Pro Mathematica Vol. XIV, Nos. 27-28, 2000

GRUPOS DE TRANSFORMACIONES EN LA GEOMETRÍA RIEMANNIANA

*Christian **Figueroa***

Resumen

Clasificamos las superficies mínimas del grupo de Heisenberg, $\mathcal{H}_3$, que son invariantes con respecto a un subgrupo unidimensional de isometrías de ($\mathcal{H}_3$, g), haciendo uso de las técnicas de los grupos de transformaciones.

1. Introducción

En topología estudiamos ciertos objetos como espacios topológicos, variedades topológicas y variedades diferenciables. En la teoría de grupos de transformaciones estudiaremos las simetrías de tales objetos. Es decir, los grupos de simetría (o automorfismos) que preservan las estructuras de un modelo matemático dado.

✎ *Profesor de la Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

En el contexto en el que estamos interesados, estudiaremos algunas aplicaciones de las técnicas e ideas de grupos de simetría al estudio de las variedades riemannianas en donde estos grupos actúan por isometrías.

Necesitaremos algunos conceptos de grupos de transformaciones. Sea G un subgrupo cerrado (no necesariamente compacto) del grupo de isometrías de una variedad riemanniana M. Sea $x \in M$, entonces

$$G(x) = \{gx;\ g \in G\}$$

es llamada la órbita de x (mediante G). Note que $G(x)$ es una subvariedad encajada de M. Y

$$G_x = \{g;\ gx = x\}$$

es el *subgrupo de isotropía* de G en x, llamado también el estabilizador de x. G_x siempre es cerrado, luego es un subgrupo de Lie, por tanto G/G_x es una variedad homogénea difeomorfa a $G(x)$ y en este caso diremos que la órbita $G(x)$ es del tipo G_x. Es claro que si dos órbitas son del mismo tipo entonces estas son difeomorfas. Esto, también nos permite introducir un orden en el conjunto de las órbitas. Una órbita $G(y)$ es menor que $G(x)$ si G_y contiene un conjugado de G_x como subgrupo algebraico y escribiremos $G(y) \leq G(x)$.

Teorema 1.1 *Sea G un grupo de Lie actuando propiamente en una variedad M mediante difeomorfismos y supongamos que M/G es conexo. Entonces*

1. *Existe un único tipo de órbita principal, (H), que es máxima con respecto a $\leq$,* i.e., *para cada $x \in M$, H es conjugado a algún subgrupo de G_x.*
2. *Sea M_r el conjunto de órbitas principales, entonces M_r es abierto y denso en M.*
3. *El espacio cociente $M^* = M_r/G$ es una variedad diferenciable conexa y la aplicación cociente es una submersión.*

Proof. Ver [7]

Sea M y N dos variedades riemannianas y G un subgrupo cerrado del grupo de isometrías de M y N. Sea $\varphi : N \to M$ una inmersión isométrica *G-invariante*, es decir $\varphi(gx) = g(\varphi x)$, y supongamos que el tipo de órbita principal es la misma para ambas acciones. Esto garantiza que la aplicación inducida por φ, $\bar{\varphi} : N_r/G \to M_r/G$, sea también una inmersión. Ahora introducimos en los espacios de órbitas N_r/G y M_r/G las métricas riemannianas de tal forma que la aplicaciones cocientes sea submersiones riemannianas. Vamos a presentar un procedimiento que nos permitirá calcular la curvatura media de la inmersión φ en términos de la curvatura de $\bar{\varphi}$.

Como estamos interesados en hacer un análisis local podemos considerar N como una subvariedad encajada en M, identificando N con $\varphi(N)$. Sea $x \in N_r \subset M_r$ y $H = G_x$. Escogemos, en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, un producto interno que sea Ad_G – *invariante*, es decir invariante por la representación adjunta de G, y consideramos la descomposición ortogonal $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$ de $\mathfrak{g}$ con respecto a esta métrica. Esto nos genera una métrica G – *invariante* en la órbita G/H. Es decir, el grupo G actúa por isometrías en G/H. Es claro que $\mathfrak{h}^{\perp}$ genera $c = \dim G - \dim H$ campos de Killing, $V_1, \ldots, V_c$, tangentes a las órbitas pertenecientes a una vecindad de x. Sea $A(y)$ la matriz dada por $a_{ij} = \langle V_i, V_j \rangle$, el producto interno calculado en M y $\omega(y) = (\det A(y))^{1/2}$ la forma de volumen de la órbita $G(y)$. Entonces el vector curvatura media de φ puede ser calculada en términos de la curvatura media de la inmersión $\bar{\varphi}$.

Teorema 1.2 *Sea H y $\bar{H}$ los vectores curvaturas de $N_r \subset M_r$ y $N_r/G \subset M_r/G$, respectivamente. Entonces* $H = \bar{H} - grad\,(\ln\omega)$.

Proof. Ver [3]

Para terminar esta sección daremos un método para calcular la métrica riemanniana en el espacio de órbitas M_r/G. Es conocido que el espacio de órbitas puede ser, localmente, parametrizado por funciones invariantes por G (estas funciones son obtenidas analizando el álgebra de Lie del grupo G). Sean $\{f_1, f_2, \ldots, f_d\}$, con $d = \dim M - \dim G$, un conjunto de funciones invariantes que parametrizan $U/G \subset M_r/G$, donde U es un abierto G–*invariante* de M_r. Denotando por $\tilde{g}$ la métrica cociente en M_r/G y definiendo $h_{ij} = \langle \nabla f_i, \nabla f_j \rangle$, donde el producto interno es de M y ∇ es el operador gradiente con respecto a la métrica riemanniana de M, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.3 *La métrica riemanniana $\tilde{g}$ en el espacio cociente está dada por*

$$d\tilde{s}^2 = \sum_{ij=1}^{d} h^{ij}\, df_i \oplus df_j,$$

es decir, $\tilde{g}_{ij} = h^{ij}$.

Proof. Ver [4]

2. El grupo de Heisenberg

El grupo de Heisenberg es un grupo de Lie nilpotente de orden 2 que tiene la siguiente representación en $GL_3(\mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} 1 & r & t \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con $r, s, t \in \mathbb{R}$.

Provista de una métrica invariante a izquierda, tiene una rica estructura geométrica reflejada por el hecho que su grupo de isometría $\mathfrak{Isn}$ $(\mathcal{H}_3, g)$ es de dimensión 4. En otro contexto la compactificación del grupo de Heinsenberg es la frontera del espacio hiperbólico H_C^n representado por la bola unitaria en C^n con la métrica de Bergman.

Para describir la métrica invariante a izquierda en $\mathcal{H}_3$ notemos que el álgebra de Lie $\mathfrak{h}_3$ de $\mathcal{H}_3$es dada por la matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Mediante la fórmula de Campbell-Hausdorff se puede demostrar que la aplicación exponencial $\exp : \mathfrak{h}_3 \to \mathcal{H}_3$ dada por

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & c + \frac{ab}{2} \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es un difeomorfismo global. Usando la aplicación exponencial como una parametrización global e identificando el álgebra $\mathfrak{h}_3$ con $\mathbb{R}^3$ mediante la siguiente correspondencia

$$(a,b,c) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tenemos que la operación del grupo $\mathcal{H}_3$ está representada por

$$(x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) = \left(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 - \frac{y_1 x_2}{2} + \frac{x_1 y_2}{2} \right).$$

Entonces podemos considerar al grupo de Heisenberg como $\mathbb{R}^3$ junto con la operación $*$. El corchete del álgebra de Lie en términos de la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ está dada por

$$\begin{cases} [e_1, e_2] &= e_3 \\ [e_i, e_3] &= 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Aprovechando, también, la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ como una base ortonormal en la identidad, obtenemos una base ortonormal para los campos invariantes a izquierda, expresado en función de los campos coordenados

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad E_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

y la métrica invariante a izquierda está dada por:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{1}{2} y dx - \frac{1}{2} x dy + dz \right)^2.$$

La siguiente proposición nos da información sobre el grupo de isometría de $\mathcal{H}_3$.

Teorema 2.1 *Sea g una métrica invariante a izquierda en $\mathcal{H}_3$. Entonces $\mathrm{Isom}_0(\mathcal{H}_3, g)$ es isomorfa al producto semidirecto de $\mathcal{H}_3$ con $SO(2)$, donde $\mathcal{H}_3$ actúa por translaciones a izquierda.*

Proof. Ver [5]

Cabe señalar que en las coordenadas exponenciales el grupo de isometrías está representado por las rotaciones alrededor del eje z. Por otro lado, en todo grupo de Lie con una métrica invariante a izquierda todo campo invariante a derecha es un campo de Killing. Entonces, en base a lo anterior, obtenemos la siguiente base de campos de Killing con sus respectivas isometrías generadas:

Isometría		Campo de Killing
$L_{(t,0,0)}$	$\leftrightarrow$	$F_1 = \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{y}{2}\dfrac{\partial}{\partial z}$
$L_{(0,t,0)}$	$\leftrightarrow$	$F_2 = \dfrac{\partial}{\partial y} - \dfrac{x}{2}\dfrac{\partial}{\partial z}$
$L_{(0,0,t)}$	$\leftrightarrow$	$F_3 = \dfrac{\partial}{\partial z}$
ρ_θ	$\leftrightarrow$	$F_4 = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$

Luego, los grupos unidimensionales de isometrías están determinados en el siguiente teorema.

Teorema 2.2 *Los subgrupos unidimensionales de* $\mathfrak{Iso}_0(\mathcal{H}_3, g)$*, son los siguientes:*

1. *Los subgrupos a 1-parámetro generados por las combinaciones de*
$$a_1F_1 + a_2F_2 + a_3F_3 + bF_4$$
de campos de Killing donde $b \neq 0$.

2. *Los subgrupos a 1-parámetro generados por las combinaciones lineales de* F_1, F_2 y F_3.

3. Superficies Helicoidales

Estudiaremos las superficies de $\mathcal{H}_3$ que son invariantes por los grupos de isometrías dadas en el teorema (2.2), que son una combinación de rotación y traslación. Tales superficies las llamaremos *de superficies helicoidales*. Se puede probar que toda superficie invariante por un subgrupo de la forma.

$$\{L_{(a_1t,a_2t,a_3t)} \circ \rho_{bt} \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

es isométrica a una superficie invariante por un grupo de la forma

$$G = \{L_{(0,0,at)} \circ \rho_t : t \in \mathbb{R}\}$$

para algún $a \in \mathbb{R}$. Por tanto consideraremos sólo superficies invariantes por G. Y en este caso el álgebra de Lie del grupo G está generado por el campo de Killing $F_4 + aF_3$.

Como hemos visto, el grupo $SO(2)$ actúa por rotaciones alrededor del eje z, entonces será muy útil parametrizar el grupo de Heisenberg mediante las coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

con $r \geq 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$. En este caso, la métrica invariante a izquierda tiene la siguiente forma:

$$ds^2 = dr^2 + \left(r^2 + \frac{r^4}{4}\right)d\theta^2 + dz^2 - r^2 d\theta dz .$$

Ahora consideremos el espacio cociente. Tomando las funciones invariantes por G,

$$u = r, \quad v = z - a\theta$$

tenemos que el espacio de órbitas está dado por

$$B = \{(u, v) : u \geq 0\}$$

y la métrica orbital, (1.3),

$$d\tilde{s}^2 = du^2 + \frac{4u^2}{4u^2 + (u^2 + 2a)^2}\, dv^2 .$$

Sea $\gamma(s) = (u(s), v(s))$ una curva en el espacio de órbitas que genera a la superficie $S \subset \mathcal{H}_3$, mediante la acción del grupo G, parametrizada por la longitud de arco. Los invariantes geométricos de la superficie invariante (como curvaturas principales, curvatura media, etc.) depende de la curvatura geodésica de γ. Sea σ el ángulo que hace γ con la dirección $\partial/\partial u$. Entonces la curvatura geodésica de γ, [1], está dada por

$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\,(G_u \dot{v} - E_v \dot{u})$$

donde el punto significa la derivada con respecto a s y E, G son los coeficientes de la métrica orbital. Reemplazando los coeficientes de la métrica $d\tilde{s}^2$ en la fórmula anterior, obtenemos

$$k_g = \dot{\sigma} - \frac{2\left[u^4 - (2a)^2\right]}{\left[4u^2 + (u^2 + 2a)^2\right]^{3/2}} \dot{v} . \tag{3.1}$$

Ahora calculamos la curvatura media de la superficie S. Los campos tangentes y normal a lo largo de γ están dadas por

$$\begin{aligned} t &= (\cos\sigma, (2u)^{-1}\sqrt{4u^2 + (u^2 + 2a)^2}\,\mathrm{sen}\,\sigma) \\ b &= (-\mathrm{sen}\,\sigma, (2u)^{-1}\sqrt{4u^2 + (u^2 + 2a)^2}\cos\sigma) . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Como G es generado por el campo de Killing $F_4 + aF_3$, el cual es tangente a la órbita, la forma de volumen $\omega(\xi)$ de la órbita principal ξ está dada por

$$\omega(\xi) = \langle F_4 + aF_3, F_4 + aF_3 \rangle^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{4u^2 + (u^2 + 2a)^2} .$$

Luego, el teorema de reducción, 1.2), toma la siguiente forma: la curvatura media H de la superficie de S a lo largo de la órbita principal ξ está dada por $H = k_g - \partial_n \log(\omega(\xi))$, usando (3.1) obtenemos

$$H = \frac{d\sigma}{ds} + \frac{1}{u}\,\mathrm{sen}\,\sigma ,$$

esto, junto a la fórmula del campo tangente (3.2) obtenemos el siguiente sistema de E.D.O. que debe ser satisfecha por γ

$$\begin{cases} \dot{u} = \cos\sigma \\ \dot{v} = (2u)^{-1}\sqrt{4u^2 + (u^2 + 2a)^2}\,\mathrm{sen}\,\sigma . \\ \dot{\sigma} = H - u^{-1}\,\mathrm{sen}\,\sigma \end{cases} \tag{3.3}$$

Proposición 3.1 *La función*

$$J(s) = u\,\mathrm{sen}\,\sigma - \frac{1}{2}Hu^2$$

es constante a lo largo de una solución γ de (3.3).

Según la proposición anterior las soluciones de (3.3) están caracterizadas por $J(s) = k$, para algún $k \in \mathbb{R}$. Esto nos permitirá determinar las soluciones de la misma.

Para terminar estudiaremos el caso de las superficies mínimas por G. Es decir cuando $H \equiv 0$, que según la proposición anterior, podemos subdividirlo en dos casos.

1. Si $k = 0$. Tenemos que $\sigma = 0$ y $\frac{dv}{du} = 0$, entonces $v = cte$. Entonces la superficie está representada por la ecuación $z = a\theta$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Esta superficie mínima es un helicoide, como en el espacio euclideano tridimensional.

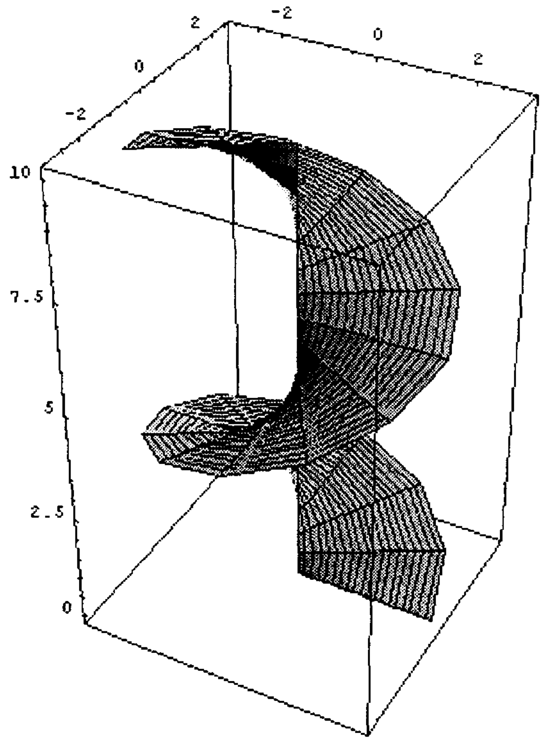

Figura 1.

2. Si $k > 0$. En este caso tenemos que $\operatorname{sen}\sigma = \frac{k}{u}$, $\cos\sigma = u^{-1}\sqrt{u^2 - k^2}$, entonces

$$\frac{dv}{du} = \frac{k}{2u}\sqrt{\frac{4u^2 + (u^2 + 2a)^2}{u^2 - k^2}} , \quad u > k.$$

Notemos que si $a = 0$ obtenemos exactamente un catenoide euclideano. Si $a = -1/2$ la ecuación anterior se puede integrar explícitamente

$$v(u) = -\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(ku^{-1}) + \frac{k}{2}\sqrt{u^2 - k^2} ,$$

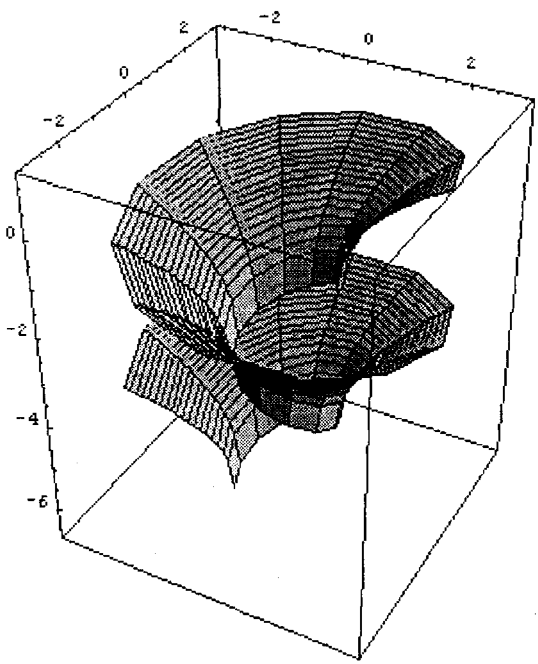

Figura 2.

con $u \geq k$. Sustituyendo las funciones invariantes obtenemos una superficie mínima del tipo helicoidal (en coordenadas cilíndricas).

$$z(r, \theta) = -\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(kr^{-1}) + \frac{k}{2}\sqrt{r^2 - k^2} \ ,$$

con $r \geq k$.

4. Referencias

[1] Carmo, M. do (1976). "*Differentiable Curves and Surfaces*". Prentice Hall, New Jersey.

[2] Carmo, M. do. (1988). "*Geometría Riemanniana*". Projeto Euclides.

[3] Figueroa, Ch.; Mercuri, F.; Pedrosa, R. "*Invariant Surfaces of the Heisenberg Group*". RP 47/96.

[4] Hsiang, W. T. and Hsiang, W.Y. (1982). "*On the existence of codimension one minimal spheres in compact symmetric spaces of rank 2*". J. Diff. Geom. 17, 583-594.

[5] Kaplan, A. (1981). "*Riemannian nilmanidfolds attached to Clifford modules*". Geom. Dedicata 11, 127-136.

[6] Olver, P. (1986). "*Application of Lie Groups to Differential Equations*". GTM 107, Springer-Verlag, New York.

[7] Palais, R. S. (1961). "*On the existence of slices for actions of non-compact lie groups*". Ann. of Math. 73.

Christian Figueroa
cfiguer@pucp.edu.pe