denotemos con F al funtor olvidadizo de $\mathcal{A} \to \mathcal{E}$ que asigna a cada álgebra el espacio vectorial subyacente. Entonces la biyección mencionada toma la siguiente forma

$$Hom_{\mathcal{A}}(TV, A) \cong Hom_{\mathcal{E}}(V, FA).$$

Esto es un ejemplo de los que se llama funtores adjuntos. En particular T es el funtor adjunto por la izquierda de F.

1.2 Espacios vectoriales localmente convexos

Un espacio vectorial topológico es un espacio vectorial sobre k ($k = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) que a la vez es un espacio topológico, de modo que las operaciones de espacio vectorial sean continuas. Para describir la topología es suficiente especificar un sistema de abiertos (subbase) alrededor de un punto fijo, generalmente el origen. Nosotros vamos a considerar solamente espacios vectoriales que poseen una subbase formada por conjuntos convexos, llamados espacios vectoriales localmente convexos. Vamos a ver como la topología de estos espacios se puede describir a través de seminormas.

Una seminorma en V es una aplicación $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ que cumple para todo $x,\ y \in V, \lambda \in k$:

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Hay que notar que no se pide la condición: $\|x\| = 0 \Rightarrow x=0$, la cual conjuntamente con las otras tres describe una norma.

Dada una familia $(p_i)_{i\in I}$ de seminormas en V se puede construir una topología en V que lo hace un espacio vectorial localmente convexo. Para esto se considera como subbase alrededor del origen a los conjuntos $B_{p_i,\varepsilon} = \{x \in V | p_i(x) < \varepsilon\}$, para $i \in I$ y $\varepsilon > 0$. También se puede desmostrar que cada subbase da lugar a una familia de seminormas asociada a ella (ver [T, Prop. 7.6, pág. 63]).

A partir de ahora vamos a suponer que la topología de un espacio vectorial localmente convexo esta dada por familias de seminormas. Si A y B son espacios vectoriales localmente convexos entonces una función lineal $f: A \to B$ es continua si para toda seminorma continua p en B existe una seminorma continua q en A de modo que $p(f(x)) \leq q(x), \forall x,\ y \in A$.

Sean A y B espacios vectoriales localmente convexos con topologías definidas por $\{p_i\}_{i\in I}$, respectivamente $\{q_j\}_{j\in J}$. Entonces el espacio vectorial $A \otimes B$ se puede dotar de la topología llamada proyectiva que es definida a través de la familia de seminormas $\{p_i \otimes q_j\}_{(i\ ,\ j)\in I\times J}$. Acá el producto tensorial de seminormas esta dado por

$$q \otimes p(x) := \inf \left\{ \sum_i q(x_1^i) \cdot p(x_2^i) \mid x = \sum_i x_1^i \otimes x_2^i \right\}$$

para $x \in A \otimes B$. Se puede ver que esto se extiende al producto tensorial de m espacios vectoriales con

$$q_1 \otimes \ldots \otimes q_m (x) := \inf \left\{ \sum_i q_1(x_1^i) \cdot \ldots \cdot q_m(x_m^i) \;\middle|\; x = \sum_i x_1^i \otimes \ldots \otimes x_m^i \right\}.$$

1.3 Álgebras Topológicas

Un álgebra topológica es un espacio vectorial topológico con una aplicación continua $\mu : V \otimes V \to V$ que es la multiplicación. μ tiene la propiedad asociativa:

$$\mu \circ (\mu \otimes Id_V) = \mu \circ (Id_V \otimes \mu).$$

Si no se cumple esto se trata de un álgebra topológica no asociativa.

Una c-álgebra A es un álgebra topológica localmente convexa sobre $\mathbb{C}$. Aquí la condición de que la multiplicación sea continua se traduce en lo siguiente: Para toda seminorma p en A existe una seminorma q en A de modo que $p(xy) \leq q(x)q(y), \quad \forall x, y \in A$.

Ahora hemos logrado definir todos los conceptos necesarios para poder describir el resultado principal de este artículo:

Consideremos el funtor olvidadizo de la categoría de c-álgebras a la categoría de espacios vectoriales localmente convexos. Entonces existe un funtor T_c adjunto por la izquierda de F. Esto quiere decir que

$$Hom_{\mathcal{E}\mathcal{T}}(V, F A) \cong Hom_{\mathcal{CA}}(T_c V, A),$$

donde $\mathcal{E}\mathcal{T}$ es la categoría de espacios vectoriales localmente convexos y $\mathcal{CA}$ es la categoría de c-álgebras.

2. Árboles binarios y álgebra tensorial no asociativa

2.1 El magma libre

Definición 2.1 *Sea V un espacio vectorial. Ponemos $M^1 V = V$ y $M^n V = \oplus_{p+q=n} M^p V \otimes M^q V$. El magma libre sobre V es el espacio vectorial*

$$MV := \bigoplus_{n=1}^{\infty} M^n V$$

con la operación dada por las inclusiones $M^p V \otimes M^q V \subset M^{p+q} V$.

Es trivial que M es adjunto por la izquierda al funtor olvidadizo (Comparar con la construcción del magma libre en [B, §2.1, pág. 17]). Nótese que $M^n V$ está conformado por una cantidad finita de copias de $V^{\otimes n}$. En lo que sigue vamos a dar un método para codificar estas copias con lo que llamaremos árboles binarios.

2.2 Árboles binarios

Una n-tupla $\Psi \in \mathbb{N}^n$ es reducible, si existe un k tal que $\Psi_k = \Psi_{k+1} > 1$. Para todo Ψ reducible definimos $k(\Psi)$: min $\{j;\ \Psi_j = \Psi_{j+1} > 1\}$ y la reducción $r(\Psi) \in \mathbb{N}^{n-1}$

$$r(\Psi)_j := \begin{cases} \Psi_j & j < k(\Psi) \\ \Psi_{j+1} & j > k(\Psi) \\ \Psi_j - 1 & j = k(\Psi) \end{cases}$$

Ψ es totalmente reducible si $r^k(\Psi)$ es reducible para $k = 0, 1, \dots, n-2$ ($r^0(\Psi) := \Psi$) y $r^{n-1}(\Psi) = (1) \in \mathbb{N}^1$. Un n-tupla totalmente reducible es llamada un árbol binario con n hojas.

Definición 2.2 *Definimos* $\mathcal{B}^n$ *como el conjunto de n-tuplas totalmente reducibles para* $n > 1$ *y* $\mathcal{B}^1 := \{(1)\} \subset \mathbb{N}^1$.

$$\mathcal{B}^n := \{\Psi \in \mathbb{N}^n;\ \Psi \textit{ es totalmente reducible}\}, \quad n > 1.$$

Un árbol binario con n hojas corresponde a una única manera de multiplicar n variables no asociativas y por lo tanto está íntimamente ligado a un sumando particular de $M_n V$. Haremos explícita esta relación y para esto introducimos la siguiente operación para árboles.

Definición 2.3 *Para* $k, l \in \mathbb{N}$ *definimos la unión* $\vee : \mathcal{B}^k \times \mathcal{B}^l \to \mathcal{B}^{k+l}$ *que asigna a cada par de árboles* (Ψ, Υ) *el árbol*

$$\Psi \vee \Upsilon := (\Psi_1 + 1, \dots, \Psi_k + 1, \Upsilon_1 + 1, \dots, \Upsilon_l + 1).$$

La $(k+l)$-tupla $\Psi \vee \Upsilon$ es totalmente reducible, ya que $r^j(\Psi \vee \Upsilon) = r^j(\Psi) \vee \Upsilon$ para $j = 0, \ldots, k-1$ y $r^j(\Psi \vee \Upsilon) = r^{k-1}(\Psi) \vee r^{j-(k-1)}(\Upsilon)$ para $j = k, \ldots, k+l-2$. Así

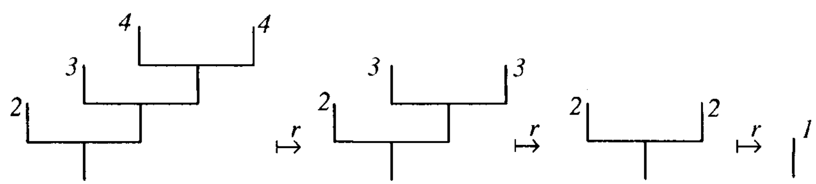
$$r^{k-1}(\Psi \vee \Upsilon) = (2, \Upsilon_1 + 1, \ldots, \Upsilon_l + 1), \qquad r^{k+l-2}(\Psi \vee \Upsilon) = (2, 2)$$

y finalmente $r^{k+l-1}(\Psi \vee \Upsilon) = (1)$. La multiplicación resultante de esta operación es llevada a cabo multiplicando inicialmente las primeras k variables, luego las últimas l y finalmente multiplicando los dos resultados.

Comentario 2.4 *Se puede representar un árbol binario a través de un dibujo (que motiva el nombre de árbol binario) que se obtiene partiendo de un árbol con una sola hoja, correspondiente a* $(1) \in \mathcal{B}^1$, *añadiendo dos ramificaciones para cada paso de reducción, siguiendo la dirección opuesta a la reducción total del árbol. Para mostrar como funciona esto damos el siguiente ejemplo: La* 4*-tupla* (2, 3, 4, 4) *es totalmente reducible. Los pasos de reducción correspondientes son*

$$(2, 3, 4, 4) \to (2, 3, 3) \to (2, 2) \to (1).$$

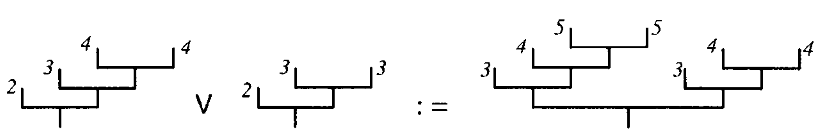
Los árboles correspondientes a esta 4*-tupla y sus pasos de reducción son los siguientes:*



La multiplicación ligada a este árbol es:

$$(x \cdot (y \cdot (z \cdot v))).$$

En esta figura la reducción se puede describir como "cortar la primera doble rama de la izquierda". La unión de dos árboles usando los dibujos se puede ver fácilmente en un ejemplo: Si se unen los árboles (2, 3, 4, 4) *y* (2, 3, 3) *obtenemos* (3, 4, 5, 5, 3, 4, 4)



La correspondiente multiplicación de siete variables es dada por:

$$((x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot x_4))) \cdot (x_5 \cdot (x_6 \cdot x_7))).$$

2.3 El álgebra no asociativa $\mathbf{T}_{na}\,\mathbf{V}$

Definición 2.5 *Sea V un espacio vectorial. Para $n \geq 1$ ponemos $T_{na}^n V = \bigoplus_{\Psi \in \mathcal{B}^n} V^{\otimes \Psi}$ donde $V^{\otimes \Psi} \cong V^{\otimes n}$. El álgebra no asociativa sobre V está definida por*

$$T_{na} V := \bigoplus_{n=1}^{\infty} T_{na}^n V$$

con la multiplicación definida a través del (iso) morfismo

$$V^{\otimes \Psi} \otimes V^{\otimes \Upsilon} \rightarrow V^{\otimes \Psi \vee \Upsilon}$$

para elementos homogéneos y extendida por linearidad a elementos generales.

Proposición 2.6 *Sea V un espacio vectorial. Entonces $T_{na}\, V \cong MV$ como álgebras no asociativas.*

Demostración: El isomorfismo identifica $T_{na}^n V$ con $M^n V$. Como $T_{na}^1 V \cong V \cong M^1 V$, es suficiente mostrar que $T_{na} V$ satisface la definición recursiva de MV:

$$T_{na}^n V = \bigoplus_{p+q=n} T_{na}^p V \otimes T_{na}^q V .$$

El morfismo lineal de derecha a izquierda dado por $V^{\otimes \Psi} \otimes V^{\otimes \Upsilon} \rightarrow V^{\otimes \Psi \vee \Upsilon}$ está bien definido. Solamente resta probar que cada árbol de dimensión $n \geq 2$ (la dimensión es el número de hojas) es la unión de dos árboles de dimensión menor determinados unívocamente, lo cual determina un inverso del mapeo dado.

Sea entonces $n \geq 2$ y $\Psi \in \mathcal{B}^n$. Llamemos p al mínimo de aquellos números $k \geq 1$ tal que $r^{k-1}(\Psi)_1 = 2$. Entonces $L = (\Psi_1 - 1, \ldots, \Psi_p - 1)$ y $R = (\Psi_{p+1} - 1, \ldots, \Psi_n - 1)$ son árboles y $\Psi = L \vee R$. La manera de definir la multiplicación en MV es similar a la de $T_{na}V$ y se ve inmediatamente que el isomorfismo preserva la multiplicación ❑

Transfiriendo la propiedad universal de MV a $T_{na}V$ nos permite afirmar: Si A es un álgebra no asociativa cualquiera y $f : V \longrightarrow A$ es una aplicación lineal, existe un único morfismo de álgebras $\phi_f : T_{na}V \longrightarrow A$ de modo que $\phi_f \circ \rho = f$, donde $\rho : V \longrightarrow T_{na}V$ es la inclusión canónica obtenida gracias al ismorfismo $V \cong V^{\otimes(1)}$, $(1) \in \mathcal{B}^1$.

La descripción que hemos dado del álgebra tensorial no asociativa nos permitirá definir en una manera muy natural las seminormas de 3.1.

3. Topologías en $T_{na}V$ y TV

Construiremos ahora una topología en $T_{na}V$ que hace que la multiplicación sea conjuntamente continua. La topología cociente en TV preserva esta propiedad, de modo que con esta topología TV tiene multiplicación conjuntamente contínua. Adicionalmente se prueba que cada mapeo lineal de V a un álgebra topológica A se puede extender a un morfismo de álgebras contínuo de TV a A.

3.1 Seminormas provenientes de árboles

Definición 3.1 *Sea V un espacio vectorial localmente convexo y sea $(p_k)_{k\in \mathbb{N}}$ una secuencia de seminormas continuas en V. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\Psi \in \mathcal{B}^n$ definimos una seminorma P_Ψ en $V^{\otimes n}$ dada por $P_\Psi := p_{\Psi_1} \otimes \ldots \otimes p_{\Psi_n}$. En $T_{na}V$ definimos una seminorma $P = P(p_k)$ que es dada en cada sumando directo $V^{\otimes \Psi}$ por P_Ψ y en elementos generales por la suma de las seminormas de sus componentes homogéneos.*

Definición 3.2 *Sea V un espacio vectorial localmente convexo. La topología de $T_{na}V$ como espacio localmente convexo es definida por la familia de seminormas $\{P(p_k)\}$, donde (p_k) recorre todas las secuencias de seminormas continuas en V.*

Comentario 3.3 *Nótese que la restricción de cada seminorma $P(p_k)$ al sumando directo $V = T^1_{na} V$ es exactamente la seminorma correspondiente a $(1) \in \mathcal{B}^1$ que es p_1, de modo que V es de manera canónica un sumando directo topológico de $T_{na}V$.*

Proposición 3.4 *La multiplicación es continua en $T_{na}V$.*

Demostración: Dada una seminorma $P = P(p_k)$ buscamos una seminorma Q tal que $P(x \cdot y) \leq Q(x)\, Q(y)$ para todo $x, y \in T_{na}V$. Afirmamos que P_S satisface esta desigualdad, donde P_S se obtiene usando la secuencia trasladada $(p_2, p_3, \ldots)$ en la definición 3.1.

Ponemos $P_{S\Psi} := P_S \big|_{V^{\otimes\Psi}}$. Ahora la afirmación se deduce directamente de la desigualdad $P_{\Psi\vee\Upsilon}(x \cdot y) \leq P_{S\Psi}(x) P_{S\Upsilon}(y)$ que es la desigualdad deseada para elementos homogéneos $x \in V^{\otimes\Psi}$ y $y \in V^{\otimes\Upsilon}$. Pero esta desigualdad es obvia de la definición del producto tensorial de seminormas en 1.2 y las identidades

$$\begin{aligned} P_{\Psi\vee\Upsilon}(x \cdot y) &= p_{S\Psi_1} \otimes \ldots \otimes p_{S\Psi_k} \otimes p_{S\Upsilon_1} \otimes \ldots \otimes p_{S\Upsilon_l}(x \cdot y) \\ P_{S\Psi}(x) &= p_{S\Psi_1} \otimes \ldots \otimes p_{S\Psi_k}(x) \\ P_{S\Upsilon}(y) &= p_{S\Upsilon_1} \otimes \ldots \otimes p_{S\Upsilon_l}(y) \end{aligned}$$

para $x \in V^{\otimes\Psi}$, $\Psi \in \mathcal{B}^k$, $y \in V^{\otimes\Upsilon}$, $\Upsilon \in \mathcal{B}^l$, con $S\Psi_j := \Psi_j + 1$ y $S\Upsilon_j := \Upsilon_j + 1$
❑

Corolario 3.5 *Sea TV el álgebra tensorial usual sobre V y sea π: $T_{na}V \to TV$ la suryección canónica. Definimos $T_c V$ como el álgebra tensorial TV con la topología cociente. Entonces la multiplicación en $T_c V$ es conjuntamente continua.*

Demostración: Sea I el kernel de π. Así la norma $\overline{P}$ en TV correspondiente a la seminorma $P = P(p_k)$ en $T_{na}V$ es dada por $\overline{P}([x]) = \inf_{c \in I}\{P(x+c)\}$. Sean $[x], [y] \in TV$ y $\varepsilon > 0$. Sea P_S como en la proposición y $\overline{P}_S$ la seminorma cociente en TV. Tomamos $c_1, c_2 \in I$ con

$$\overline{P}_S([x])\overline{P}_S([y]) > P_S(x+c_1)P_S(y+c_2) - \varepsilon,$$

entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\overline{P}_S([x])\overline{P}_S([y]) &> P_S(x+c_1)P_S(y+c_2)-\varepsilon \\
&\geq P(xy+(c_1(y+c_2)+xc_2))-\varepsilon \\
&\geq \inf_{c\in I}\{P(xy+c)\}-\varepsilon \\
&= \overline{P}([xy])-\varepsilon .
\end{aligned}$$

Como esto vale para todo $\varepsilon > 0$, se deduce que la multiplicación es continua en TV ❑

La topología en $T_c V$ se puede describir de la siguiente manera:

Cada secuencia (p_n) de seminormas continuas en V define una seminorma $P = P((p_n))$ en TV que está dada por

$$P(x) = \inf\left\{ \sum_{\Psi\in\mathcal{B}^n} P_\Psi(x_\Psi) \,\middle|\, x = \sum_{\Psi\in\mathcal{B}^n} x_\Psi ,\quad x_\Psi \in V^{\otimes n} \right\} \tag{2}$$

para elementos homogéneos $x\in V^{\otimes n}$. Para elementos generales está dada por la suma de la seminorma de sus partes homogéneas. Nótese que la topología restringida a un sumando directo $V^{\otimes n}$ coincide con la topología proyectiva. Veamos que la identidad restringida a un sumando $V^{\otimes n}$ es continua en cada una de las direcciones. Para esto usamos la caracterización de la continuidad de un mapeo lineal de 1.2:

Sea $P = P((p_k))$ una seminorma continua en $T_c V$. En $V^{\otimes n}$ solo interviene una cantidad finita $p_1, \ldots, p_j$ en V que pueden ser mayorizadas por cierta seminorma q en V. Entonces tenemos que $P \leq q \otimes \ldots \otimes q$ en $V^{\otimes n}$.

Por otro lado tomemos ahora una seminorma de la forma $q_1 \otimes \ldots \otimes q_n$, sabiendo que la familia de todas las seminormas de esa forma definen la topología proyectiva. Escogemos p seminorma en V que mayorice a $q_1, \ldots, q_n$. Entonces la secuencia de seminormas (p_k) con $p_k = p$ para todo k define una seminorma $P = P((p_k))$ en $T_c V$ cuya restricción a $V^{\otimes n}$ mayoriza a $q_1 \otimes \ldots \otimes q_n$.

3.2 La propiedad universal de $T_c V$

A partir de ahora todas las álgebras se sobrentenderán asociativas.

Lema 3.6 *Sea A un álgebra localmente convexa con multiplicación continua y sea (p_m) una secuencia de seminormas continuas de modo que para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $p_m(xy) \leq p_{m+1}(x)p_{m+1}(y)$, $\forall x, y \in A$. Denotamos con $\mu : A^{\otimes n} \to A$ la multiplicación. Entonces*

$$p_1(\mu(x)) \leq P_\Psi(x) \quad \forall x \in A^{\otimes n}, \ \forall \Psi \in \mathcal{B}^n .$$

Demostración: Sea $\Psi \in \mathcal{B}^n$ un árbol binario. Pongamos

$$k := k(\Psi) = \min \{ j \mid \Psi_j = \Psi_{j+1} \}.$$

A la operación de reducción en Ψ le corresponde una multiplicación parcial $\mu_\Psi : A^{\otimes n} \to A^{\otimes n-1}$ dada por

$$\mu_\Psi := \overbrace{id \otimes \ldots \otimes \mu}^{k} \otimes \ldots \otimes id .$$

Además $\Psi_k - 1 = r(\Psi)_k$ y $\Psi_k = \Psi_{k+1}$, entonces la condición del lema nos lleva a que

$$p_{\Psi_k}(x) p_{\Psi_{k+1}}(y) \geq p_{(\Psi_k - 1)}(xy) = p_{r(\Psi)_k}(xy) \ \forall x, y \in A .$$

Esto implica que $P_\Psi(x) \geq P_{r(\Psi)}(\mu_\Psi(x))$ para todo $x \in A^{\otimes n}$. La reducción total de Ψ nos da la siguiente cadena de inecuaciones:

$$\begin{aligned} P_\Psi(x) &\geq P_{r(\Psi)}(\mu_\Psi(x)) \\ &\geq P_{r(r(\Psi))}(\mu_{r(\Psi)}(\mu_\Psi(x))) \\ &\ \ \vdots \\ &\geq P_{r^{n-1}(\Psi)}(\mu_{r^{n-2}(\Psi)} \cdots (\mu_\Psi(x) \ldots)) \\ &= p_1(\mu(x)) \end{aligned}$$

□

Ahora podemos demostrar el resultado principal:

Teorema 3.7 *El funtor* $V \mapsto T_c V$ *es adjunto por la izquierda del funtor olvidadizo F de la categoría* $\mathcal{CA}$ *de c-álgebras a la categoría* $\mathcal{TE}$ *de espacios vectoriales localmente convexos, es decir,*

$$Hom_{\mathcal{TE}}(V, FA) \cong Hom_{\mathcal{CA}}(T_c V, A).$$

Demostración: Sea V un espacio vectorial localmente convexo. Para cada álgebra $A \in \mathcal{A}$ y cada mapeo lineal continuo $f : V \to A$ probaremos la existencia de un único homomorfismo continuo $\phi_f : T_c V \to A$ tal que $\phi_f \circ \rho = f$, donde $\rho : V \to T_c V$ es la inclusión canónica. Como hemos visto en 1.1 tenemos que poner

$$\phi_f(x) := \mu(T f(x)) \quad \forall x \in TV.$$

Resta probar que ϕ_f es continuo. Sea p una seminorma continua en A. Queremos encontrar una seminorma Q en $T_c V$ de modo que $Q(x) \geq p(\phi_f(x))$.

Escogemos una secuencia (p_n) de seminormas continuas de modo que

$$p_n(xy) \leq p_{n+1}(x)\, p_{n+1}(y) \quad \forall x, y \in A$$

y $p_1 = p$. La existencia de tal secuencia deviene de la exigencia que la multiplicación en A sea continua. Como f es continua encontramos para cada $n \in \mathbb{N}$ una seminorma continua q_n en V con $q_n(x) \geq p_n(f(x))$, $\forall x \in V$. La seminorma Q en TV definida por la secuencia (q_n) es la que buscamos:

Para elementos homogéneos $x \in V^{\otimes n}$ está dada por

$$Q(x) = \inf\left\{ \sum_{\Psi \in \mathcal{B}^n} Q_\Psi(x_\Psi) \;\middle|\; x = \sum_{\Psi \in \mathcal{B}^n} x_\Psi,\ \ x_\Psi \in V^{\otimes n} \right\}.$$

Además cada elección de los x_Ψ's satisface:

$$\begin{aligned}
\sum_{\Psi \in \mathcal{B}^n} Q_\Psi(x_\Psi) &\geq \sum_{\Psi \in \mathcal{B}^n} P_\Psi(T f(x_\Psi)) \\
&\geq \sum_{\Psi \in \mathcal{B}^n} p(\mu(T f(x_\Psi))) \qquad \text{(por lema 3.6)} \\
&\geq p(\mu(T f(\sum_{\Psi \in \mathcal{B}^n} x_\Psi))) \\
&= p(\phi_f(x)).
\end{aligned}$$

Esto implica la desigualdad $Q(x) \geq p(\phi_f(x))$ para elementos homogéneos $x \in V^{\otimes n}$ y por lo tanto para todos los elementos, ya que la seminorma está dada por la suma de las seminormas de las partes homogéneas para todo elemento de TV ❑

Comentarios finales: Este resultado implica el equivalente para las categorías de espacios vectoriales localmente convexos completos y álgebras localmente convexas completas, ya que el funtor que asigna a cada espacio vectorial su complexión es adjunto por la izquierda del funtor olvidadizo. El mapeo lineal $Id_A \in Hom_{T_E}(FA, FA)$ corresponde a través del isomorfismo del teorema 3.7 a un morfismo de álgebras $\pi : TA \to A$ que nos produce la extensión universal: $0 \to IA \to TA \xrightarrow{\pi} A \to 0$. Esta extensión es importante en el contexto del teorema de excisión para homología cíclica periódica (ver [Cu]).

3. Bibliografía

[B] Bourbaki, Nicholas. "*Groupes et algèbres de Lie, chapitres 2 et 3*", Hermann, Paris, 1972.

[Cu] Cuntz, Joachin. "*Excision in periodic cyclic theory for topological algebras*", Cyclic cohomology y noncommutative geometry. Proceedings of a workshop, Fields Institute, Waterloo, Ont., Canada, June 14-18, 1995. Providence, RI: American Mathematical Society. Fields Inst. Commun. 17, 1997, 43-53.

[T] Treves, Francois. "*Topological vector spaces, Distributions and Kernels*", Academic Press, New York and London, 1967.

[V1] Valqui, Christian. "*Universal extension and excision for topological algebras*", Preprint 58, SFB 478 at Universität Münster, 1999. http://wwwmath.uni-muenster.de/math/inst/sfb/about/publ/valqui02.html.

Christian Valqui
Departamento de Ciencias - Sección Matemáticas
cvalqui@pucp.edu.pe