

# ESTUDIO ASINTÓTICO DE UN IMPULSO METAESTABLE PARA UNA ECUACIÓN CON UN TÉRMINO NO LOCAL

(Asymptotic Study of a Metastable Spike  
for an Equation with a non-Local Term)

*Jacques Laforgue*

## **Resumen**

*Se considera una ecuación de evolución singularmente perturbada del tipo reacción-difusión, donde la no-linealidad depende de la densidad espacialmente normalizada, es decir incluye un funcional. El dominio es acotado y se impone en su frontera la condición de flujo nulo.*



La ecuación estacionaria en el dominio no acotado admite una órbita homoclínica, la cual suministra en el dominio acotado, módulo invarianza traslacional, una solución aproximada (cuya apariencia puede describirse como un impulso localizado), con errores exponencialmente pequeños para satisfacer las condiciones de borde.

Esta solución corresponde a un autovalor inestable pero exponencialmente cercano a cero. Ahora bien, bajo la influencia del término no local, dicho autovalor resulta ser entonces dominante, y este hecho implica metaestabilidad. Esto significa que la estructura, aunque oficialmente inestable, se va a preservar por tiempos exponencialmente largos.

El objetivo del trabajo es la determinación de la dinámica del impulso despaciosamente viajero, por un método asintótico sencillo que no desarrolla el intrincado análisis espectral relacionado.

El resultado es la expresión explícita del movimiento del centro del impulso, el cual partiendo de una posición interior arbitraria, se dirige con exponencial lentitud hacia la frontera más cercana.

**Palabras claves:** Ecuación diferencial-funcional, Perturbaciones singulares, Metaestabilidad.

## 1. Introducción

Consideremos la ecuación de evolución singularmente perturbada

$$u_t = \varepsilon^2 u_{xx} + \varepsilon \left( \frac{u}{\|u\|} \right)^2 - u \quad (1)$$

para  $t \geq 0$  y  $x \in [-1, 1]$ , donde  $\varepsilon$  es un parámetro positivo pequeño, y el término no lineal depende globalmente de la función buscada  $u(x, t)$  a través de la norma

$$\|u\| \stackrel{def}{=} \sqrt{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 u^2(x, t) dx}. \quad (2)$$

La ecuación de reacción y difusión (1) con las condiciones de flujo nulo por las fronteras

$$u_x(\pm 1, t) = 0 \quad (3)$$

es un caso particular pero prototípico de un modelo estudiado en [1], donde se demuestra la metaestabilidad de una solución en forma de impulso, mediante un estudio espectral sobre el problema linealizado. Dicho resultado es importante porque es bien sabido [4] que para las ecuaciones como (1) pero sin término no local, las soluciones tipo impulso son perfectamente inestables (ya que el autovalor exponencialmente pequeño asociado no es el principal) y la estructura queda destruida en seguida. El fenómeno de metaestabilidad (conservación de la estructura, con un movimiento imperceptible) ocurre cuando el único autovalor inestable es exponencialmente pequeño (medido respecto del ancho  $\varepsilon$  de la estructura).

Ecuaciones de reacción y difusión, como la de Allen y Cahn, sin término no local, sí admiten soluciones con una capa de transición viajando metaestablemente; se han desarrollado varios enfoques para su análisis [3]. Por eso, en el trabajo desarrollado a continuación, se utiliza un método asintótico empleado anteriormente en [2] para el estudio de la metaestabilidad de una interfase (solución tipo “*frente*”). Este método, sin análisis espectral, permite obtener muy sencillamente la ley de desplazamiento del impulso.

## 2. Estados Estacionarios y Casi Estacionarios

La única solución de (1) estacionaria homogénea es  $u(x, t) \equiv \varepsilon$ . Además, si consideramos la masa total.

$$M(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^1 u(x, t) dx \quad (4)$$

de cualquier solución e integramos la ecuación en derivadas parciales (1) sobre el dominio  $-1 \leq x \leq 1$ , usando (3) obtenemos la ecuación diferencial  $\dot{M} = 2\varepsilon - M$ , de donde  $M(t) = 2\varepsilon + [M(0) - 2\varepsilon] e^{-t}$ . Así

$$M(\infty) = 2\varepsilon \quad (5)$$

y la masa de toda solución estable debe tener dicho valor. La solución  $u \equiv \varepsilon$  cumple con esta condición; de hecho, dicha solución es estable por lo menos con respecto a cualquier perturbación homogénea puesto que toda solución espacialmente homogénea satisface  $\dot{u} = \varepsilon - u$ , es decir es del tipo  $u(t) = \varepsilon + [u(0) - \varepsilon] e^{-t}$  con  $u(\infty) = \varepsilon$ .

Busquemos posibles soluciones estacionarias no homogéneas. Al introducir la variable espacial estirada

$$y \stackrel{def}{=} x/\varepsilon, \quad (6)$$

el dominio de estudio adquiere una extensión de orden  $O(1/\varepsilon)$ , luego es natural considerar el problema estacionario en el dominio infinito  $-\infty < y < \infty$ :

$$\begin{cases} u_{,yy} + \varepsilon \left( \frac{u}{u} \right)'_y - u = 0 \\ u_{,y}(\pm\infty) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

El problema (7) admite la solución centrada en  $y = 0$

$$u(y) = \frac{1}{3T_0 - T_0^3} \operatorname{sech}^2(y/2) \quad (\text{Figura 1}), \quad (8)$$

donde  $T_0 \stackrel{def}{=} th\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) = 1 + O(e^{-1/\varepsilon})$ , así como soluciones con la misma estructura pero centradas en cualquier  $y = y_0 \in (-\infty, \infty)$ , debido a la invarianza por traslación.

Regresemos a la variable  $x$  original y consideremos entonces la familia de funciones independientes del tiempo

$$u(x; x_0) = \frac{2}{3(T_+ + T_-) - (T_+^3 + T_-^3)} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x - x_0}{2\varepsilon}\right) \quad (9)$$

para cualquier  $x_0 \in (-1, 1)$ , donde  $T_+ \stackrel{def}{=} th\left(\frac{1-x_0}{2\varepsilon}\right) = 1 + O(e^{-(1-x_0)/\varepsilon})$  y

$T_- \stackrel{def}{=} th\left(\frac{1+x_0}{2\varepsilon}\right) = 1 + O(e^{-(1+x_0)/\varepsilon})$ . Las funciones de esta familia satisfacen

exactamente la ecuación diferencial (1), y en forma exponencialmente aproximada las condiciones de frontera (3) puesto que

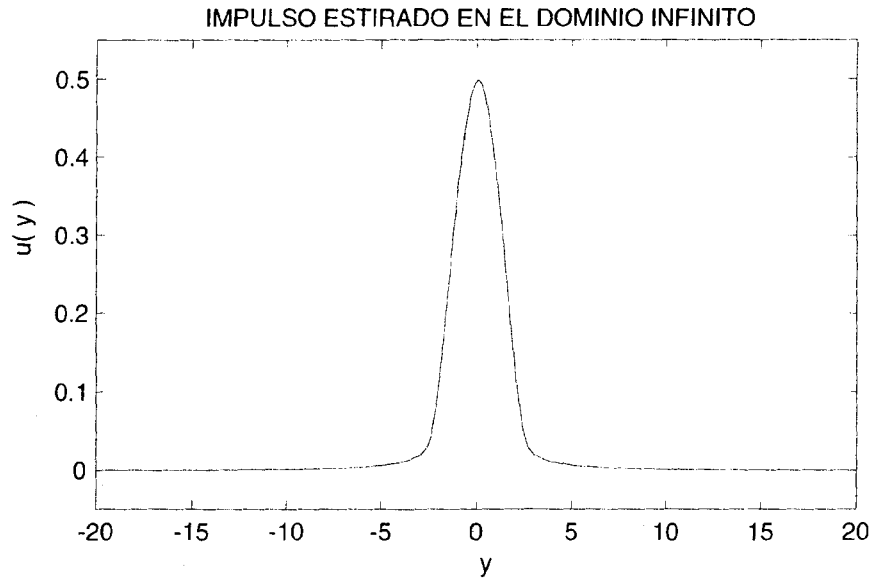


Figura 1. Solución (8) del problema (7) con  $\epsilon = 0,05$

$$u_x(\pm 1; x_0) = \frac{\mp 2\varepsilon^{-1}(T_{\pm} - T_{\pm}^3)}{3(T_+ + T_-) - (T_+^3 + T_-^3)} \sim \mp \frac{2}{\varepsilon} e^{-(1 \mp x_0)/\varepsilon}. \quad (10)$$

Además, tienen una masa exponencialmente cercana a la masa estacionaria, puesto que

$$M = \frac{4\varepsilon}{3 + T_+ T_- - (T_+^2 + T_-^2)} \sim 2\varepsilon [1 + O(e^{-(1 - |x_0|)/\varepsilon})]. \quad (11)$$

Cualquiera de estas funciones constituye un estado casi estacionario: Tomada como dato inicial del problema (1) (3), evolucionará pero solamente de manera tenue y lenta, conservando su estructura y trasladándose con velocidad exponencialmente pequeña. Se quiere determinar asintóticamente tal dinámica metaestable.

### 3. Estudio Asintótico

Consideramos el problema (1) (3) con la condición inicial  $u(x, 0) = u(x; x_0)$  dada en (9). Para capturar el desplazamiento del impulso, necesitamos abarcar un período de tiempo muy largo. Sea  $T \gg 1$  una tal escala de tiempo, en base a la cual comprimimos la variable temporal

$$\tau \stackrel{def}{=} t / T \quad (12)$$

Sea  $\hat{x}(\tau)$  el centro del impulso, a saber el punto donde la solución  $u$  alcanza su valor máximo; en particular  $\hat{x}(0) = x_0$ . Luego definimos una variable espacial estirada que acompaña el impulso en su traslación

$$\eta \stackrel{def}{=} \frac{x - \hat{x}(\tau)}{2\varepsilon} \quad (13)$$

y denotamos sus valores extremos  $\eta_{\pm} \stackrel{def}{=} 1(\pm 1 - \hat{x}(\tau))/(2\varepsilon)$ . En términos de las variables  $\eta$  y  $\tau$ , el problema se convierte en

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} u_{\eta\eta} + \varepsilon \left( \frac{u}{\|u\|} \right)^2 - u = (\mathcal{T}\varepsilon)^{-1} \left( \varepsilon u_{\tau} - \frac{1}{2} \frac{d\hat{x}}{d\tau} u_{\eta} \right) \\ u_{\eta}(\eta_{\pm}, \tau) = 0, \quad u_{\eta}(0, \tau) = 0, \\ u(\eta, 0) = \frac{2}{3(T_+ + T_-) - (T_+^3 + T_-^3)} \operatorname{sech}^2 \eta \end{array} \right. \quad (14)$$

sobre el intervalo espacial  $\eta_- \leq \eta \leq \eta_+$  que depende del tiempo  $\tau$  y se expande algebraicamente cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La norma utilizada, equivalente a (2), es

$$\|u\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\varepsilon \int_{\eta_-}^{\eta_+} u^2(\eta, \tau) d\eta}. \quad (15)$$

Previendo que  $(\mathcal{T}\varepsilon)^{-1}$  es pequeño, podemos despreciar el lado derecho de la ecuación diferencial en (14) y tomar como primera aproximación la solución con autosimilitud en el tiempo

$$\bar{u}(\eta, \tau; \varepsilon) = a(\tau, \varepsilon) \operatorname{sech}^2 \eta \quad (16)$$

donde  $a(\tau, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{3(T_+ + T_-) - (T_+^3 + T_-^3)}$ , con

$$T_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} th|\eta_{\pm}| = 1 - 2e^{-(1 \mp \hat{x}(\tau))/\varepsilon} + \dots \quad (17)$$

Como  $\bar{u}$  no satisface exactamente las condiciones de borde, buscaremos un término correctivo tal que se pueda escribir.

$$u(\eta, \tau; \varepsilon) = \bar{u}(\eta, \tau; \varepsilon) + (\mathcal{T}\varepsilon)^{-1} v(\eta, \tau; \varepsilon) + \dots \quad (18)$$

Despreciando términos de orden mayor, pedimos que  $v$  satisfaga el problema linealizado

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} v_{\eta\eta} + (3 \operatorname{sech}^2 \eta - 1)v = a \frac{d\hat{x}}{d\tau} th\eta \operatorname{sech}^2 \eta + \varepsilon a_{\tau} \operatorname{sech}^2 \eta + b \operatorname{sech}^4 \eta, \\ v_{\eta}(\eta_{\pm}, \tau) = \pm 2a T \varepsilon (T_{\pm} - T_{\pm}^3), \quad v_{\eta}(0, \tau) = 0, \end{array} \right. \quad (19)$$

donde

$$b(\tau, \varepsilon) \stackrel{def}{=} \frac{9}{2} a(\tau, \varepsilon) \int_{\eta_-}^{\eta_+} v(\eta, \tau; \varepsilon) \operatorname{sech}^2 \eta \, d\eta, \quad (20)$$

que no depende de  $\eta$ , se determinará cuando se conozca la solución  $v$ . Como antes, el tiempo  $\tau$  puede ser considerado como un parámetro de una ecuación diferencial ordinaria en  $\eta$ . Como  $\frac{d}{d\eta}(\operatorname{sech}^2 \eta)$  satisface la ecuación diferencial homogénea, se obtiene, por reducción del orden, que la solución general tal que  $v_\eta(0, \tau) = 0$  es

$$v(\eta, \tau) = \frac{2}{15} a \frac{d\hat{x}}{d\tau} (sh\eta \, ch\eta - th\eta + 4th^3\eta) + \frac{1}{15} \varepsilon a_\tau (2sh^2\eta + 7) + \frac{2}{3} b \operatorname{sech}^2 \eta + k[2sh^2\eta + 7 + 15(\eta th\eta - 1)\operatorname{sech}^2 \eta], \quad (21)$$

donde  $k = k(\tau, \varepsilon)$  es una constante de integración. Como

$$v_\eta(\eta, \tau) = \frac{2}{15} a \frac{d\hat{x}}{d\tau} (2sh^2\eta + 13th^2\eta - 12th^4\eta) + \frac{4}{15} \varepsilon a_\tau sh\eta \, ch\eta - \frac{4}{3} b th\eta \operatorname{sech}^2 \eta + k\{4sh\eta \, ch\eta + 15\operatorname{sech}^2 \eta[\eta(1 - 3th^2\eta) + 3th\eta]\}, \quad (22)$$

la evaluación asintótica de las condiciones de frontera suministra el par de ecuaciones

$$\frac{a}{15} \frac{d\hat{x}}{d\tau} e^{\pm 2\eta_\pm} \pm \frac{\varepsilon}{15} a_\tau e^{\pm 2\eta_\pm} \mp \frac{16}{3} b e^{\mp 2\eta_\pm} \pm k e^{\pm 2\eta_\pm} \sim \pm 8a\mathcal{T}\varepsilon e^{\mp 2\eta_\pm}. \quad (23)$$

Ahora bien el segundo término es despreciable con respecto al primero, puesto que  $\varepsilon a_\tau \sim 3 \frac{d\hat{x}}{d\tau} (e^{-4\eta_+} - e^{4\eta_-})$  y  $a \sim 1/2$ . Si además prevemos que

$b \ll \mathcal{T}\varepsilon$ , las incógnitas  $\frac{d\hat{x}}{d\tau}$  y  $k$  deben satisfacer

$$\frac{1}{30} \frac{d\hat{x}}{d\tau} \pm k \sim \pm 4\mathcal{T}\varepsilon e^{\mp 4\eta_\pm}, \quad (24)$$

de donde



$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{d\tau} \sim 120T\epsilon e^{-2/\epsilon} \operatorname{sh}(2\hat{x}/\epsilon) \\ k \sim 4T\epsilon e^{-2/\epsilon} \operatorname{ch}(2\hat{x}/\epsilon). \end{cases} \quad (25)$$

Aquí, la expresión asintótica de la ley de desplazamiento del impulso es consistente con lo obtenido en [1]. Los resultados (25) permiten verificar que  $\frac{b}{T\epsilon} \sim -18(1-|\hat{x}|)\epsilon^{-1} e^{-2(1-|\hat{x}|)/\epsilon} \ll 1$ , como previmos. Lo más importante

es que permiten verificar también que  $(T\epsilon)^{-1} v \sim 4e^{-(2-|x+\hat{x}|)/\epsilon} \ll 1$ , es decir que  $(T\epsilon)^{-1} v$  es efectivamente un término correctivo y la linealización en (19) está justificada.

La velocidad  $d\hat{x}/dt$  de traslación del impulso es exponencialmente lenta, del orden  $O(\epsilon e^{-2(1-|\hat{x}|)/\epsilon})$ , y tiene el signo de  $\hat{x}$ : El impulso se aleja del centro  $x=0$ .

Integrando la ecuación diferencial ordinaria en (25), obtenemos que el movimiento del impulso está dado por

$$\hat{x}(t) = \frac{\epsilon}{2} \ln \left[ \frac{1 + th(x_0/\epsilon)e^{t/T}}{1 - th(x_0/\epsilon)e^{t/T}} \right], \quad (26)$$

donde, por conveniencia, se ha seleccionado la escala de tiempo exponencialmente larga

$$T(\epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} e^{2/\epsilon}/240. \quad (27)$$

El impulso se desplaza hacia la frontera más cercana, cuya vecindad alcanza al cabo del tiempo

$$t \simeq T \ln \left( \coth \frac{|x_0|}{\epsilon} \right) \sim \frac{1}{120} e^{2(1-|x_0|)/\epsilon}. \quad (28)$$

En la figura 2 (grafo de  $\hat{x}(t)$  dada por (26) para varios  $x_0$ ) se puede apreciar los tiempos exponenciales (ubicados en una escala logarítmica) al cabo de los cuales el impulso se aleja de su posición inicial dirigiéndose a  $\pm 1$  según el caso. Los trozos horizontales confirman la estimación (28).

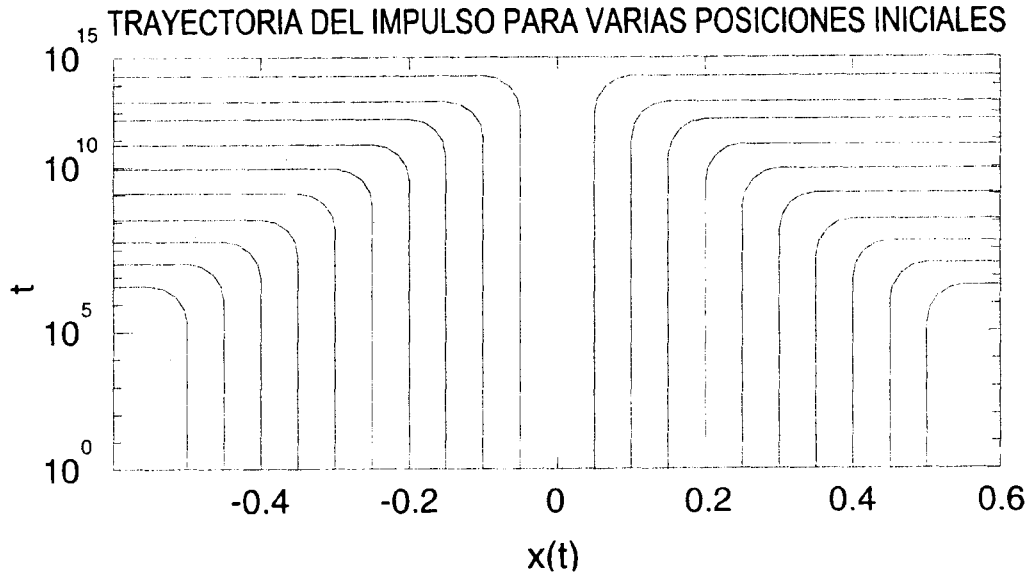


Figura 2. Desplazamiento del impulso para  $\varepsilon = 0,05$  y  $x_0 = \pm 0,05, \pm 0,1, \dots, \pm 0,5$ .

La interacción del impulso con la frontera tendría que ser estudiada por otros métodos: Aquí todas las estimaciones asintóticas han asumido que  $1 - |\hat{x}| \neq O(\epsilon)$ . El desenlace más probable es la absorción del impulso por la frontera, seguida por la convergencia de la solución homogénea resultante hacia  $u \equiv \epsilon$  (sección 2). Tal desenlace podría ser verificado mediante una integración numérica con suficiente perseverancia, usando para  $\epsilon$  algún valor apenas pequeño.

#### 4. Referencias

- [1] Iron, D. y Ward, M.J. (2000). "A metastable spike solution for a non-local reaction-diffusion model". SIAM J. Appl. Math., Vol. 60, N°3, pp. 778-802.
- [2] Laforgue, J. (1996). "Sobre un modelo sencillo de transición de fases". en las memorias II Coloquio sobre Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, Mayo 1995, A.D. Rueda, J. Guíñez y G. Oquendo, editores, La Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela. Volumen I, pp. 27-32.
- [3] Laforgue, J.G.L., O'Malley, R.E. Jr. y Ward, M.J. (1998). "Metastable travelling-wave solutions of singularly-perturbed reaction-diffusion equations". Euro. J. Appl. Math., Vol. 9, N°4, pp. 397-416.
- [4] Maginu, K. (1978). "Stability of stationary solutions of a semilinear parabolic partial differential equation". J. Math. Anal. Appl., Vol. 63, pp. 224-243.

#### Agradecimiento

El autor agradece al *Consejo de Investigación de la Universidad De Oriente* su apoyo y en particular la ayuda recibida para poder asistir a la XLIX Convención Anual de la Asociación Venezolana para el Avance de la Ciencia, realizada en Maracay, Venezuela, del 14 al 19 de noviembre de 1999, donde fue presentada una versión preliminar de este trabajo.

*Jacques Laforgue*  
*Universidad de Oriente, Venezuela*  
[laforgue@sucre.udo.edu.ve](mailto:laforgue@sucre.udo.edu.ve)  
[jlaforgu@ci.udo.edu.ve](mailto:jlaforgu@ci.udo.edu.ve)