

CAÍDA LIBRE DE GRANDES ALTITUDES

Casio R. Oré

1. Introducción

En un reciente artículo [1] P. Mohazzabi y J.H. Shea tratan el conocido problema de caída libre de cuerpos pero esta vez desde alturas que bordean el límite de la atmósfera. La novedad es que a la familiar resistencia del aire tomada como proporcional al cuadrado de la velocidad se le agrega un factor que se hace cargo de la variación de la densidad del aire con la altitud. Se obtiene de esa manera en forma rápida una ecuación que permite conocer la relación entre la velocidad del cuerpo y su ubicación. El resultado obtenido muestra que durante el proceso de caída la velocidad adquiere un máximo para luego ir disminuyendo pero sin adquirir una velocidad terminal.



Los resultados son interesantes, pero los autores omiten consignar las tradicionales ecuaciones paramétricas en función del tiempo, vale decir la relación espacio-tiempo, velocidad-tiempo y aceleración-tiempo. En el presente trabajo se buscan estas relaciones.

Adicionalmente invertimos el problema. Con los mismos factores involucrados tratamos el problema de un proyectil lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial dada.

Otra novedad que presentamos es la integración numérica de las expresiones obtenidas usando sólo una simple calculadora, la CASIO FX-3600.

2. Teoría

Repetimos en esta sección el procedimiento utilizado por M. y S. Para la variación de la presión P con la altitud z se utilizó la ley de atmósferas de Laplace $P = P_0 \exp(Mgz/RT)$ donde M es la Masa molar media del aire (0.0288 kg/mol), R es la constante de gases ideales y T la temperatura absoluta. Aunque la ecuación es válida sólo para atmósferas isotérmicas el hecho práctico es que haciendo $RT/Mg = 7.4621 \times 10^3 m = \lambda$ se reproducen los valores experimentales de la presión en términos de la altitud z .

Como la resistencia que ofrece el aire al caer un cuerpo es proporcional a la densidad del aire y esta a su vez a la presión, la ecuación para la caída del cuerpo puede ponerse

$$mv \frac{dv}{dz} = -mg + k_0 v^2 \exp(-z/\lambda). \quad (1)$$

Definiendo nuevas variables y constantes

$$u = k_0 v^2 / mg, \quad x = \exp(-z/\lambda), \quad c = 2g / v_i^2 \quad \text{y} \quad v_i^2 = mg / k_0$$

la ecuación pasa a tomar la forma $\frac{du}{dx} + cu = \frac{c}{x}$.

Integrando resulta

$$u = c \exp(-cx) \int_{cx_0}^{cx} \exp \eta / \eta \, d\eta. \quad (2)$$

Esta es la ecuación obtenida por M y S y que conduce finalmente a la relación $v = v(z)$.

3. Resultados

M y S presentan soluciones para caídas desde alturas iniciales de 30, 20 y 10 km usando $v_f = 40$ m/s que es el valor medio de una serie de experiencias efectuadas. Este valor conduce a $c = 91, 41$.

En el presente trabajo se ha calculado $v = v(z)$ para una caída libre desde una altitud $z_0 = 20$ km ($cx_0 = 6,266$).

Los valores de las velocidades fueron calculados inicialmente cada 100m de caída, pues en atmósfera enrarecida los aumentos, en la velocidad, son notables. Posteriormente, la evaluación se hizo cada 500m. La tabla I reproduce los resultados numéricos obtenidos y la figura 1 los muestra en forma gráfica. Los resultados coinciden con el obtenido por M y S. Es notoria la presencia de un máximo en el valor de la velocidad en el proceso de caída.

Cálculo de $z = z(t)$ y $v = v(t)$:

Empecemos con la definición $v = \frac{dz}{dt}$. En forma operativa esta relación puede escribirse

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{t_{n+1} - t_n} \approx v \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{2} \right) \approx (v_{n+1} + v_n) / 2$$

que puede escribirse así

$$t_{n+1} = t_n + \frac{z_{n+1} - z_n}{(v_{n+1} + v_n) / 2} \quad (3)$$

donde t_n es el tiempo que tarda el cuerpo en llegar a la altitud z_n . La expresión 3 permite obtener tanto $v = v(t)$ como $z = z(t)$ que se muestran en la tabla I y figuras 1 y 2.

Cálculo de $a = a(t)$:

En la ecuación (1) el término que oficia de aceleración es

$$a(t) = -g + \frac{k_0}{m} v^2 \exp(-z/\lambda) = -g + \frac{cx}{2} v^2.$$

Reemplazando valores numéricos resulta

$$a(t_n) = (cx_n) v_n^2 - 9.80. \quad (4)$$

Los resultados se muestran en la tabla I y en la figura 3. Es de observarse que el valor inicial de $9,80 \text{ m/s}^2$ va disminuyendo hasta convertirse en 0 e incluso cambiar de sentido. Es este cambio de sentido el que ocasiona que la velocidad de caída disminuya.

4. proyectil Lanzado Hacia Arriba

La teoría presentada anteriormente reproduce con mucha exactitud la caída de cuerpos desde alturas comparables al espesor de la atmósfera. Trataremos ahora cómo la misma teoría describe el comportamiento de un cuerpo que ha sido lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0 .

La ecuación de movimiento en este caso adopta la forma

$$mv \frac{dv}{dz} = -mg - k_0 v^2 \exp(-z/\lambda).$$

Con los mismos cambios de variables y constantes usados antes se transforma

$$\frac{du}{dx} - cu = \frac{c}{x}.$$

Multiplicando por el factor de integración $\exp(-cx)$ puede escribirse

$$\frac{d}{dx} (u \exp(-cx)) = \frac{c}{x} \exp(-cx).$$

Integrando entre x_0 y x resulta

$$u = \exp(cx) \left[u_0 \exp(-cx_0) + c \int_{-cx_0}^{-cx} \frac{\exp \eta}{\eta} d\eta \right].$$

Se tomó $v_0 = 160$ m/s con lo que $u_0 = 16$. Para $z_0 = 0$ resulta $x_0 = 1$. Usando nuevamente $c = 91,41$ obtenemos finalmente

$$u = \exp(91,41x) \left[32x10^{-40} + 91,41 \int_{-91,41}^{-91,41x} \frac{\exp \eta}{\eta} d\eta \right]. \quad (4)$$

Esta expresión nos proporciona nuevamente la velocidad v de la partícula a diversas altitudes z . A estos datos se les aplica la misma maquinaria anterior para obtener las ecuaciones paramétricas del movimiento $v(t)$, $z(t)$ y $a(t)$. Los resultados se muestran en las figuras 4, 5 y 6.

Observamos en estas gráficas lo que es tradicional. El cuerpo sube hasta una cierta altura y luego desciende. La aceleración en todo momento es hacia abajo. Sin embargo hay novedades notables. El tiempo empleado en subir es inferior al de bajada (casi la tercera parte). La velocidad de impacto en piso es muy inferior a la velocidad inicial proporcionada (alrededor de la cuarta parte). Durante el proceso de subida la aceleración desciende en breve tiempo (~ 5 s) desde $166,59$ m/s² a $9,80$ m/s² mientras que en los 10 s de bajada sólo cambia de $9,80$ a $0,50$ m/s².

De no haber sido por la resistencia que proporcionaba el aire, la partícula hubiese ascendido alrededor de 1200 m de altura en lugar de los 233 m que muestran los cálculos. La breve altura alcanzada significa que la ley de atmósferas de Laplace no ejerce influencia alguna toda vez que al nivel del mar o a 233 m de altitud, la presión atmosférica es la misma. Para que esta ley sea efectiva habría que aumentar el valor de la velocidad inicial v_0 , pero ello trae consigo un considerable aumento de la resistencia del aire debido al factor v^2 . Pareciera que la teoría no permitiría el envío de satélites, pero en esto el caso es distinto. Se les proporciona fuerza impulsora hasta que alcancen una altura considerable y recién empieza el vuelo libre. En nuestro ejemplo eso correspondería a considerar los 160 m/s como la velocidad que tendría la partícula a la altura de 10 km por ejemplo.

5. Conclusiones

Utilizando una sencilla calculadora se han hallado las ecuaciones paramétricas de una partícula que cae libremente desde altitudes muy grandes atravesando regiones en las que paulatinamente va incrementando la densidad del aire y por consiguiente la resistencia que este ofrece al desplazamiento, complementando de esa manera el trabajo de M. y S.

Se ha aplicado el mismo mecanismo para estudiar el desplazamiento de un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba con una cierta velocidad inicial encontrándose que el cuerpo no asciende mucho y por lo tanto la ley de atmósferas de Laplace no tiene, en esta oportunidad, efecto significativo.

6. Bibliografía

- [1] Mohazzabi, P. and Shea, J. H., Am. J. Phys. Vol 64, Oct. 96.

Casio R. Oré
Departamento de Ciencias
Sección Física
corc@pucp.edu.pe

TABLA I

Caída libre de un cuerpo desde una altitud de 20 km

t (s)	z (km)	v (m/s)	a (m/s ²)	t (s)	z (km)	v (m/s)	a (m/s ²)
0,00	20,00	0,00	9,80	43,38	15,5	118,34	-0,95
4,61	19,9	43,37	9,00	47,68	15,0	114,31	-0,92
6,55	19,8	60,04	8,25	52,13	14,5	110,30	-0,87
8,06	19,7	71,98	7,54	56,75	14,0	106,50	-0,84
9,36	19,6	81,37	6,87	61,53	13,5	102,61	-0,76
10,54	19,5	89,03	6,24	66,49	13,0	98,98	-0,70
11,62	19,4	95,49	5,65	71,62	12,5	95,94	-0,66
12,64	19,3	100,96	5,10	76,93	12,0	92,11	-0,61
13,61	19,2	105,64	4,58	82,43	11,5	89,29	-0,57
14,54	19,1	109,67	4,10	88,14	11,0	85,78	-0,52
15,43	19,0	113,16	3,65	94,07	10,5	82,81	-0,48
16,31	18,9	116,16	3,24	100,21	10,0	79,94	-0,45
17,16	18,8	118,74	2,85	106,57	9,5	77,19	-0,42
17,99	18,7	120,97	2,49	113,16	9,0	74,54	-0,39
18,81	18,6	122,87	2,15	119,99	8,5	71,98	-0,36
19,62	18,5	124,48	1,85	127,05	8,0	69,52	-0,33
20,42	18,4	125,84	1,56	134,37	7,5	67,16	-0,31
21,21	18,3	126,97	1,30	141,94	7,0	64,88	-0,29
22,00	18,2	127,87	1,06	149,79	6,5	62,57	-0,27
22,78	18,1	128,63	0,84	157,92	6,0	60,56	-0,25
23,55	18,0	129,20	0,64	166,33	5,5	58,61	-0,23
24,32	17,9	129,62	0,45	175,04	5,0	56,54	-0,22
25,10	17,8	129,90	0,28	184,02	4,5	54,55	-0,21
25,86	17,7	130,07	0,13	193,26	4,0	52,80	-0,20
26,63	17,6	130,11	0,00	202,86	3,5	51,03	-0,18
27,40	17,5	130,06	-0,13	212,82	3,0	49,31	-0,16
28,17	17,4	129,92	-0,24	223,14	2,5	47,66	-0,15
28,94	17,3	129,69	-0,34	223,80	2,0	46,09	-0,14
29,71	17,2	129,40	-0,43	244,84	1,5	44,53	-0,13
30,49	17,1	129,03	-0,51	256,21	1,0	43,04	-0,12
31,26	17,0	128,61	-0,58	269,07	0,5	41,61	-0,12
35,19	16,5	125,80	-0,80	280,29	0,0	40,22	-0,11
39,23	16,0	122,24	-0,92				

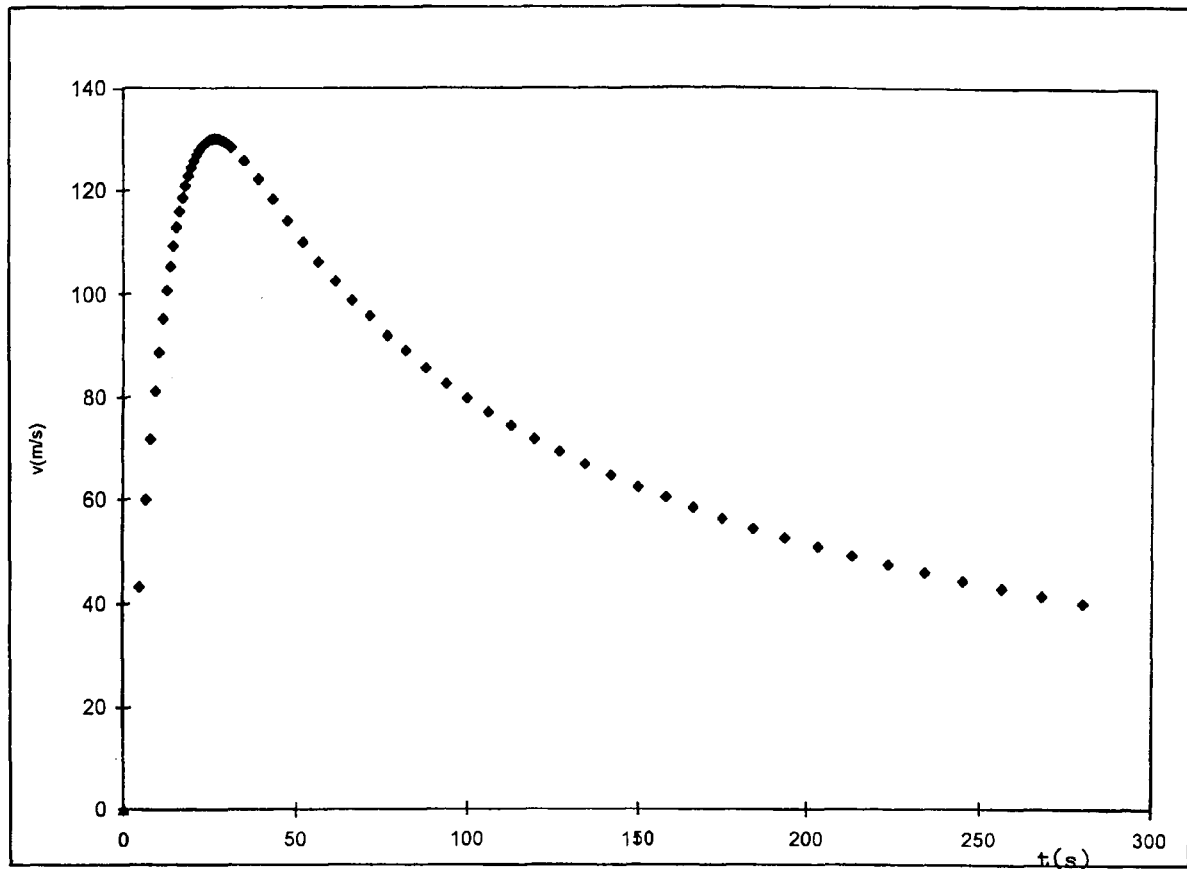


Figura 1: Velocidad vs. tiempo para una caída libre desde una altitud de 20 km.

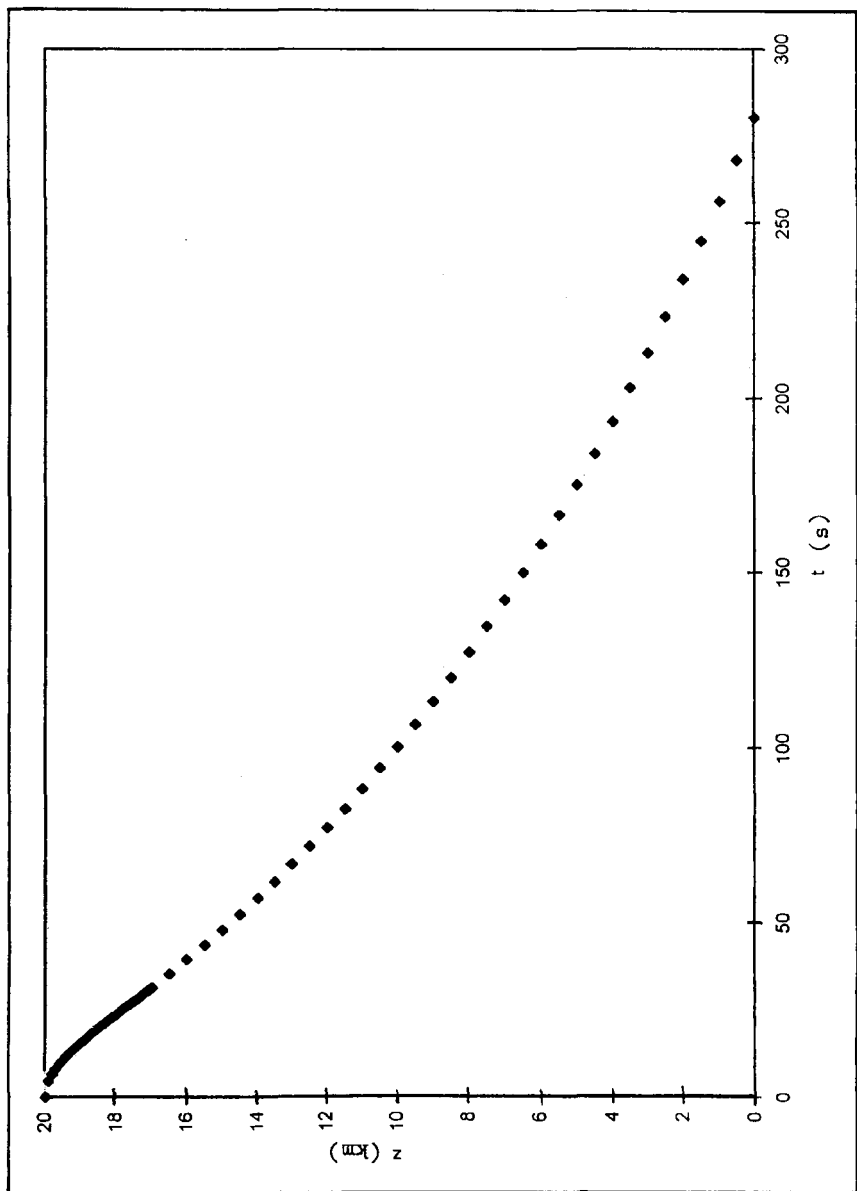


Figura 2: Altitud vs. tiempo para una caída libre de 20 km.

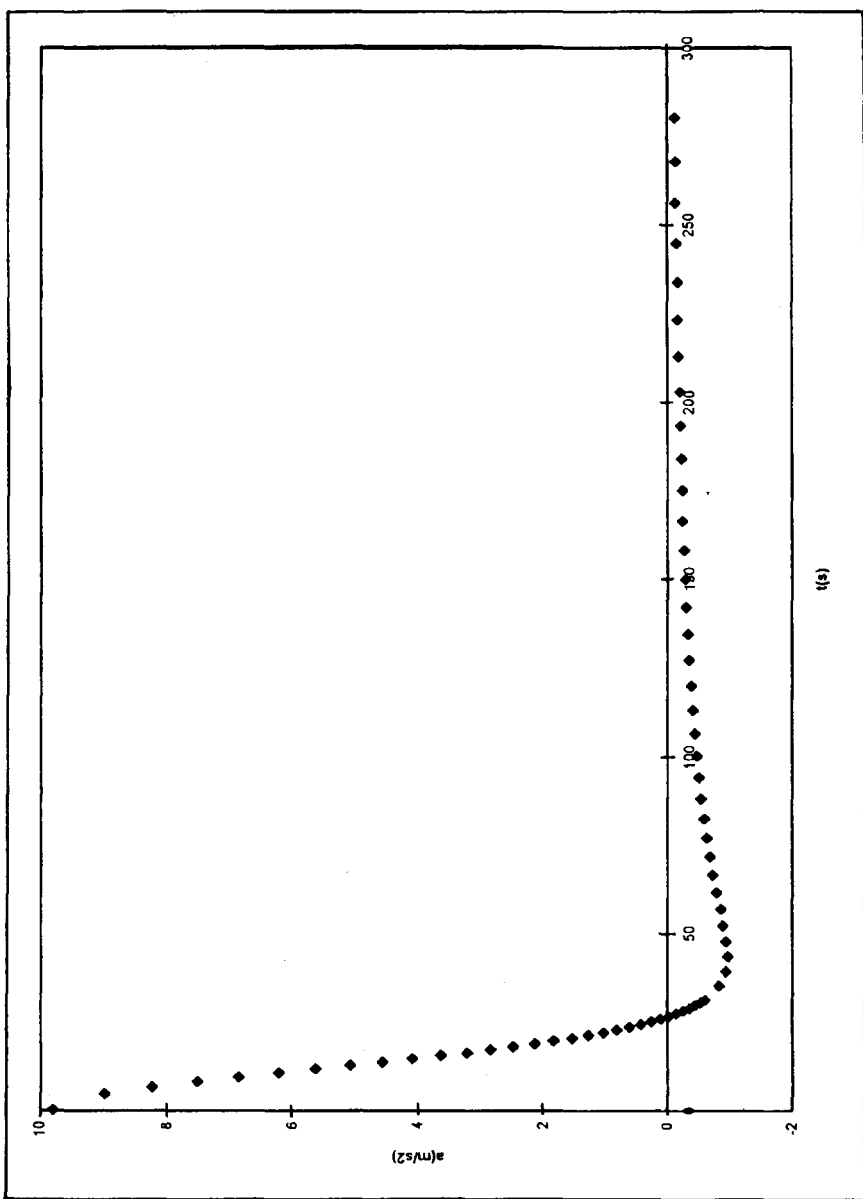


Figura 3: Aceleración vs. tiempo para una caída libre de 20 km.

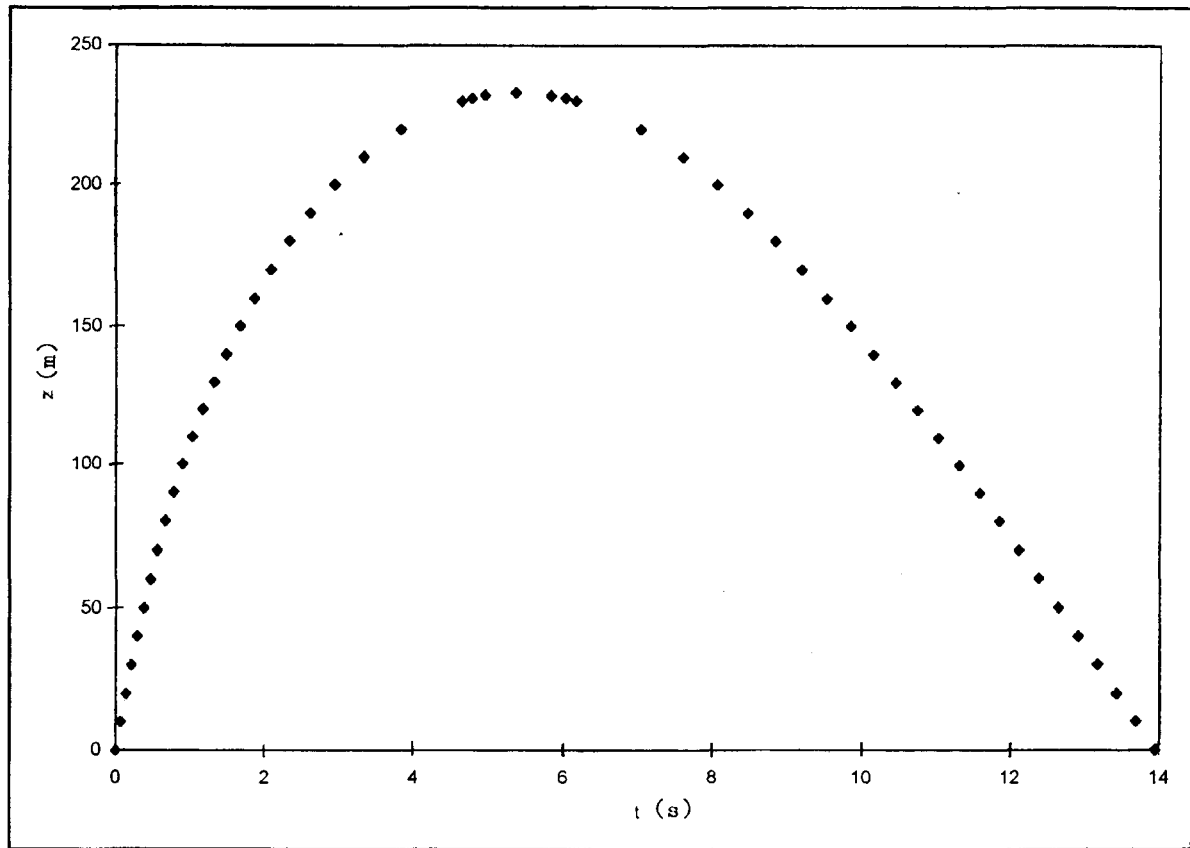


Figura 4: Altitud vs. tiempo para una partícula lanzada verticalmente con una velocidad inicial de 160 m/s.

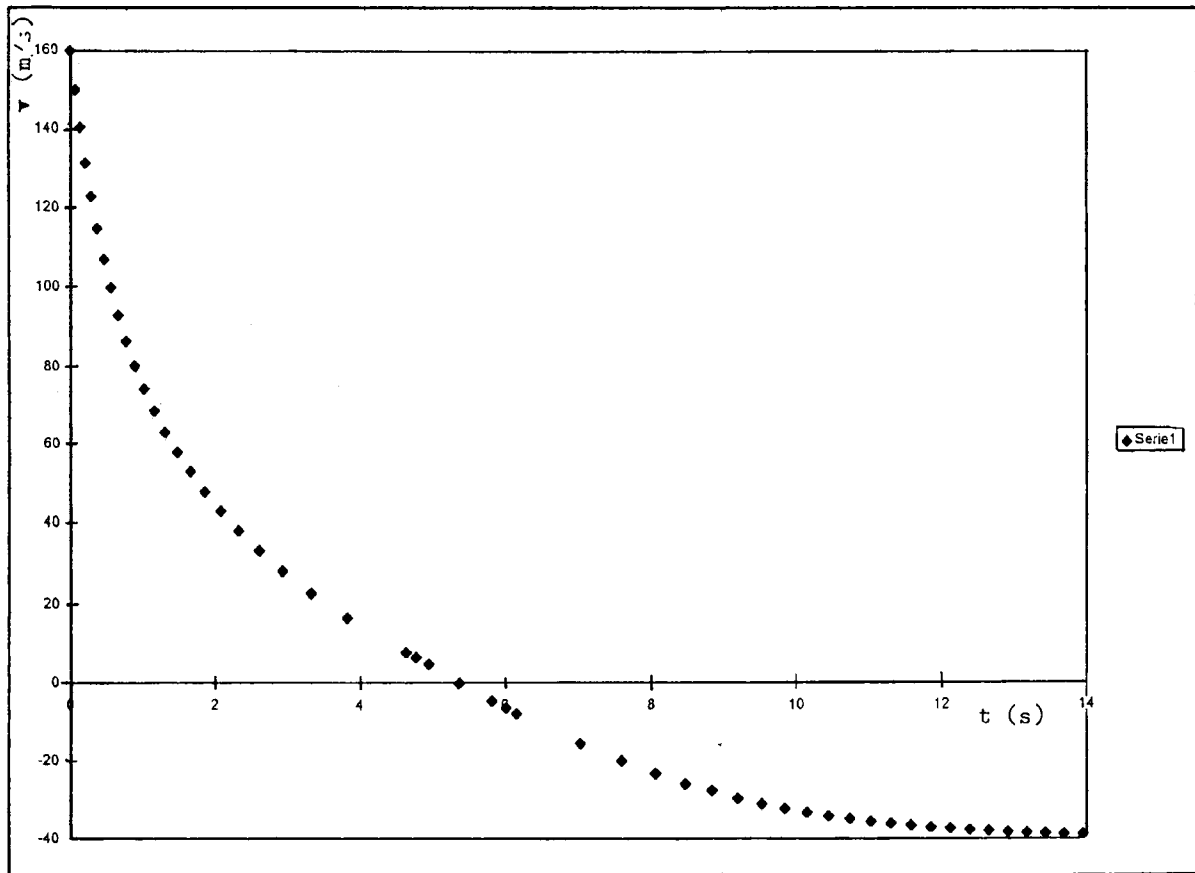


Figura 5: Velocidad vs. tiempo para un proyectil lanzado verticalmente con una velocidad inicial de 160 m/s.

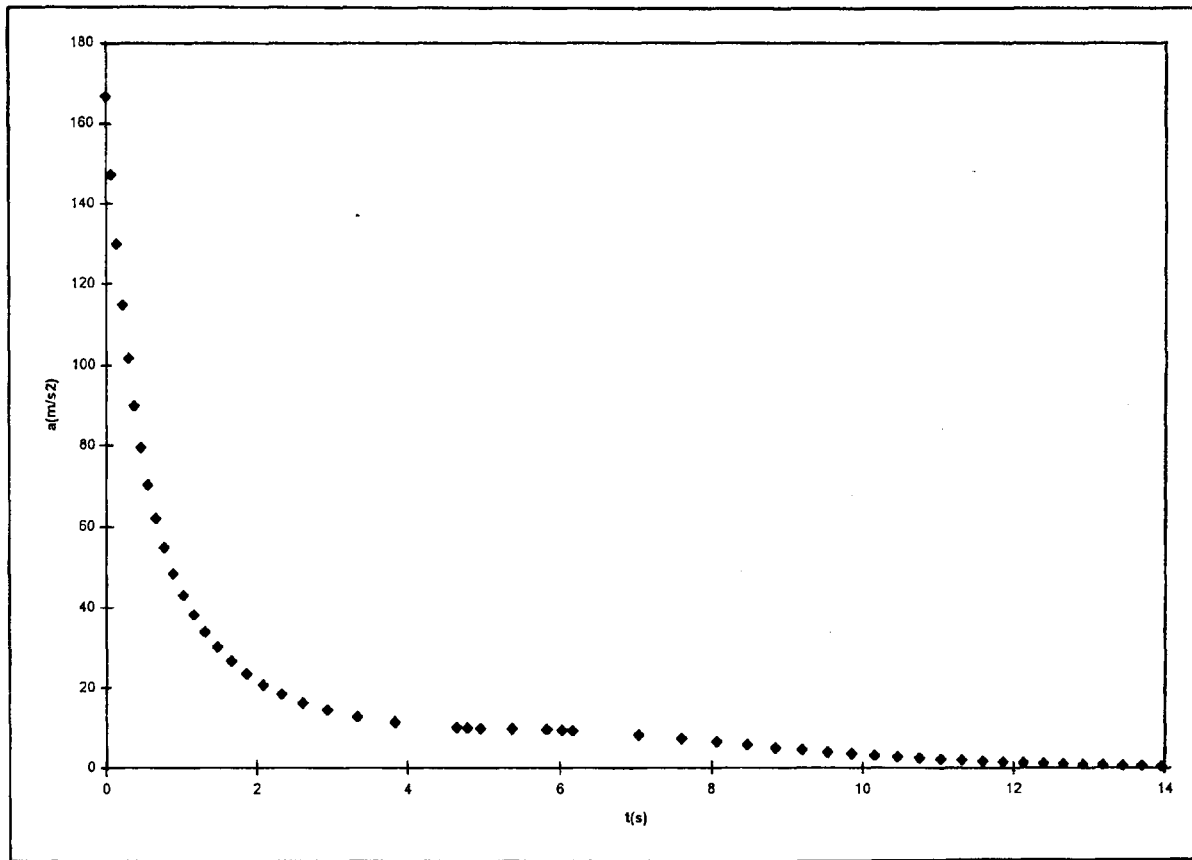


Figura 6: Aceleración vs. tiempo para un proyectil lanzado verticalmente con una velocidad inicial de 160 m/s .